

Introduzione all'Analisi di Fourier

Prof. Luigi Landini
Ing. Nicola Vanello

(presentazione a cura di N. Vanello)

ANALISI DI FOURIER

Segnali tempo continui:

Segnali periodici - Sviluppo in serie di Fourier

Segnali aperiodici - Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Segnali Tempo Discreti:

- Trasformata di Fourier di una sequenza

- Trasformata Discreta di Fourier

- Analisi tramite TDF di sequenze finite

Analisi di Fourier di sequenze bidimensionali o Immagini.

ANALISI DI FOURIER

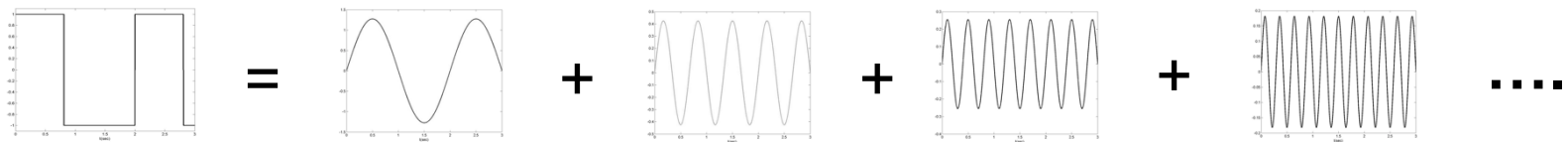
Segnali tempo continui:

Segnali periodici

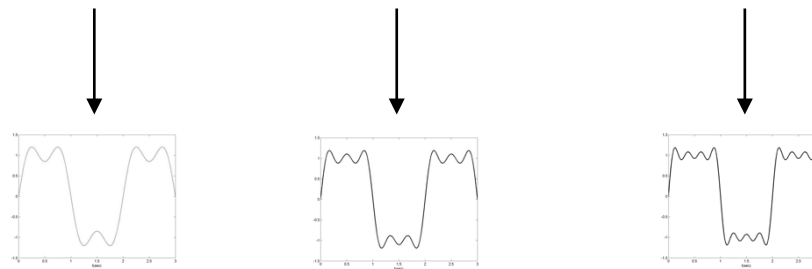
- Sviluppo in serie di Fourier
- Criteri di Convergenza
- Breve Introduzione sui Fasori
- Spettro di Ampiezza e Fase
- Spettro per i Segnali Reali
- Esempi

ANALISI DI FOURIER

Introduciamo l'argomento con l'esempio di un segnale reale: questo può essere espresso come la somma di oscillazioni sinusoidali opportunamente pesate



Ricostruzione aumentando il numero di componenti



L'esempio mostra un'onda quadra scomposta in quattro componenti.
Il numero di componenti è, in generale, infinito

Serie di Fourier

Lo sviluppo in Serie di Fourier viene impiegato nel caso di segnali periodici: $s(t)=s(t+ T_0)$ per ogni t

Un segnale $s(t)$, periodico di periodo T_0 , può essere espresso come la somma pesata di infinite funzioni sinusoidali del tipo

$$e^{j 2 \pi n t / T_0} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

periodiche di periodo T_0/n e frequenza $f_n = \frac{n}{T_0}$

Per i segnali a potenza media finita è possibile scrivere

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j 2 \pi n t / T_0}$$

Serie di Fourier

Vediamo in quali condizioni vale e che significato ha l'uguaglianza appena indicata.

Consideriamo la combinazione lineare di $2N+1$ funzioni periodiche

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N s_n e^{j 2\pi n t / T_0}$$

E definiamo l'errore tra $s_N(t)$ e il segnale originario $s(t)$

$$\varepsilon_N(t) = s(t) - s_N(t)$$

Serie di Fourier

È possibile dimostrare che i coefficienti che minimizzano l'errore quadratico medio tra $s(t)$ e $s_N(t)$ sono dati da

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0 + T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

Dove gli estremi di integrazione così indicati indicano che l'integrale può essere calcolato per qualsiasi intervallo di ampiezza T_0 .

In queste condizioni l'errore quadratico medio si può scrivere come (abbiamo posto $t_0 = 0$)

$$\bar{\varepsilon}_N^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |S_n|^2$$

Per $N \rightarrow \infty$, nel caso di segnale a potenza media finita, l'errore quadratico medio tende a zero

Serie di Fourier

Con questa scelta dei coefficienti si ritrova l'uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2$$

Che esprime la potenza media del segnale in funzione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier

Serie di Fourier

Criterio di Dirichlet

Il criterio di Dirichlet stabilisce in quali condizioni un segnale periodico è rappresentabile come sviluppo in serie di Fourier

- $s(t)$ deve essere assolutamente integrabile sul periodo T_0 ;

- $s(t)$ deve essere continuo o presentare al più, in un periodo, un numero finito di discontinuità di prima specie;

- $s(t)$ deve essere derivabile rispetto al tempo nel periodo, escluso al più un numero finito di punti nei quali, però, devono esistere finite le derivate destra e sinistra.

Soddisfatte queste condizioni la serie di Fourier converge a $s(t)$.
Nei punti di discontinuità di prima specie di $s(t)$, la serie converge alla semisomma del limite destro e sinistro nei suddetti punti

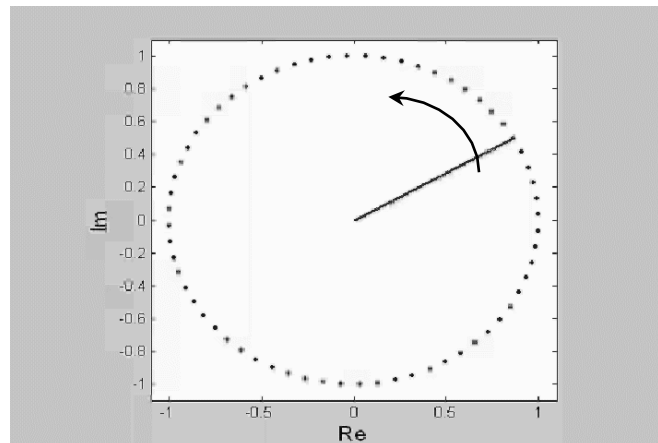
Serie di Fourier: breve introduzione sui fasori

Consideriamo il segnale complesso

$$s(t) = Ae^{j(2\pi ft + \theta)}$$

Questo viene detto fasore rotante: la posizione del fasore sul piano di Gauss può essere individuata da un vettore ruotante alla velocità angolare $\omega=2\pi f$ e al tempo $t=0$ forma un angolo pari a θ con l'asse reale

Nel seguito si visualizza un esempio di rotazione con velocità angolare maggiore di zero $A=1$ e $\theta=\pi/6$ radianti

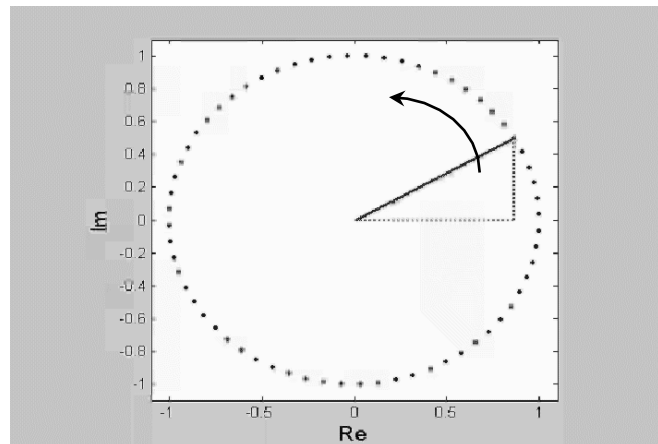


Serie di Fourier: breve introduzione sui fasori

Dalla formula di Eulero discende

$$Ae^{j(2\pi ft + \theta)} = A \cos(2\pi ft + \theta) + jA \sin(2\pi ft + \theta)$$

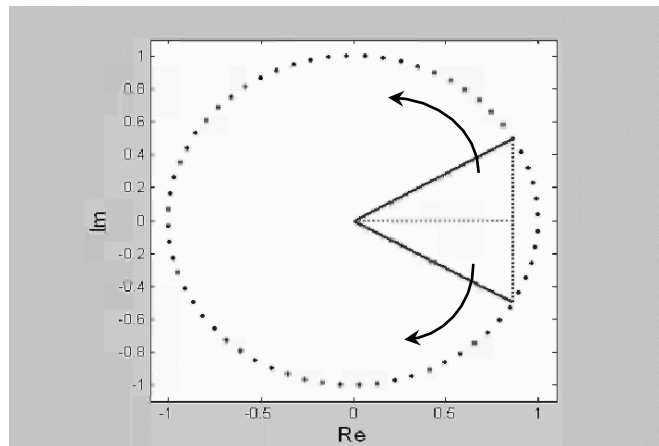
Per cui il segnale $A \cos(2\pi ft + \theta)$ può essere trovato come parte reale del fasore



Serie di Fourier: breve introduzione sui fasori

La parte reale si può ottenere anche come somma del fasore con il complesso coniugato divisa per due

$$\operatorname{Re}\{s(t)\} = \frac{s(t) + s^*(t)}{2} = \frac{Ae^{j(2\pi ft + \theta)} + Ae^{-j(2\pi ft + \theta)}}{2}$$



Da questa animazione si intuisce il significato da attribuire alle frequenze negative: esse sono associate a fasori che ruotano nel piano di Gauss in senso orario.

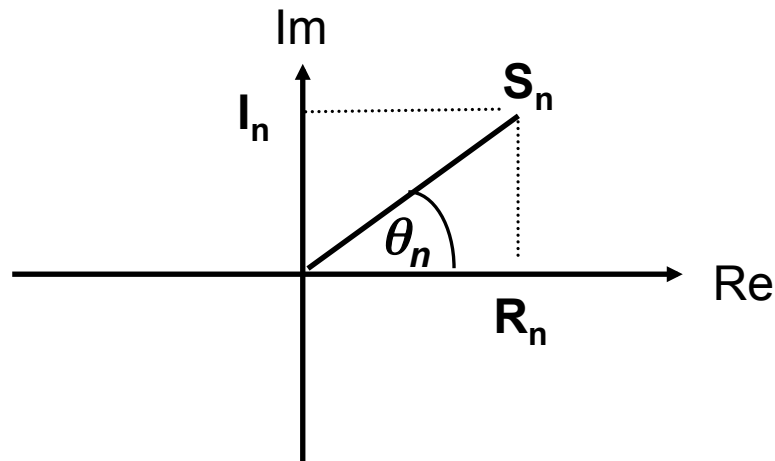
Serie di Fourier

I coefficienti della serie di Fourier S_n formano lo spettro del segnale $s(t)$.

Sono numeri complessi e sono rappresentabili come

-modulo e fase $S_n = |S_n| e^{j\theta_n}$ con $\theta_n = \angle S_n$

-parte reale e parte immaginaria $S_n = R_n + j I_n$



Il grafico del modulo di S_n , al variare di n , si dice spettro di ampiezza mentre il grafico della fase di S_n si dice spettro di fase di $s(t)$

Serie di Fourier

Ciascun coefficiente di Fourier S_n nella formula dello sviluppo va a moltiplicare la funzione oscillante $e^{j2\pi nt/T_0}$

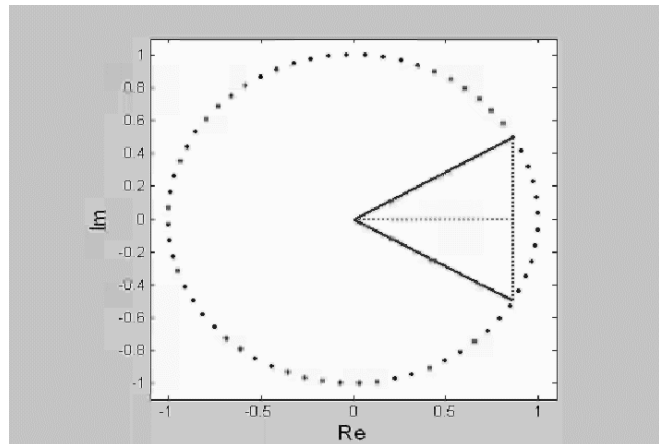
La sommatoria diviene quindi una sommatoria di fasori

$$|S_n| e^{j\theta_n} e^{j2\pi nt/T_0} = |S_n| e^{j(2\pi nt/T_0 + \theta_n)}$$

di ampiezza $|S_n|$ e fase θ_n

Serie di Fourier

Se consideriamo l'animazione precedente possiamo dedurre che ogni segnale reale è costituito da fasori tali per cui, per ogni fasore a frequenza positiva, deve esistere anche il corrispettivo a frequenza negativa tale per cui $|S_n| = |S_{-n}|$ e fase θ_n e la fase iniziale θ_n deve essere opposta



Serie di Fourier

Rappresentazioni della Serie di Fourier per segnali reali
Ricaviamo la forma trigonometrica

Si parte da $S_n = R_n + j I_n$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j 2\pi n t / T_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n + j I_n) e^{j 2\pi n t / T_0} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n + j I_n) \left(\cos(2\pi n t / T_0) + j \sin(2\pi n t / T_0) \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \cos(2\pi n t / T_0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \sin(2\pi n t / T_0) + \\ &+ j \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sin(2\pi n t / T_0) + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cos(2\pi n t / T_0) = \end{aligned}$$

Serie di Fourier

Se il segnale è reale vale la relazione $S_n^* = S_{-n}$

(si verifica immediatamente dalla formula del coefficiente di Fourier)

Come conseguenza abbiamo $R_n = R_{-n}$ e $I_n = -I_{-n}$

forma trigonometrica segnale reale

$$s(t) = R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n \cos(2\pi n t / T_0) - I_n \sin(2\pi n t / T_0) \right]$$

Abbiamo anche la forma polare:

$$s(t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n t / T_0 + \theta_n)$$

Serie di Fourier

Esempi di Sviluppo in serie di Fourier:

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$$

Dal confronto con la forma polare dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale reale periodico si ricavano i coefficienti della Serie di Fourier

$$s(t) = a \cos(2\pi f_0 t) = S_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n f_0 t + \vartheta_n)$$

Da questo confronto si ricava $|S_1| = \frac{a}{2}$, $\vartheta_1 = 0$ e

$$|S_n| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

Visto che il segnale è reale si ha $S_n^* = S_{-n}$

$$S_1 = \frac{a}{2} e \quad S_{-1} = \frac{a}{2}$$

Serie di Fourier

Altro caso: $s(t) = a \sin(2\pi f_0 t)$

Il segnale si può scrivere come $s(t) = a \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Dal confronto con la forma polare si ottiene

$$\left|S_1\right| = \frac{a}{2}, \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \left|S_n\right| = 0, \vartheta_n = 0, \forall n \neq 1$$

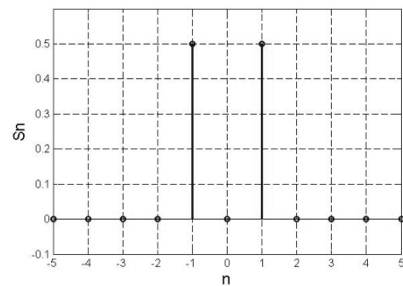
Dalla relazione $S_n^* = S_{-n}$ si ottiene

$$S_1 = \frac{a}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad S_{-1} = \frac{a}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

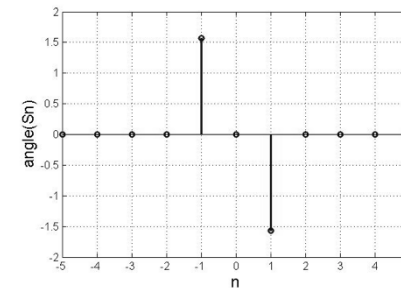
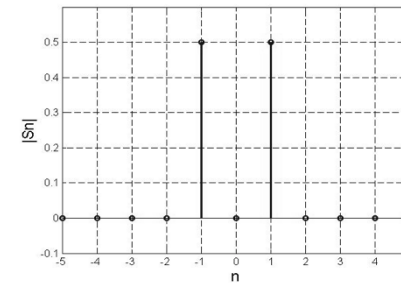
Serie di Fourier

Nelle figure che seguono si vede lo spettro del coseno e del seno per $a=1$

Coefficienti di Fourier coseno



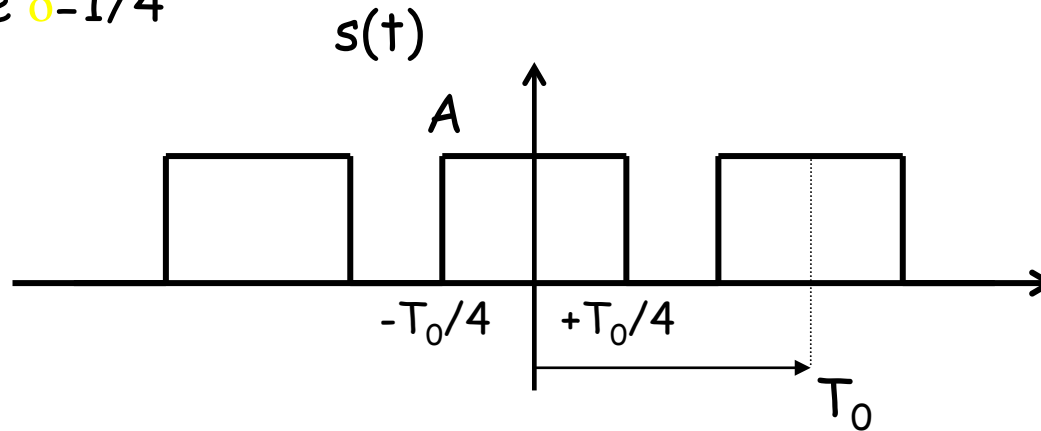
Coefficienti di Fourier seno



Nel caso del coseno è sufficiente un grafico visto che i coefficienti sono reali. I coefficienti nel caso del seno sono complessi e possono essere visualizzati in modulo e fase, oppure tramite un unico grafico della parte immaginaria.

Serie di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s(t)$ di periodo T_0 e duty cycle $\delta=1/4$



$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A dt & \text{per } n = 0 \\ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Serie di Fourier

- $n = 0$

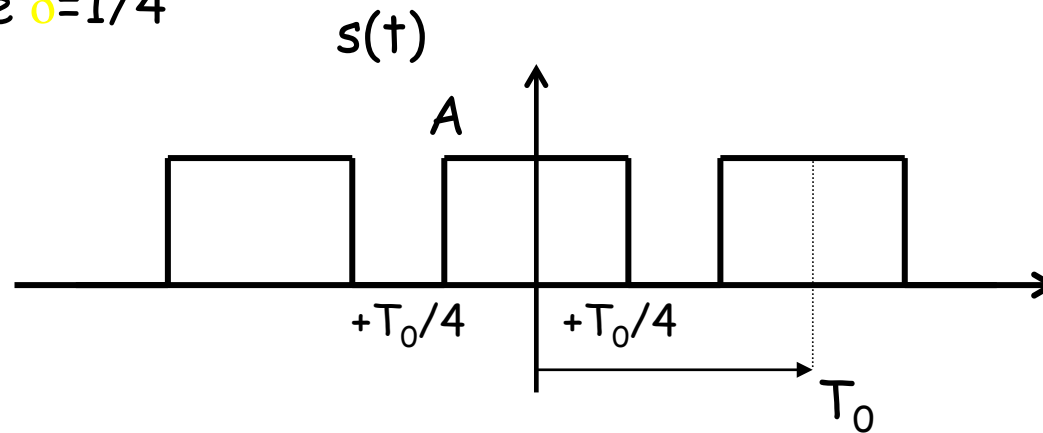
$$S_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A dt = \frac{A}{2}$$

- $n \neq 0$

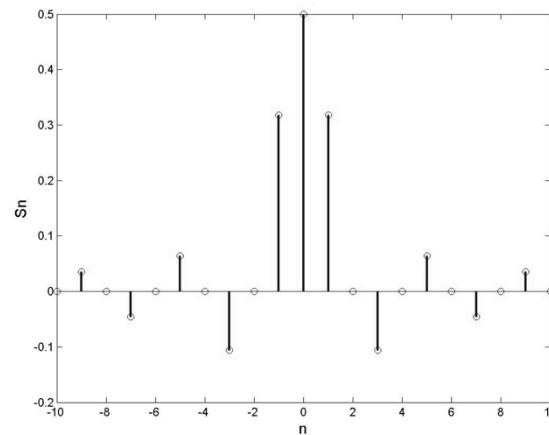
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{+T_0/4} A e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} A \left[\frac{e^{-j2\pi n t / T_0}}{-j2\pi n / T_0} \right]_{-T_0/4}^{+T_0/4} = \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{+j\frac{\pi n}{2}}}{-j2\pi n / T_0} = \\ &= A \frac{-2j \sin(\frac{\pi n}{2})}{-j2\pi n} = A \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{-(-1)^k}{(2k-1)\pi} & n = 2k-1 \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Serie di Fourier

Sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s(t)$ di periodo T_0 e duty cycle $\delta=1/4$



Di seguito vengono mostrati i coefficienti compresi nell'intervallo $[-10:10]$



ANALISI DI FOURIER

Segnali tempo continui:

Segnali aperiodici

- Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier
- Derivazione intuitiva della TCF a partire dallo Sviluppo in Serie di Fourier
- Spettro di ampiezza e fase
- Esempio impulso Rettangolare
- Effetto del Ritardo Temporale

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Un segnale aperiodico si può rappresentare come la sovrapposizione di componenti sinusoidali di ampiezza infinitesima e di frequenza variabile con continuità tra $-\infty$ e $+\infty$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

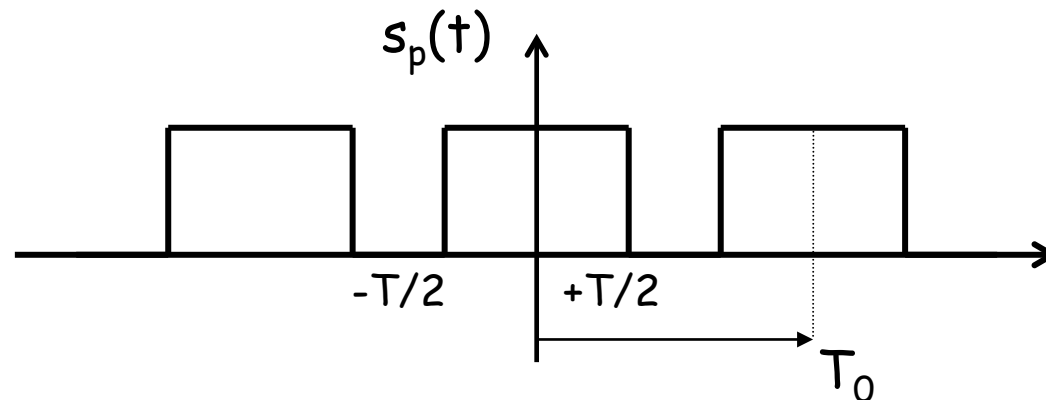
dove

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

È possibile arrivare a dimostrarlo in modo intuitivo andando a vedere come cambia lo spettro di un segnale periodico, quando il periodo viene fatto tendere all'infinito, ovvero viene reso aperiodico.

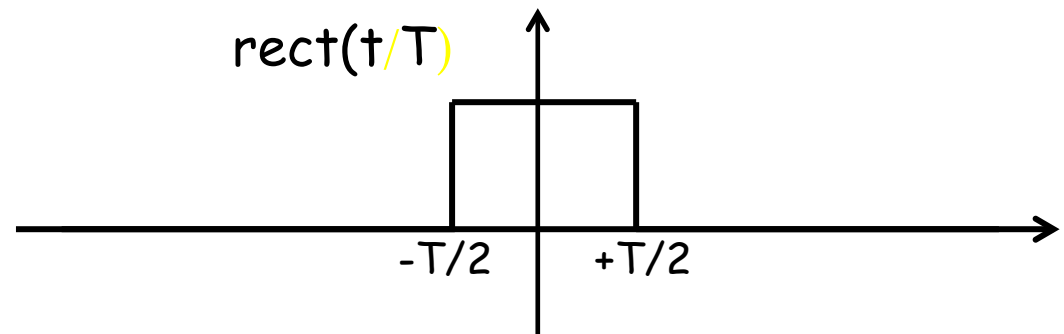
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Consideriamo un treno di impulsi $s_p(t)$



Dove $s_p(t)$ può essere scritto come

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$

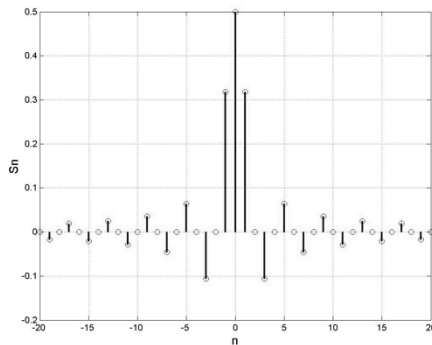


L'impulso centrato in zero può essere pensato come il limite per T_0 che tende a $+\infty$ di $s_p(t)$

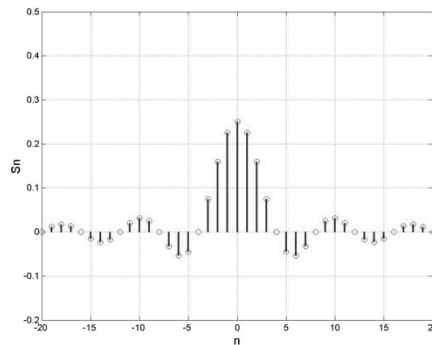
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Visualizziamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari $s_p(t)$ al variare di T_0 a parità di T .

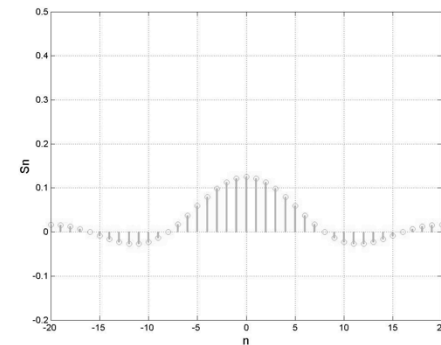
$$T_0 = 2T$$



$$T_0 = 4T$$



$$T_0 = 8T$$



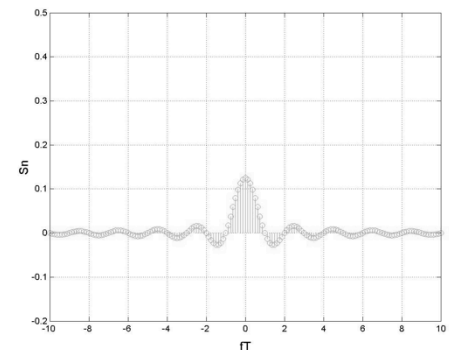
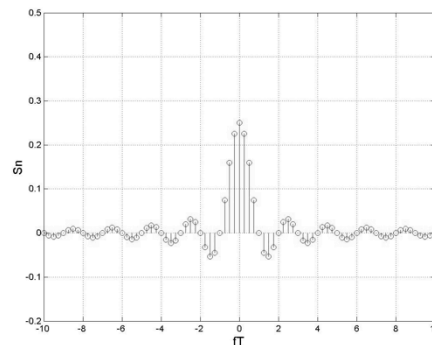
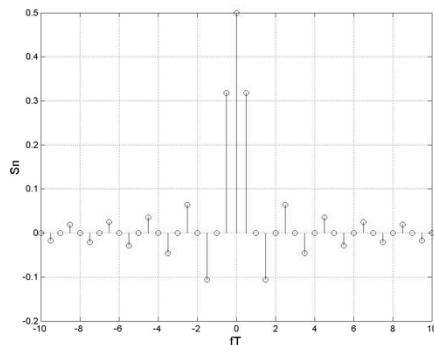
Si nota come l'ampiezza dei coefficienti diminuisce all'aumentare del periodo, come si evince dalla formula dei coefficienti

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s_p(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

I coefficienti sono stati visualizzati rispetto a n : ad ogni n corrisponde la frequenza $f_n = n / T_0$ e quindi, visto che T_0 differisce in ciascun grafico, le frequenze per ogni n sono differenti $T_0 = kT$ con $k=2,4,8$.

È possibile visualizzare lo spettro in funzione di $f = n / T_0 = n / (kT)$. Inoltre, se vogliamo svincolarci dalla particolare scelta di T , possiamo usare la frequenza normalizzata fT .



Dal confronto degli spettri si vede come all' aumentare di T_0 le righe si infittiscano: la differenza tra due valori successivi nei quali sono definiti gli S_n è $\Delta f = (n+1)f_0 - nf_0 = f_0$. Nel limite $T_0 \rightarrow \infty$ questa differenza diventa infinitesima, df , ed è possibile definire una variabile continua $f = nf_0$.

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Il segnale $s_p(t)$ può essere scritto come
$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

È possibile dimostrare gli S_n si possono scrivere come $S_n = f_0 S(nf_0)$, dove $S(f)$ è stata definita precedentemente, e che, al limite di $T_0 \rightarrow \infty$ gli S_n si possono scrivere come $S_n = S(f)df$

A questo punto la sommatoria dello sviluppo in serie di Fourier può essere interpretata come la somma di infinite funzioni oscillanti complesse date da

$$S(f) df e^{j2\pi f t}$$

Queste sono dei fasori di ampiezza infinitesima $|S(f)|df$ e fase pari a $2\pi f t + \theta(f)$ con $\theta(f)$ fase di $S(f)$

Il processo al limite comporta la trasformazione della sommatoria nell'integrale, ottenendo la formula

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Con $S(f)$ si indica la Trasformata Continua di Fourier (TCF) che identifica univocamente il segnale aperiodico $s(t)$

Se si scrive $S(f) = |S(f)|e^{j\theta(f)}$

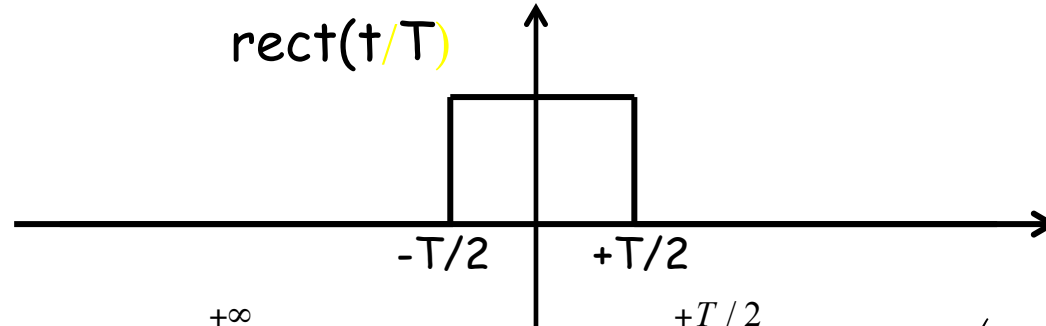
Possiamo definire lo spettro di ampiezza $|S(f)|$ e lo spettro di fase $\theta(f)$

È possibile usare anche la rappresentazione parte reale-parte immaginaria

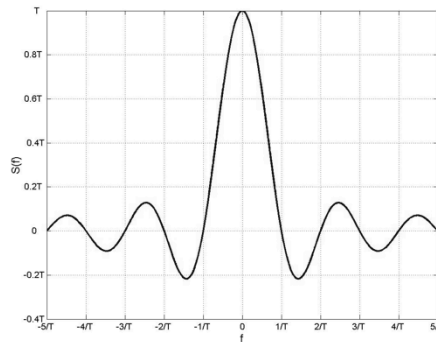
$$S(f) = R(f) + jI(f)$$

Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Come esempio calcoliamo la TCF dell' impulso rettangolare



$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t/T) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left(-\frac{1}{j2\pi f} \right) \left(e^{-j2\pi ft} \right) \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \\ &= \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(fT) \end{aligned}$$

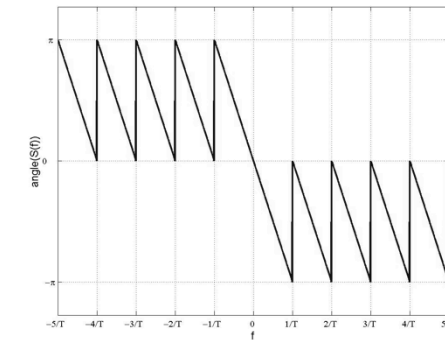
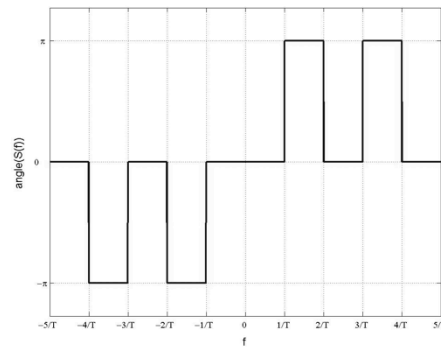
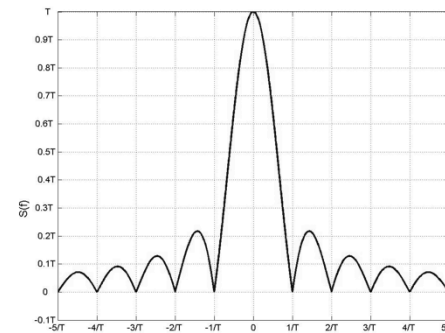
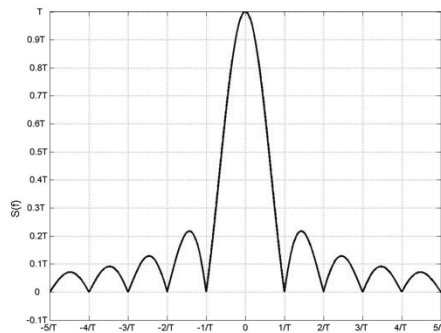


Essendo lo spettro reale è sufficiente un solo grafico per rappresentarlo.

Si deve notare che all' aumentare di T (impulso + lento), la sinc, e quindi il contenuto frequenziale si concentra alle basse frequenze. Sarà maggiore il contenuto alle alte frequenze al diminuire di T (impulso + veloce)

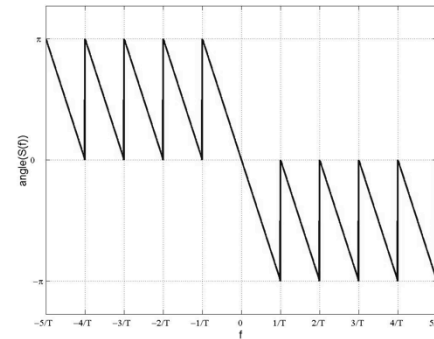
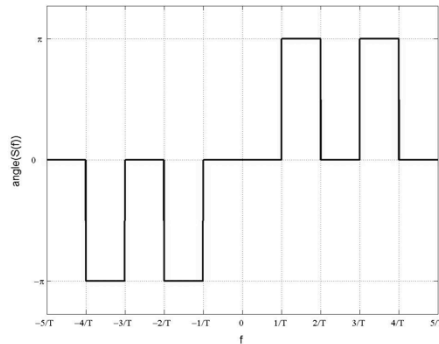
Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Vediamo cosa succede allo spettro se ritardiamo l'impulso ad esempio di $T/2$. Nelle rappresentazioni seguenti vengono mostrati gli spettri di ampiezza e fase delle TCF dell'impulso rettangolare senza ritardo (sinistra) e con ritardo (destra)



Introduzione alla Trasformata Continua di Fourier

Nel caso del impulso centrato attorno all'origine, essendo la TCF reale, la fase può valere $-\pi$, π (numero negativo) o 0 (positivo). Il ritardo dello impulso di $T/2$ equivale ad aggiungere alla fase dello spettro precedente un termine lineare con f pari a $-2\pi fT/2$. La visualizzazione "spezzata" della fase in questo caso è dovuta alla visualizzazione tra $[-\pi:\pi]$.



Si deve ricordare che, nel caso di segnali reali la fase risulta simmetrica rispetto all'origine