COMPITINO 19/1/2017 - FILA A

Es. 1 - Sia dato il filtro analogico causale

$$H_a(s) = \frac{4}{s + \frac{2}{T_0}}$$

1) Si calcolino la risposta in frequenza e la banda a -3dB del filtro H_a con $T_0 > 0$

2) A partire dal suddetto filtro analogico si vuole progettare un filtro numerico passa-basso. A tal fine si utilizza l'invarianza della risposta impulsiva. Supponendo di campionare con un tempo $T = T_0/10$ si scriva la funzione di trasferimento del nuovo filtro e se ne individui la zona di convergenza

3) Si scriva la risposta impulsiva $h(n)$ e si faccia il grafico della forma canonica.

4) Si calcoli la risposta in freq. del filtro numerico e, dopo averne calcolato il valore in $f = 0$ e $\pm 1/2T$, se ne faccia il grafico del modulo.

5) Si applichi ora la trasformazione bilineare con $T_0 = kT$ e $k > 0$. Si scriva la funzione di trasferimento del nuovo filtro, l'espressione del modulo della risposta in frequenza e della banda a 3dB in funzione del parametro k.

---

1) La risposta del filtro analogico si ottiene per $s = j2\pi f$. Da cui

$$\boxed{H_a(f) = \frac{4}{j2\pi f + \frac{2}{T_0}}}$$

Per calcolare la banda a 3dB devo calcolare $|H_e(f)|$.

$$|H_e(f)| = \frac{4}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + 4/T_0^2}} \qquad |H_e(0)| = 2T_0$$

Per $f = B$ si ha $\frac{|H_e(B)|^2}{|H_e(0)|^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(4T_0)^2}{(4\pi^2 f^2 T_0^2 + 4)} \cdot \frac{1}{4T_0^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{1}{\pi T_0}}$$

2) Si ricava facilmente antitrasformando $H_e(s)$ che $h_e(t) = 4e^{-\frac{2t}{T_0}} u(t)$

$$\Rightarrow h(n) = T h_e(nT) \qquad \left(\text{con } h(0) = T h_e(0^+)\right)$$

$$h(n) = 4T\, e^{-\frac{n}{5}} u(n) = 4T\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^n u(n)$$

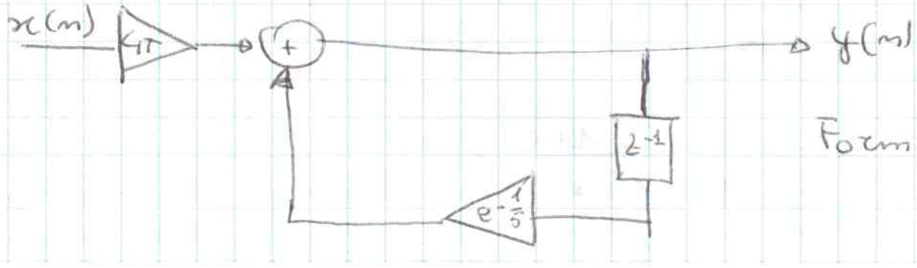
Trasformando si ottiene

$$H(z) = \frac{4T}{1 - e^{-\frac{1}{5}} z^{-1}}$$

Poiché il filtro è causale, la zona di convergenza è $|z| > e^{-\frac{1}{5}}$. (v. note in fondo)

3) Da $H(z)$ si ricava che

$$y(n) = e^{-\frac{1}{5}} y(n-1) + 4T x(n)$$



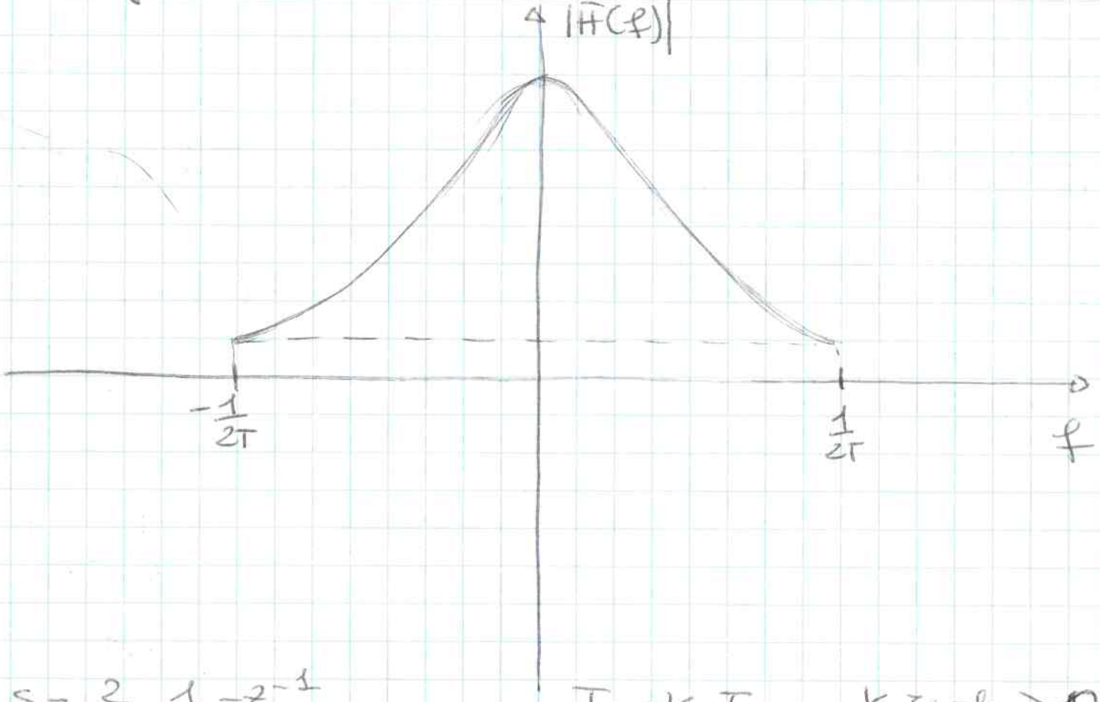
Forma canonica

4) Poiché la circ. di raggio unitario fa parte della zona di convergenza, possiamo calcolare $\overline{H}(f)$ ponendo $z = e^{j2\pi fT}$. Per cui

$$\overline{H}(f) = \frac{4T}{1 - e^{-\frac{1}{5}} e^{-j2\pi fT}}$$

$$|\overline{H}(f)| = \frac{4T}{\sqrt{1 + e^{-\frac{2}{5}} - 2e^{-1/5} \cos 2\pi fT}}$$

$$|\overline{H}(0)| = \frac{4T}{\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)} \qquad \left|\overline{H}\left(\pm\frac{1}{2T}\right)\right| = \frac{4T}{1 + e^{-\frac{1}{5}}}$$



5) $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ $\qquad T_0 = kT \qquad$ k reale > 0

$$H(z) = \frac{4}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \frac{2}{kT}}$$

$$= \frac{4kT\left(1 + z^{-1}\right)}{2k\left(1 - z^{-1}\right) + 2\left(1 + z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{2kT\left(1 + z^{-1}\right)}{k + 1 + (1 - k)z^{-1}}$$

$$H(f) = \frac{2kT\left(1+e^{-j2\pi fT}\right)}{(1+k)+(1-k)e^{-j2\pi fT}}$$

$$|H(f)| = \frac{4kT|\cos\pi fT|}{\sqrt{\left(1+k+(1-k)\cos 2\pi fT\right)^2+(1-k)^2\sin^2 2\pi fT}}$$

$$\boxed{= \frac{4kT|\cos\pi fT|}{\sqrt{2k^2+2+2(1-k^2)\cos 2\pi fT}}}$$

$$|H(0)| = 2kT$$

Si ha dunque per B_a $-3\,dB$

$$\frac{16k^2\cancel{T^2}\cos^2\pi BT}{2k^2+2+2(1-k^2)\cos 2\pi BT}\cdot\frac{1}{4k^2\cancel{T^2}} = \frac{1}{2}$$

$$4\cos^2\pi BT = k^2+1+(1-k^2)\cos 2\pi BT$$

$$2(1+\cos 2\pi BT) = k^2+1+(1-k^2)\cos 2\pi BT$$

$$(1+k^2)\cos 2\pi BT = k^2-1$$

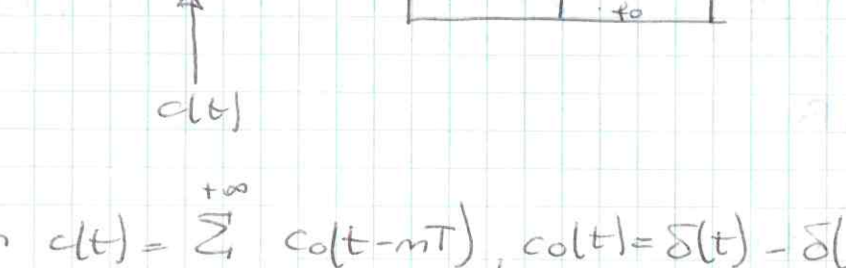
$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2\pi T}\arccos\frac{k^2-1}{k^2+1}}$$

Considerando il warping si sa che $B_a = \frac{1}{\pi T}\,\mathrm{tg}\,\pi BT$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{\pi T}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{k}}$$

Le 2 sol. coincidono

Es. 2 - Il segnale passa-basso $x(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$ viene applicato al sistema in figura



con $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_0(t-nT)$, $c_0(t) = \delta(t) - \delta\left(t-\frac{T}{4}\right)$, $T = 1/B$, $f_0 = 2B$.

1) Si calcoli la trasformata generalizzata di Fourier di $c(t)$ e si determini l'espressione di $Y(f)$.

2) Si calcolino i valori numerici dei coeff. C_k per $k = 0, \pm 1, \pm 2$ e ± 3

3) Si scriva l'espressione temporale del segnale di uscita $z(t)$.

---

1) $$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - kB)$$

$$c_k = \frac{1}{T} c_0\left(\frac{k}{T}\right) = B\, C_0(kB)$$

$$C_0(f) = \mathcal{F}[c_0(t)] = 1 - e^{-j\frac{\pi f T}{2}} = e^{-j\frac{\pi f T}{4}}\, 2j \sin\left(\frac{\pi f T}{4}\right)$$

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad ; \quad c_k = 2jB\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) e^{-j\frac{k\pi}{4}}$$

$$Y(f) = B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2j \sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{k\pi}{4}} \text{rect}\left(\frac{f - kB}{2B}\right)$$

2) $c_0 = \phi$

$$c_1 = B2j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2j\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)B = (1+j)B$$

$$c_{-1} = c_1^* = (1-j)B$$

$$c_2 = B2j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2B$$

$$c_{-2} = c_2^* = 2B$$

$$c_3 = B2j \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) e^{-j\frac{3\pi}{4}} = 2jB\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1-j)B$$

$$c_{-3} = c_3^* = (1+j)B$$

3) Scriviamo $Z(f)$

$$Z(f) = B(1+j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{3}{2}B}{B}\right) + B(1-j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+\frac{3}{2}B}{B}\right)$$

$$+ 2B\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-2B}{2B}\right) + 2B\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+2B}{2B}\right)$$

$$+B(1-j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{5}{2}B}{B}\right) + B(1+j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+\frac{5}{2}B}{B}\right)$$

$$z(t) = 2B^2\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\cos(3\pi Bt) - \sin(3\pi Bt)\right]$$

$$+ 8B^2\,\mathrm{sinc}(2Bt)\cos(4\pi Bt)$$

$$+ 2B^2\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\cos(5\pi Bt) + \sin(5\pi Bt)\right]$$

FILA B ES. 2

Stesso esercizio ma $c_0(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{T}{4}\right)$

$$\Rightarrow C_0(f) = e^{-j\frac{\pi f T}{4}}\, 2\cos\left(\frac{\pi f T}{4}\right)$$

$$C_k = 2B\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)e^{-j\frac{k\pi}{4}}$$

$$C_0 = 2B$$

$$C_1 = (1-j)B \quad C_{-1} = (1+j)B$$

$$C_2 = C_{-2} = 0$$

$$C_3 = (1+j)B \quad C_{-3} = (1-j)B$$

$$Z(f) = B(1-j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{3}{2}B}{B}\right) + B(1+j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+\frac{3}{2}B}{B}\right)$$

$$+B(1+j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{5}{2}B}{B}\right) + B(1-j)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{5}{2}B}{B}\right)$$

$$z(t) = 2B^2\,\mathrm{sinc}(Bt)\left[\cos(3\pi Bt) + \sin(3\pi Bt) + \cos(5\pi Bt) - \sin(5\pi Bt)\right]$$

FILA B - Es 1

$$H_a(s) = \frac{2}{s + 3/T_0}$$

1) $H_a(f) = \dfrac{2}{j2\pi f + \frac{3}{T_0}}$ $\qquad B_{-3} = \dfrac{3}{2\pi T_0}$

2) $h_a(t) = 2e^{-\frac{3t}{T_0}} u(t)$ $\qquad T = T_0/6$

$$h(n) = 2T\, e^{-\frac{n}{2}} u(n) = 2T \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^n u(n)$$

$$H(z) = \frac{2T}{1 - e^{-\frac{1}{2}} z^{-1}} \qquad |z| > e^{-\frac{1}{2}}$$

3) $y(n) = e^{-\frac{1}{2}} y(n-1) + 2T x(n)$

4) $\overline{H}(f) = \dfrac{2T}{1 - e^{-\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f T}}$

$$|\overline{H}(f)| = \frac{2T}{\sqrt{1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}} \cos 2\pi f T}}$$

$$|\overline{H}(0)| = \frac{2T}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \qquad \left|\overline{H}\left(\pm\frac{1}{2T}\right)\right| = \frac{2T}{1 + e^{-\frac{1}{2}}}$$

5) $H(z) = \dfrac{2}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \frac{3}{kT}}$

$$= \frac{2kT(1 + z^{-1})}{3 + 2k + (3 - 2k) z^{-1}}$$

$$H(f) = \frac{2kT(1 + e^{-j2\pi f T})}{3 + 2k + (3 - 2k) e^{-j2\pi f T}}$$

$$|H(f)| = \frac{4kT|\cos(\pi f T)|}{\sqrt{18+8k^2+2(9-4k^2)\cos 2\pi f T}}$$

$$|H(0)| = \frac{2kT}{3}$$

$$B = \frac{1}{2\pi T} \arccos \frac{4k^2-9}{4k^2+9}$$

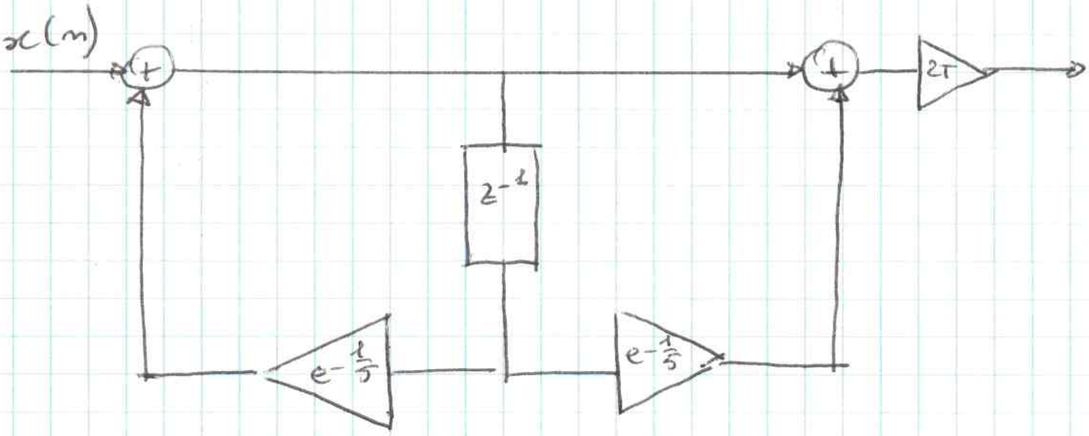
Note all'esercizio 1. Per i pt. 2-3-4 si è supposto che $h(0) = T h_a(0^+)$

Per somiglianza con la trasformata di Fourier si può considerare $h(0) = \frac{T}{2}(h_a(0^+) + h_a(0^-))$

In questo caso $h(0) = 2T$

$$h(n) = 4T e^{-\frac{n}{5}} u(n) - 2T\delta(n)$$

$$H(z) = \frac{4T}{1-e^{-\frac{1}{5}}z^{-1}} - 2T = \frac{2T\left(1+e^{-\frac{1}{5}}z^{-1}\right)}{1-e^{-\frac{1}{5}}z^{-1}}$$



Nuova forma canonica

$$\overline{H}(f) = \frac{2T\left(1+e^{-\frac{1}{5}}e^{-j2\pi f T}\right)}{1-e^{-\frac{1}{5}}e^{-j2\pi f T}}$$

$$|\bar{H}(f)| = \frac{2T\sqrt{1+e^{-\frac{2}{5}}+2e^{-\frac{1}{5}}\cos 2\pi f T}}{\sqrt{1+e^{-\frac{2}{5}}-2e^{-\frac{1}{5}}\cos 2\pi f T}}$$

$$|\bar{H}(0)| = \frac{2T\left(1+e^{-\frac{1}{5}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)}$$

$$\bar{H}\left(\pm\frac{1}{2T}\right) = \frac{2T\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{1}{5}}\right)}$$

Calcoli simili anche per l'es. della fila B