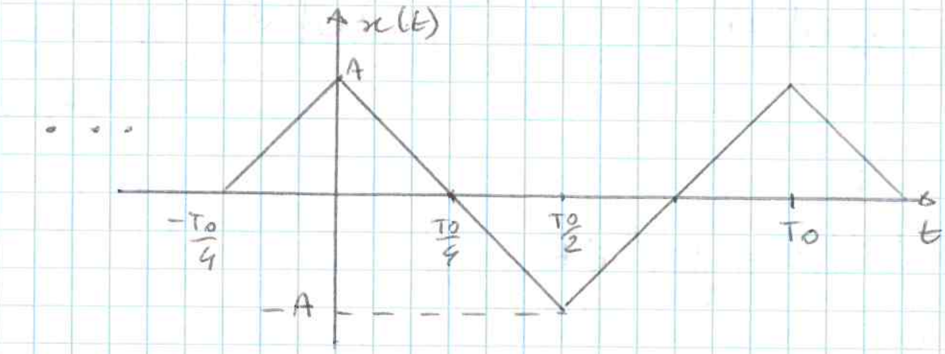
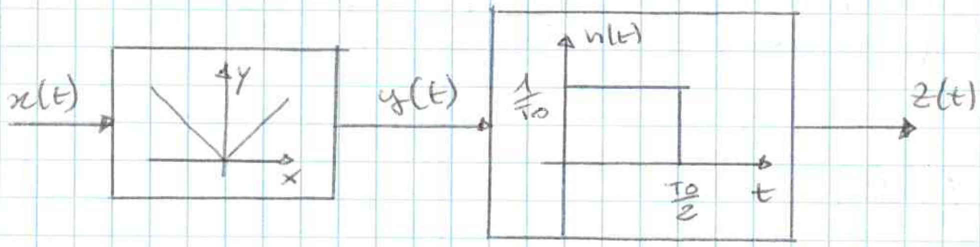
COMPITO 20/02/2017 FILA A

Es. 1 - Il segnale periodico di figura 1 costituisce l'ingresso del sistema di fig. 2 in cui la non-linearità iniziale è costituita da $y=|x|$.



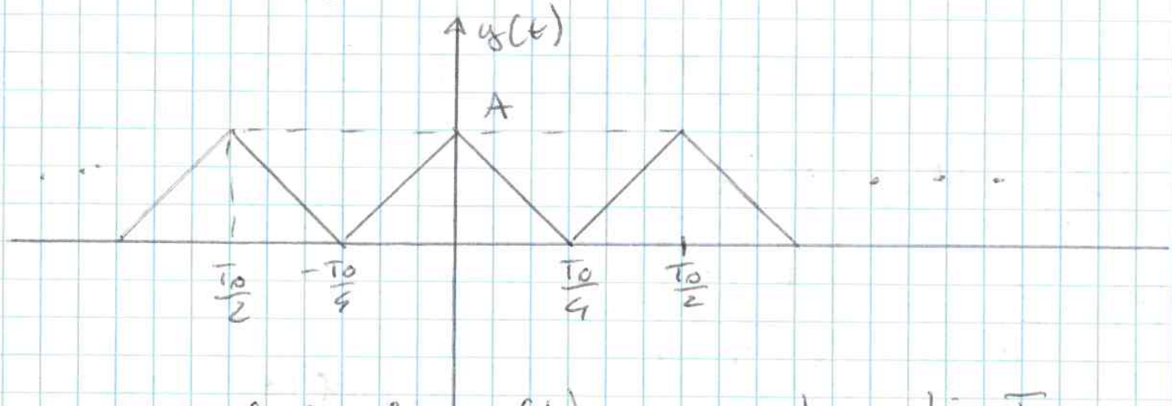


1) Calcolare la potenza di $y(t)$ e la sua trasf. serie.

2) Calcolare la trasformata del segnale $z(t)$ e farne il grafico.

---

1) Disegniamo $y(t) = |x(t)|$



Il nuovo segnale $y(t)$ è periodico di $T = \frac{T_0}{2}$

$$y(t) = \underset{T}{\text{rep}}\ y_0(t)$$

$$y_0(t) = A\left(1 - \frac{4|t|}{T_0}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$$

$$P_Y = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2 dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2 dt$$ poiché il segnale è pari

$$P_Y = 2 \cdot \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{4}} A^2\left(1 - \frac{4t}{T_0}\right)^2 dt$$

$$= \frac{4A^2}{T_0}\left(t + \frac{16}{3}\frac{t^3}{T_0^2} - \frac{4t^2}{T_0}\right)\Bigg|_0^{\frac{T_0}{4}} = \frac{A^2}{3}$$

$$Y_k = \frac{1}{T} Y_0\left(\frac{k}{T}\right)$$

$$Y_0(f) = A\frac{T_0}{4}\,\text{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Y_k = \frac{2}{T_0} Y_0\left(\frac{2k}{T_0}\right) = \frac{A}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

Scriviamo le trasformate generalizzate

$$Y(f) = \frac{A}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(f - \frac{2k}{T_0}\right)$$

2) Calcoliamo $Z(f)$

$$Z(f) = Y(f)\,H(f)$$

$$h(t) = \frac{1}{T_0}\,\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{4}}{T_0/2}\right)$$

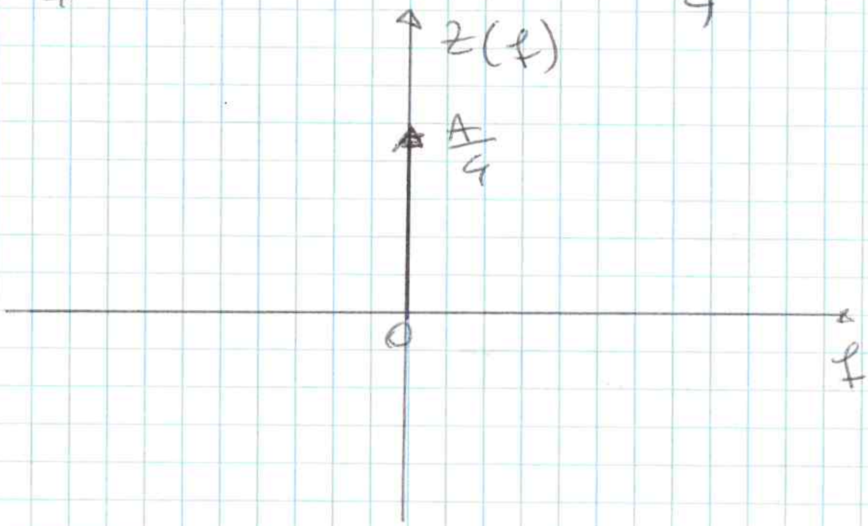
$$H(f) = \frac{1}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{2}\,\text{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j\pi f\frac{T_0}{2}}$$

$$Z(f) = \frac{A}{4}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(f-\frac{2k}{T_0}\right)\right]\text{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right)e^{-j\pi}$$

$$= \frac{A}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\text{sinc}(k)\,e^{-jk\pi}\,\delta\left(f-\frac{2k}{T_0}\right)$$

$\text{sinc}(k) = 0 \quad \forall k \neq 0$ quindi

$$Z(f) = \frac{A}{4}\delta(f) \quad \Rightarrow \quad z(t) = \frac{A}{4}$$



Es. 2 – Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un sistema discreto

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}\right)}$$

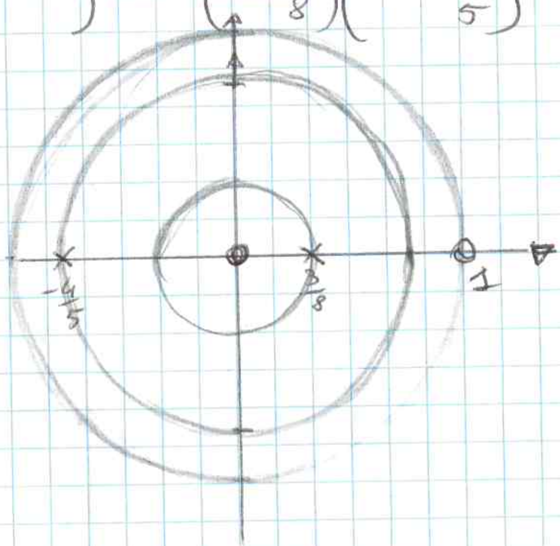
1) Si determinino e si grafichino poli e zeri del sistema
2) Si determinino tutte le possibili risposte all'impulso associabili alla funzione di trasferimento $H(z)$ data specificando, per ognuna di esse, le regioni di convergenza.
3) Si consideri ora il sistema causale e se ne calcoli

la risposta all'ingresso $x(n) = \delta(n) + \frac{4}{5}\delta(n-1)$

1) $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{4}{5}z^{-1}\right)} = \frac{z(z-1)}{\left(z - \frac{3}{8}\right)\left(z + \frac{4}{5}\right)}$

$z_0 = 0$ e 1

$z_{p_1} = \frac{3}{8}$ $\quad z_{p_2} = -\frac{4}{5}$



$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z - \frac{3}{8}} + \frac{A_2}{z + \frac{4}{5}}$

$A_1 = \left.\frac{z-1}{z+\frac{4}{5}}\right|_{z=\frac{3}{8}} = -\frac{25}{47}$

$A_2 = \left.\frac{z-1}{z-\frac{3}{8}}\right|_{z=-\frac{4}{5}} = \frac{72}{47}$

$\Rightarrow H(z) = -\frac{25}{47}\frac{z}{z-\frac{3}{8}} + \frac{72}{47}\frac{z}{z+\frac{4}{5}}$

2) $|z| > \frac{4}{5}$ $\quad$ SISTEMA CAUSALE

$h(n) = -\frac{25}{47}\left(\frac{3}{8}\right)^n u(n) + \frac{72}{47}\left(-\frac{4}{5}\right)^n u(n)$

$\frac{3}{8} < |z| < \frac{4}{5}$ $\quad h(n) = -\frac{25}{47}\left(\frac{3}{8}\right)^n u(n) - \frac{72}{47}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} u(-n-1)$

$|z| < \frac{3}{8}$ $\quad h(n) = \frac{25}{47}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} u(-n-1) - \frac{72}{47}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} u(-n-1)$

3) $x(n) = \delta(n) + \frac{4}{5}\delta(n-1)$

$$X(z) = 1 + \frac{4}{5} z^{-1}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{(1-z^{-1})\cancel{\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}\right)}}{\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)\cancel{\left(1+\frac{4}{5}z^{-1}\right)}} = \frac{z-1}{z-\frac{3}{8}}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-\frac{3}{8}} - \frac{1}{z-\frac{3}{8}}$$

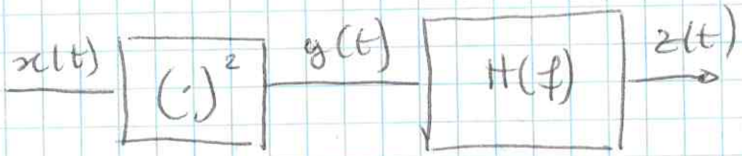
SISTEMA CAUSALE

$$y(n) = \left(\frac{3}{8}\right)^n u(n) - \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ -\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} u(n-1) & \end{cases}$$

COMPITO 20/02/17 FILA B

Es. 1 - Il segnale periodico $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k x_0(t-kT)$, con $x_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, costituisce l'ingresso di fig. 1 in cui la non-linearità è costituita da $y = x^2$ e $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{fT}{9}\right)$



1) Calcolare la potenza di $y(t)$ e la sua trasfor. serie.

2) Fare il grafico di $Z(f)$ e scrivere l'espressione del segnale $z(t)$.

---

1) Poiché le repliche del segnale $x(t)$ non si sovrappongono, ~~tz~~ il segnale $y(t)$ è dato da

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_0(t-kT) \quad \text{con} \quad y_0(t) = e^{-\frac{2t}{T}} \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$P_Y = \frac{1}{T}\int_0^T |y(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{4t}{T}} dt = \frac{(1-e^{-4})}{4}$$

$$Y_k = \frac{1}{T} Y_0\left(\frac{k}{T}\right)$$

$$Y_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_0^T e^{-t\left(\frac{2}{T} + j2\pi f\right)} dt = \frac{1 - e^{-2} e^{-j2\pi f T}}{\frac{2}{T} + j2\pi f}$$

$$Y_k = \frac{1}{T} Y_0\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-2} e^{-j 2\pi \frac{k}{T} T}}{\frac{2}{T} + j 2\pi \frac{k}{T}}$$

poiché $e^{-j2\pi k} = 0$

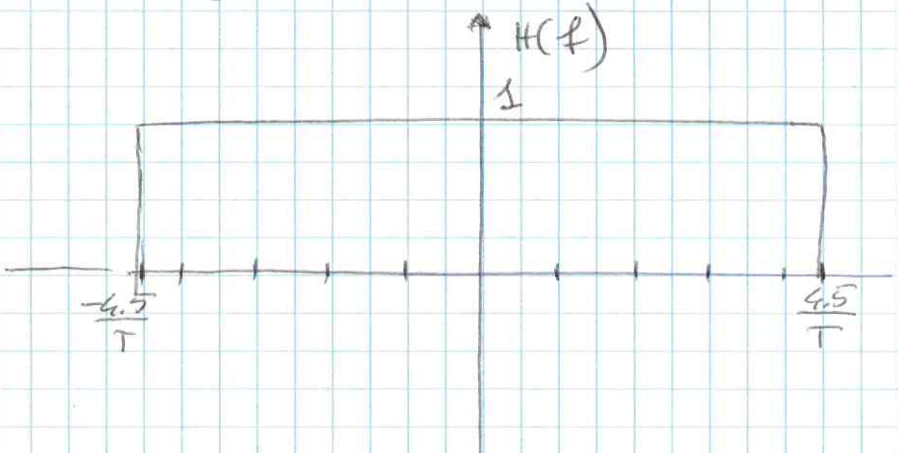
$$\Rightarrow \quad Y_k = \frac{1 - e^{-2}}{2 + j2\pi k}$$

La Trasformata generalizzata di Fourier è data da:

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-2}}{2 + j2\pi k} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

2) Fare il grafico di $Z(f)$ e scrivere l'espressione del segnale $z(t)$

Faccio il grafico di $H(f) = rect\left(\frac{fT}{9}\right)$



Dunque le repliche che passano dal filtro sono quelle centrate in 0, $\pm 1/T$, $\pm 2/T$, $\pm 3/T$ e $\pm 4/T$

$$Z(f) = \sum_{k=-4}^{4} \frac{1 - e^{-2}}{2 + j2\pi k} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Esplicitando:

$$z(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1-e^{-2}}{2+j2\pi}\delta\left(f-\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{2-j2\pi}\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)$$

$$+ \frac{1-e^{-2}}{2+j4\pi}\delta\left(f-\frac{2}{T}\right) + \frac{1-e^{-2}}{2-j4\pi}\delta\left(f+\frac{2}{T}\right)$$

$$+ \frac{1-e^{-2}}{2+j6\pi}\delta\left(f-\frac{3}{T}\right) + \frac{1-e^{-2}}{2-j6\pi}\delta\left(f+\frac{3}{T}\right)$$

$$+ \frac{1-e^{-2}}{2+j8\pi}\delta\left(f-\frac{4}{T}\right) + \frac{1-e^{-2}}{2-j8\pi}\delta\left(f+\frac{4}{T}\right)$$

Osserviamo che $|Y_k| = |Y_{-k}| = \frac{1}{\sqrt{4+4k^2\pi^2}}$

$$\angle Y_k = -\angle Y_{-k} = -\text{arctg}\, k\pi$$

Da cui

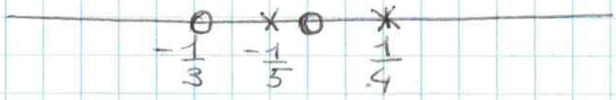
$$z(t) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1-e^{-2}}{\sqrt{4+4k^2\pi^2}} \cos\left(2\pi\frac{k}{T}t - \text{arctg}\, k\pi\right) + \frac{1-e^{-2}}{2}$$

Es. 2 - Si consideri il seguente sistema LTI discreto causale:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{5} z^{-1}\right)}$$

1) Si determinino la zona di convergenza e l'equaz. alle differenze del sistema;
2) Si scriva l'espressione della risposta impulsiva e si faccia il grafico della forma canonica;
3) Si calcolino i primi 10 valori della risposta $y(n)$ del sistema all'ingresso $x(n) = 0.5^n [u(n) - u(n-3)]$

$$H(z) = \frac{z\left(z + \frac{1}{3}\right)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{1}{5}\right)}$$



Zeri 0 e $-1/3$

Poli $1/4$ e $-1/5$

$H(z)$ causale $|z| > 1/4$

Calcoliamo la zona d

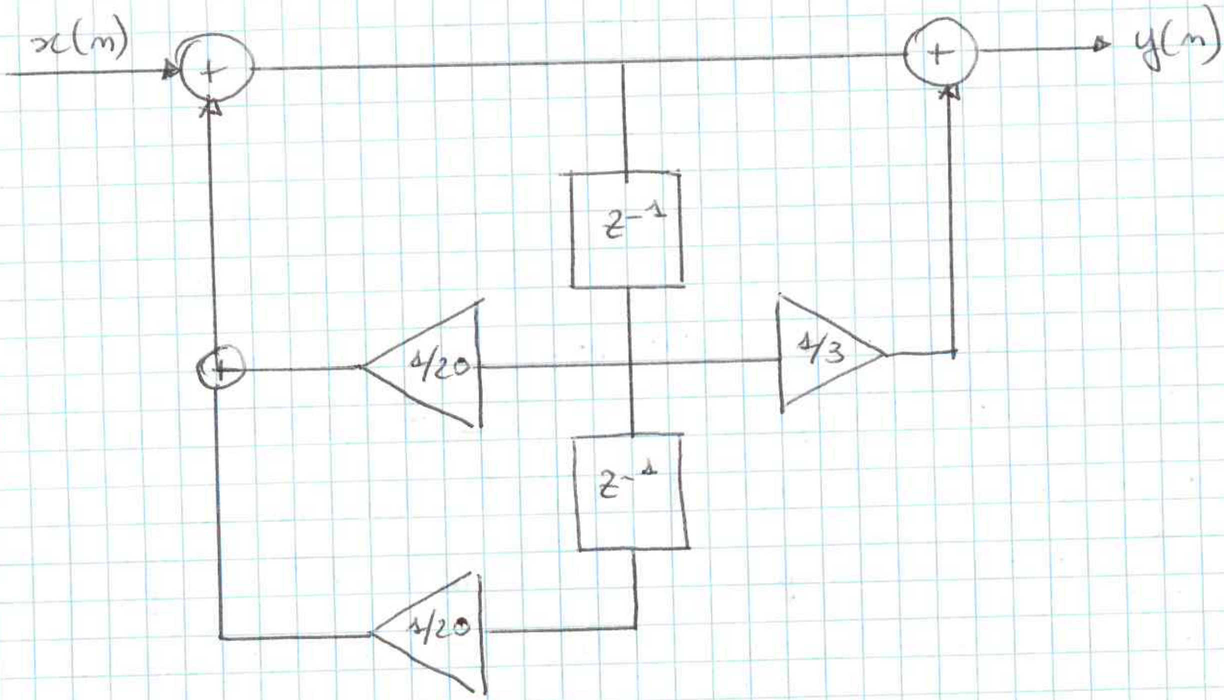
$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{5} z^{-1}\right) = X(z)\left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right)$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{20} z^{-1} - \frac{1}{20} z^{-2}\right] = X(z)\left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right)$$

$$y(n) - \frac{1}{20} y(n-1) - \frac{1}{20} y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3} x(n-1)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{20} y(n-1) + \frac{1}{20} y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3} x(n-1)$$

2) Facciamo il grafico della forma canonica



Calcoliamo h(n) causale

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{A_2}{z+\frac{1}{5}}$$

$$A_1 = \left.\frac{z+1/3}{z+1/5}\right|_{z=1/4} = \frac{35}{27}$$

$$A_2 = \left.\frac{z+1/3}{z-\frac{1}{4}}\right|_{z=-\frac{1}{5}} = -\frac{8}{27}$$

$$h(n) = \frac{35}{27}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{8}{27}\left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

3) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u(n) - u(n-3)\right] =$

$$= \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$$

$y(n) = h(n) \otimes x(n)$

$$y(n) = h(n) + \frac{1}{2} h(n-1) + \frac{1}{4} h(n-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = h(0) = 1 \\ y(1) = h(1) + \frac{1}{2} h(0) \\ y(2) = h(2) + \frac{1}{2} h(1) + \frac{1}{4} h(0) \\ \vdots \\ y(9) = h(9) + \frac{1}{2} h(8) + \frac{1}{4} h(7) \end{cases}$$