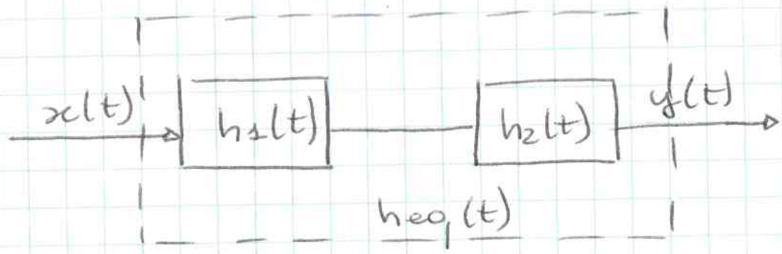
COMPITO 19/04/2017 - FILA A

ES. 1 - Siano dati 2 sistemi LTI in serie.
Il primo è caratterizzato da una risposta impulsiva $h_1(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$, il secondo da
$h_2(t) = rect\left(\frac{t+1}{2}\right) - rect\left(\frac{t-1}{2}\right) + \delta(t-3)$.

1) si calcolino la risposta in freq. $H_{eq}(f)$ e la risposta impulsiva $h_{eq}(t)$ equivalenti dell'intero sistema.
2) Si faccia il grafico di $h_{eq}(t)$.
3) Si calcoli l'uscita del sistema corrispondente al segnale di ingresso $x(t) = 3\cos(2\pi t + \theta_0) + 4\sin(12\pi t)$

---

1)



$h_{eq}(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$, da cui

$$H_{eq}(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

$$H_1(f) = \mathcal{F}[h_1(t)] = 2\,\text{sinc}(2f)\,e^{-j2\pi f}$$

$$H_2(f) = \mathcal{F}[h_2(t)] = 2\,\text{sinc}(2f)\,e^{j2\pi f} - 2\,\text{sinc}(2f)\,e^{-j2\pi f} + e^{-j6\pi f}$$

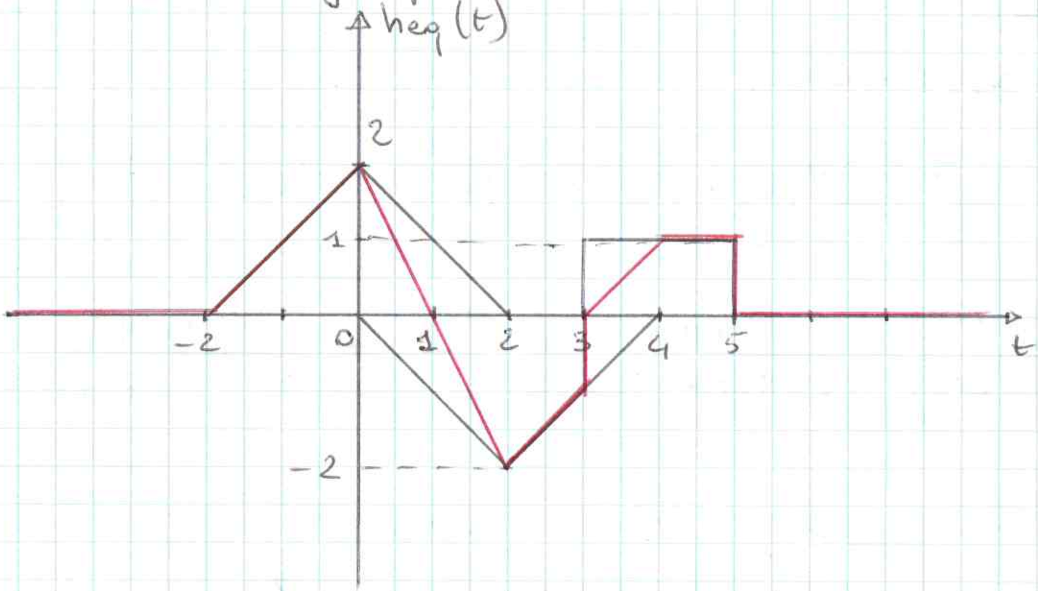
$$H_{eq}(f) = 4\,\text{sinc}^2(2f) - 4\,\text{sinc}^2(2f)\,e^{-j4\pi f} + 2\,\text{sinc}(2f)\,e^{-j8\pi f}$$

Per ricavare $h_{eq}(t)$ antitrasformiamo:

$$h_{eq}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[H_{eq}(f)\right] =$$

$$= 2\,tr\left(\frac{t}{4}\right) - 2\,tr\left(\frac{t-2}{4}\right) + rect\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

2) Facciamo il grafico



3) $x(t) = 3\cos(2\pi t + \theta_0) + 4\sin(12\pi t)$

$f_0 = 1\,Hz$ $\quad f_1 = 6\,Hz$

È noto che:

$$y(t) = 3|H(1)|\cos(2\pi t + \theta_0 + \angle H(1))$$
$$+ 4|H(6)|\sin(12\pi t + \angle H(6))$$

Dobbiamo calcolare $H(1)$ e $H(6)$. Poichè $sinc(2f)$ è nullo sia per f_0 che per f_1, $y(t) = 0$.

Es. 2 - Sia data la seguente equaz. alle differenze:

$$y(n) - 0.7\,y(n-1) + 0.1\,y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

1) Si trovino la risposta impulsiva e la risposta in frequenza del sistema causale.

2) Si trovi la risposta al gradino unitario $u(n)$.

---

1) Trasformiamo:

$$Y(z) - 0.7\,z^{-1}Y(z) + 0.1\,z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z-1)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1\,z^{-2}} = \frac{z(z+1)}{z^2-0.7z+0.1}$$

Troviamo i poli. $z^2 - 0.7z + 0.1 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{0.7 \pm \sqrt{0.7^2 - 0.4}}{2} \begin{cases} 0.2 \\ 0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.2)(z-0.5)}$$ Frazione impropria

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z-0.2} + \frac{B}{z-0.5}$$

$$A = \left.\frac{z+1}{z-0.5}\right|_{z=0.2} = -4$$

$$B = \left.\frac{z+1}{z-0.2}\right|_{z=0.5} = \frac{1.5}{0.3} = 5$$

$$H(z) = -\frac{4z}{z-0.2} + \frac{5z}{z-0.5}$$

Antitrasformiamo per ricavare $h(n)$ (il sistema è causale)

$$\boxed{h(n) = -4(0.2)^n u(n) + 5(0.5)^n u(n)}$$

2) $U(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-0.2)(z-0.5)(z-1)}$$ Frazione impropria

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-0.2} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{C}{z-1}$$

$$A = \left.\frac{z(z+1)}{(z-0.5)(z-1)}\right|_{z=0.2} = 1$$

$$B = \left.\frac{z(z+1)}{(z-0.2)(z-1)}\right|_{z=0.5} = -5$$

$$C = \left.\frac{z(z+1)}{(z-0.2)(z-0.5)}\right|_{z=1} = 5$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z-0.2} - \frac{5z}{z-0.5} + \frac{5z}{z-1}$$

Antitrasformiamo (sequenza causale)

$$\boxed{y(n) = (0.2)^n u(n) - 5(0.5)^n u(n) + 5u(n)}$$

Risposta in frequenza del sistema

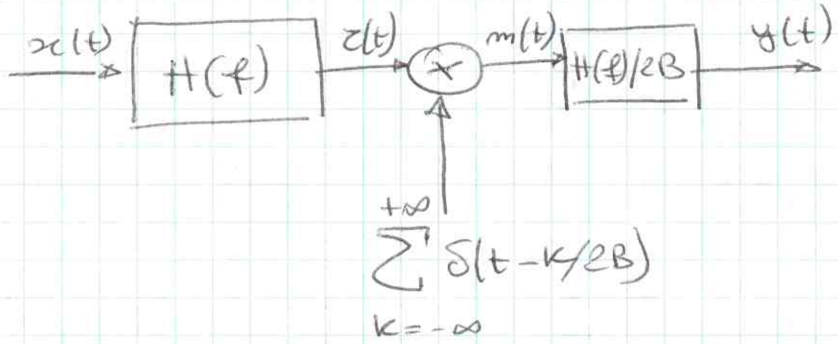
Il sistema converge per $|z| > 0.5$

la circonferenza di raggio unitario fa parte della zona di convergenza. Dunque $\bar{H}(f) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi fT}}$

$$\bar{H}(f) = \frac{e^{j2\pi fT}\left(e^{j2\pi fT}+1\right)}{\left(e^{j2\pi fT}-0.2\right)\left(e^{j2\pi fT}-0.5\right)}$$

File B

Es. 1 - Sia dato il segnale $x(t) = 3e^{-3t}u(t)$ all'ingresso del sistema della figura seguente,



dove $H(f)$ è un filtro ideale passa-basso di banda B.

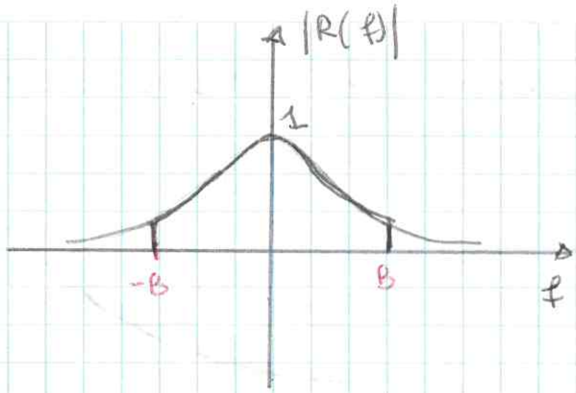
1) Si calcoli e si disegni il modulo dello spettro del segnale dopo il campionatore.

2) Si calcoli l'energia del segnale $z(t) = y(t) - z(t)$.

1) $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ $\quad X(f) = \frac{3}{3+j2\pi f}$

$$R(f) = X(f)H(f) = \frac{3}{3+j2\pi f}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$|R(f)| = \frac{3}{\sqrt{9+4\pi^2 f^2}} \; \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



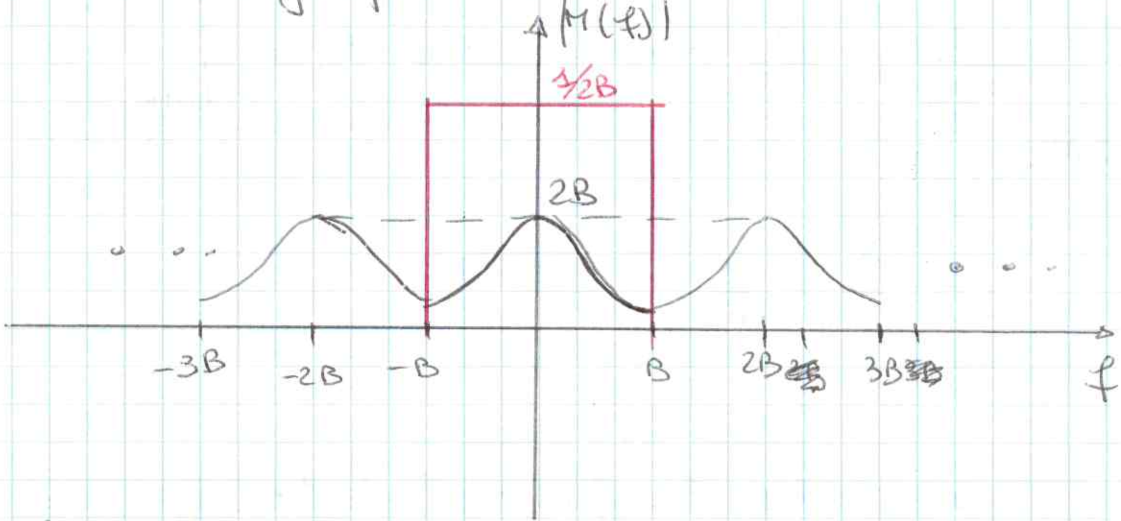
$$M(f) = 2B \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R(f-2mB)$$

Non c'è aliasing poiché la frequenza di campion. è la freq. di Nyquist $f_c = 2B$. Per cui

$$|M(f)| = 2B \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |R(f-2mB)| =$$

$$= 2B \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{9+4\pi^2(f-2mB)^2}} \; \mathrm{rect}\left(\frac{f-2mB}{2B}\right)$$

Facciamo il grafico

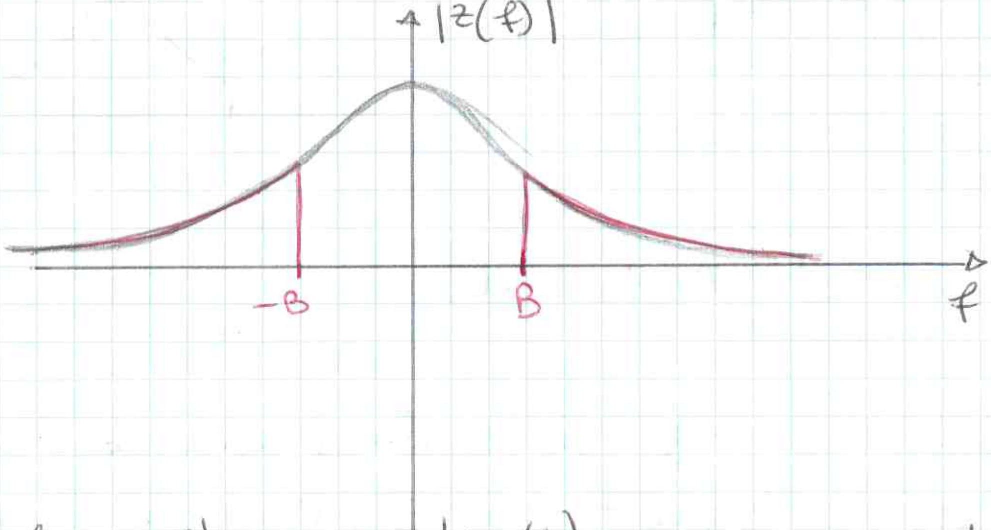


2) $$Y(f) = M(f)\frac{H(f)}{2B} = \frac{3}{3+j2\pi f} \; \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = R(f)$$

Si può osservare che

$$Z(f) = Y(f) - R(f) = -\frac{3}{3+j2\pi f}\left[u(f-B) + u(-f-B)\right]$$

come mostrato in figura.



Per calcolare l'energia di $z(t)$ possiamo utilizzare il teorema di Parseval.

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df = 2\int_B^{+\infty} \frac{9}{9+4\pi^2 f^2}\, df$$

Facciamo il cambio di variabile $x = \frac{2\pi f}{3}$

$$E_z = 2\int_{\frac{2\pi B}{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\frac{3}{2\pi}\, dx = \frac{3}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{\frac{2\pi B}{3}}^{+\infty}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi B}{3}$$

Es. 2 Sia data la funzione di trasferimento del sistema causale

$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{4}{5}\right)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z + \frac{4}{5}\right)}$$

1) Si scrive l'equaz. alle differenze che caratterizza il sistema.

2) Si individui la zona di convergenza e si scriva la risposta impulsiva.

3) Si scrive la risposta in freq. del sistema e si dice se è un passa-basso, passa-alto o passa-banda

---

1) Da $H(z)$ si ricava

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{4}{5} z^{-2}}{1 + \frac{11}{20} z^{-1} - \frac{1}{5} z^{-2}}$$

$$\Rightarrow y(n) = -\frac{11}{20} y(n-1) + \frac{1}{5} y(n-2) + x(n-1) - \frac{4}{5} x(n-2)$$

2) La zona di convergenza del sistema causale è $|z| > \frac{4}{5}$

Poiché $H(z)$ è una frazione propria si può scrivere

$$H(z) = \frac{A}{z - \frac{1}{4}} + \frac{B}{z + \frac{4}{5}}$$

$$A = \left.\frac{z - \frac{4}{5}}{z + \frac{4}{5}}\right|_{z = \frac{1}{4}} = -\frac{11}{21}$$

$$B = \left.\frac{z - \frac{4}{5}}{z - \frac{1}{4}}\right|_{z = -\frac{4}{5}} = \frac{32}{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(n) = -\frac{11}{21} \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{32}{21} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)}$$

3) Poiché $|z| = 1$ fa parte della zona di convergenza $\bar{H}(f) = H(z)\Big|_{z = e^{j2\pi fT}}$

$$\bar{H}(f) = \frac{e^{j2\pi f} - \frac{4}{5}}{\left(e^{j2\pi f} - \frac{1}{4}\right)\left(e^{j2\pi f} + \frac{4}{5}\right)}$$

Calcoliamone il modulo

$$\left|\bar{H}(f)\right| = \frac{\sqrt{\left(\cos 2\pi fT - \frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 2\pi fT}}{\sqrt{\left[\left(\cos 2\pi fT - \frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 2\pi fT\right]\left[\left(\cos 2\pi fT + \frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 2\pi fT\right]}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{41}{25} - \frac{8}{5}\cos 2\pi fT}}{\sqrt{\left(\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos 2\pi fT\right)\left(\frac{41}{25} + \frac{8}{5}\cos 2\pi fT\right)}}$$

Poiché il polo più ~~vicino~~ lontano dall'origine è a $f = \pm\frac{1}{2T}$ il sistema è un passa-alto.

Verifichiamolo:

$\left|\bar{H}(0)\right| = \frac{4}{27\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\left|\bar{H}\left(\pm\frac{1}{4T}\right)\right| = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\left|\bar{H}\left(\pm\frac{1}{2T}\right)\right| = \frac{36}{5}$