FILA B

Es. 1 - E' dato il sistema puramente ricorsivo caratterizzato dall'equazione alle differenze

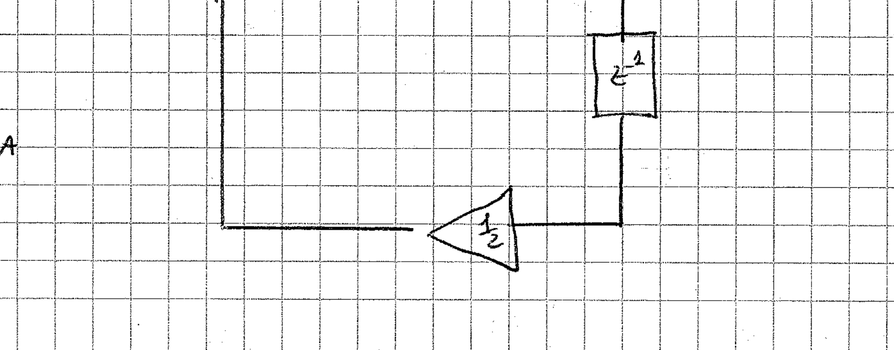
$$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + x(n)$$

1) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema e fare il grafico della forma canonica
2) Scrivere l'espressione della risposta impulsiva causale e la relativa zona di convergenza
3) Fare il grafico della risposta in frequenza del sistema e dire di che tipo è il sistema in esame
4) Scrivere la risposta del sistema alla sequenza $x(n) = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema

$$Y(z) = \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$



FORMA CANONICA

2) Risposta impulsiva causale

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

3) Poiché la circonferenza di raggio unitario fa parte della zona di convergenza possiamo calcolare $\overline{H}(f)$ ponendo $z = e^{j2\pi f T}$

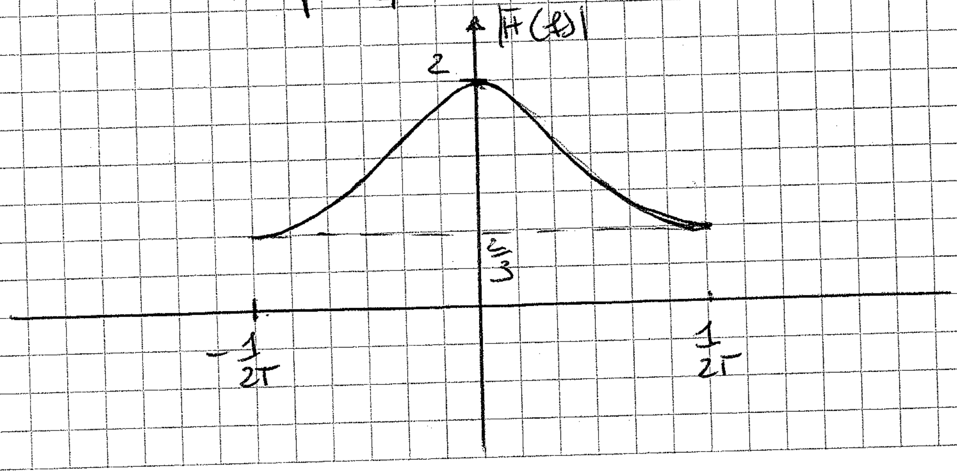
$$\overline{H}(f) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi f T}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos 2\pi f T + \frac{1}{2} j \sin 2\pi f T}$$

Calcoliamo il modulo

$$|\overline{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\pi f T\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 2\pi f T}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\pi f T}}$$



$|\overline{H}(0)| = 2$ $\qquad$ $|\overline{H}(\pm\frac{1}{2T})| = \frac{2}{3}$

Il sistema è un passa-basso.

4) $X(z) = \frac{1}{4} \frac{z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}$

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{4} \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}$$

Espansione in fratti parziali

$$Y(z) = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{1}{4}} + \frac{C}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$A = \frac{1}{4} \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2} \Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = 1$$

$$C = \frac{1}{4} \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{16}$$

Per calcolare B poniamo $z=0$

$$0 = -2 - 1 - 4B \implies B = -\frac{3}{4}$$

Di conseguenza

$$Y(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \frac{1}{z-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \frac{1/4}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}$$

Antitrasformiamo

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$
$$- \frac{1}{4} (n-1) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{4} (n+2) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Es.2 - Il segnale passa-basso $x(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$ viene campionato con il segnale $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_0(t - nT)$ con $c_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ e $\tau \ll T$, $T = 1/2B$

Il segnale campionato $y(t) = x(t)\,c(t)$ viene filtrato con il passa-banda

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f-2B}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+2B}{2B}\right)$$

1) Scrivere l'espressione dello spettro del segnale $y(t)$ e farne il grafico

2) Scrivere l'espressione temporale del segnale $z(t)$ all'uscita del filtro.

$$Y(f) = X(f) \otimes C(f)$$

dove $C(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_0\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

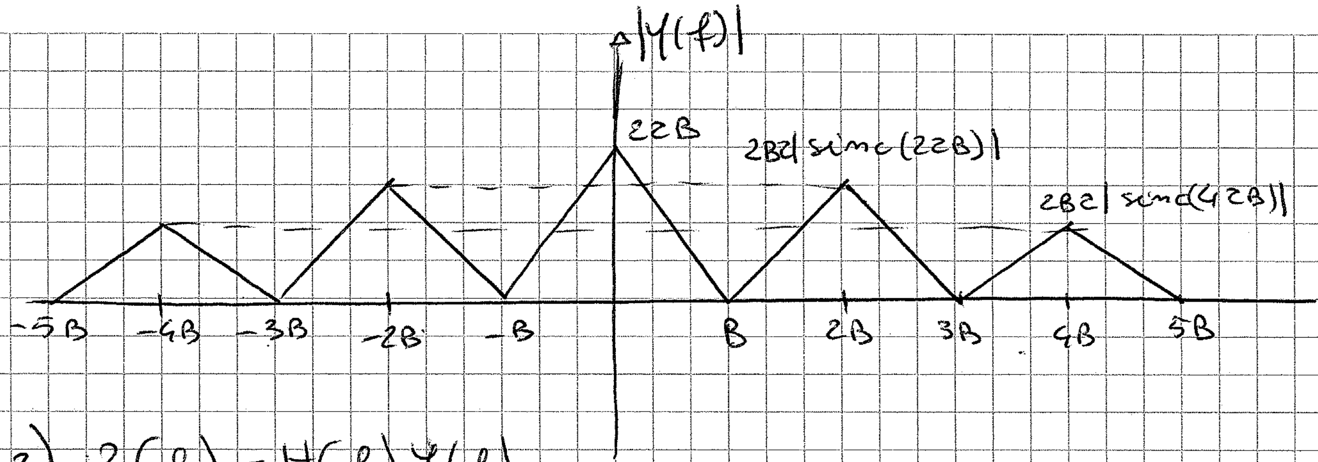
$$C_0(f) = \mathcal{F}[c_0(t)] = \tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

$$C(f) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(2k\tau B)\,\delta(f - 2kB)$$

Da cui

$$Y(f) = 2\tau B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(2k\tau B)\,X(f - 2kB)$$

Poiché si rispetta la condizione di Nyquist, non si verifica aliasing.



2) $Z(f) = H(f)\,Y(f)$

Il filtro passa banda seleziona le repliche centrate in $\pm 2B$, cioè

$$Z(f) = 2B\tau \,\mathrm{sinc}(2B\tau)\left[X(f-2B) + X(f+2B)\right]$$

$$z(t) = 2B\tau\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\left[x(t)\,e^{j2\pi 2Bt} + x(t)\,e^{-j2\pi 2Bt}\right]$$

$$= 4B\tau\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\,x(t)\cos(4\pi Bt)$$