COMPITINO 20/12/2016

FILA A

Es. 1 – Un sistema lineare tempo-invariante discreto è caratterizzato dalla seguente equaz. alle differenze:

$$y(n) - \frac{3}{5}y(n-1) + \frac{1}{20}y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

1) Scrivere la funzione di trasferimento del sistema e fare il grafico della ~~funzione~~ canonica

2) Scrivere l'espressione della funzione impulsiva causale e la relativa zona di convergenza

3) Scrivere l'espressione della risposta del sistema alla sequenza $x(n) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

---

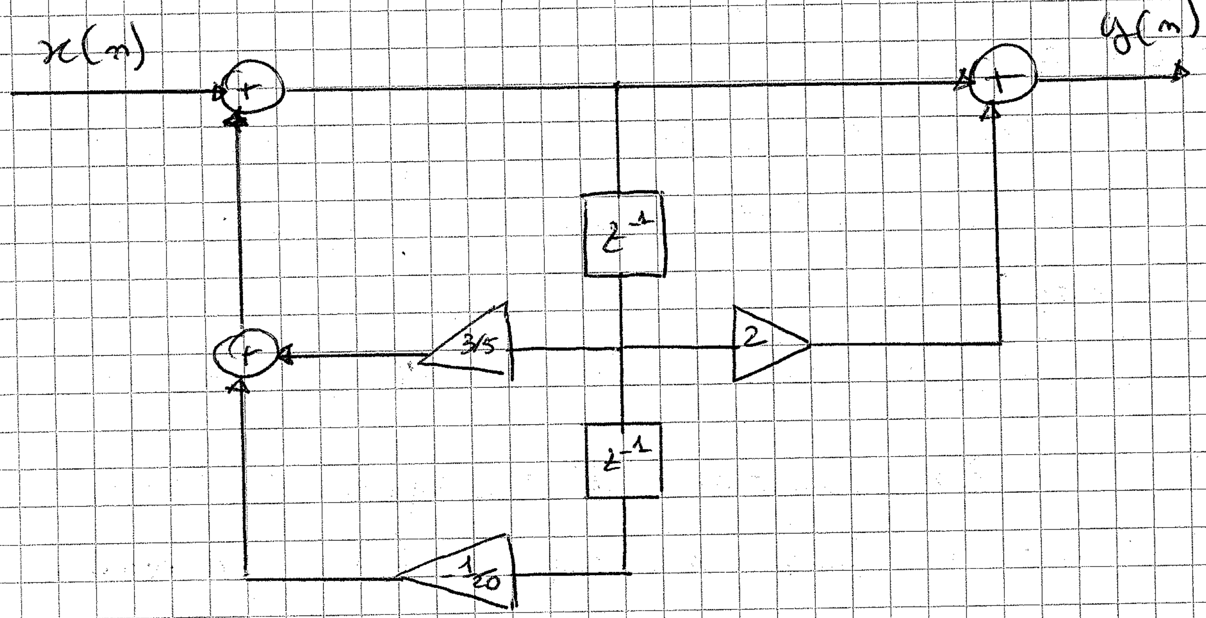
1) $$Y(z) - \frac{3}{5}Y(z-1) + \frac{1}{20}Y(z-2) = X(z) + 2$$

$$Y(z) - \frac{3}{5}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{20}z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{1}{20}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + 2z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{1}{20}z^{-2}}$$

Facciamo il grafico della forma canonica



2) La $H(z)$ si può scrivere anche come

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{z^2 - \frac{3}{5}z + \frac{1}{20}} = \frac{z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{10}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Frazione impropria perché $N = M$

Scomponiamo allora $\frac{H(z)}{z}$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{10}} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{2}}$$

dove $A_1 = \left.\frac{z+2}{z-\frac{1}{2}}\right|_{z=\frac{1}{10}} = -\frac{21}{4}$

$$A_2 = \left.\frac{z+2}{z-\frac{1}{10}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{25}{4}$$

Si può quindi scrivere:

$$H(z) = -\frac{21}{4}\frac{z}{z-\frac{1}{10}} + \frac{25}{4}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$h(n) = -\frac{21}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^n u(n) + \frac{25}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

↑ sequenza causale

Poiché i poli sono $z_1 = \frac{1}{2}$ e $z_2 = \frac{1}{10}$, la zona di convergenza della sequenza causale è $|z| > \frac{1}{2}$.

3) $Y(z) = H(z) X(z)$

$$= \frac{z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{10}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{5z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

Espansione in fratti parziali

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-\frac{1}{10}} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{A_3}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \left.\frac{5z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=\frac{1}{10}} = \frac{35}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{5z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{10}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = +\frac{125}{2}$$

$$A_3 = \left.\frac{5z(z+2)}{\left(z-\frac{1}{10}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=\frac{1}{4}} = -75$$

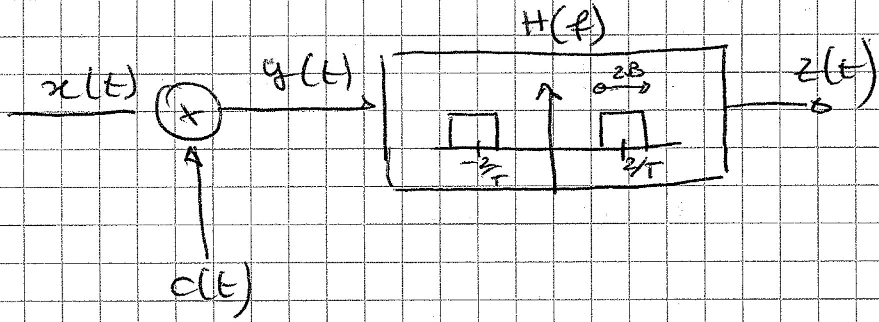
Dunque

$$Y(z) = \frac{35}{2}\,\frac{z}{z-\frac{1}{10}} + \frac{125}{2}\,\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 75\,\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$h(n) = \frac{35}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n u(n) + \frac{125}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$- 75\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Es. 2 Il segnale passa-basso $x(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$ viene applicato al sistema in figura



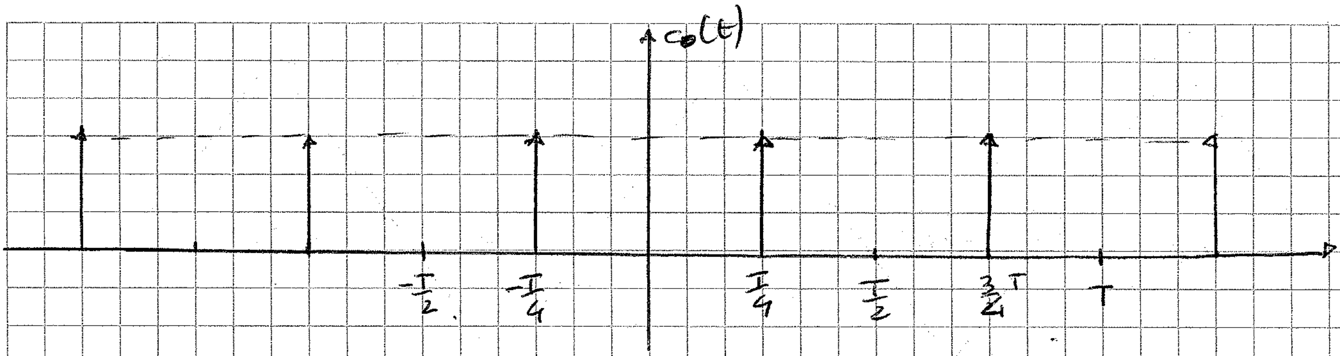
con $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_0(t-nT)$, $c_0(t) = \delta\left(t+\frac{T}{4}\right)+\delta\left(t-\frac{T}{4}\right)$

e $T = 1/B$

1) Si determini $Y(f)$ e se ne faccia il grafico

2) Si scriva l'espressione temporale del segnale di uscita $z(t)$.

Facciamo il grafico di $c(t)$



Dal grafico si vede che

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{T}{4} - n\frac{T}{2}\right)$$

L'intervallo di campionamento è dunque $T_c = \frac{T}{2}$

e $f_c = \frac{2}{T} = 2B$.

$$C(f) = \left[\frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c)\right] e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(f - kf_c)$$

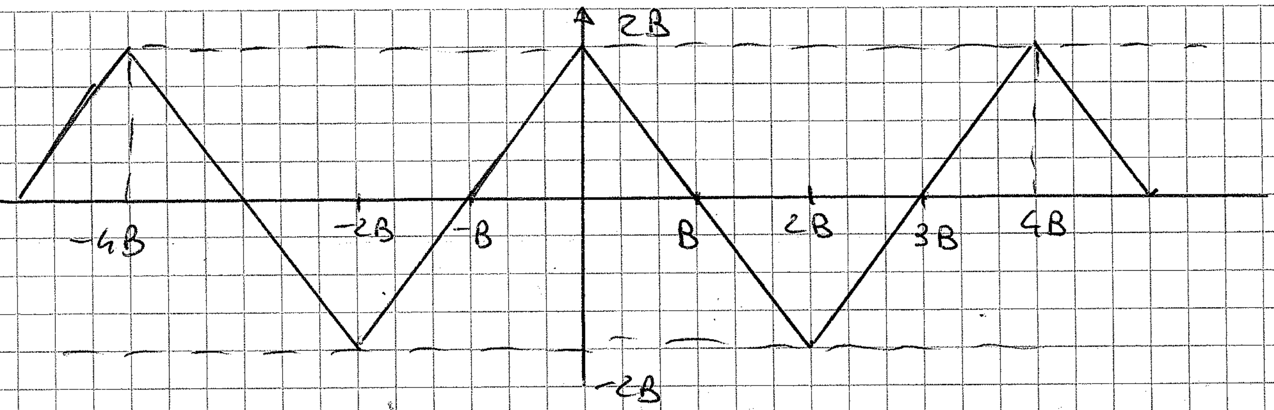
$$Y(f) = X(f) \otimes C(f)$$

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$Y(f) = 2B\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \, X(f - 2kB)$$

Non c'è aliasing e le repliche non si sovrappongono.

Facciamo il grafico di $Y(f)$



2) Il filtro passo-banda seleziona le 2 repliche a $\pm 2B$ quindi

$$Z(f) = -2B\left[\cancel{X}(f-2B) + X(f+2B)\right]$$

da cui

$$\cancel{z}(t) = -2B\left[x(t)e^{j2\pi 2Bt} + x(t)e^{-j2\pi 2Bt}\right]$$

$$= -4B\,x(t)\cos(4\pi Bt)$$