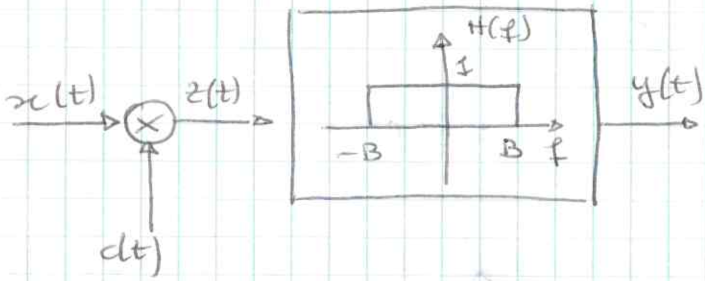
COMPITO DELL'8/6/2017

Es. 1 - Sia dato il sistema illustrato in fig. 1, dove $x(t) = B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$ e $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_0(t - nT)$ con $c_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$ e $T = 1/B$.



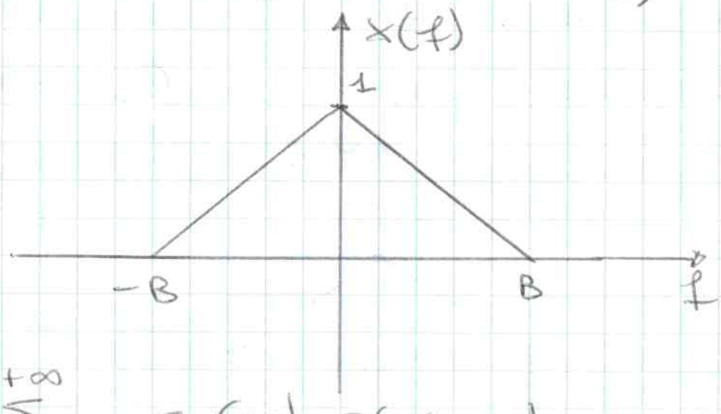

1) Si calcoli la trasformata del segnale $z(t)$.

2) Si calcoli l'espressione del segnale di uscita $y(t)$ e la sua energia.

---

1) $z(t) = x(t) \cdot c(t)$, per cui $Z(f) = X(f) \otimes C(f)$

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{f}{2B}\right)$$




$$C(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_0\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$C_0(f) = \frac{T}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2} f\right) \Rightarrow C_0\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{T}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \mathrm{tr}\left(\frac{f - kB}{2B}\right)$$

Facciamone il grafico osservando che

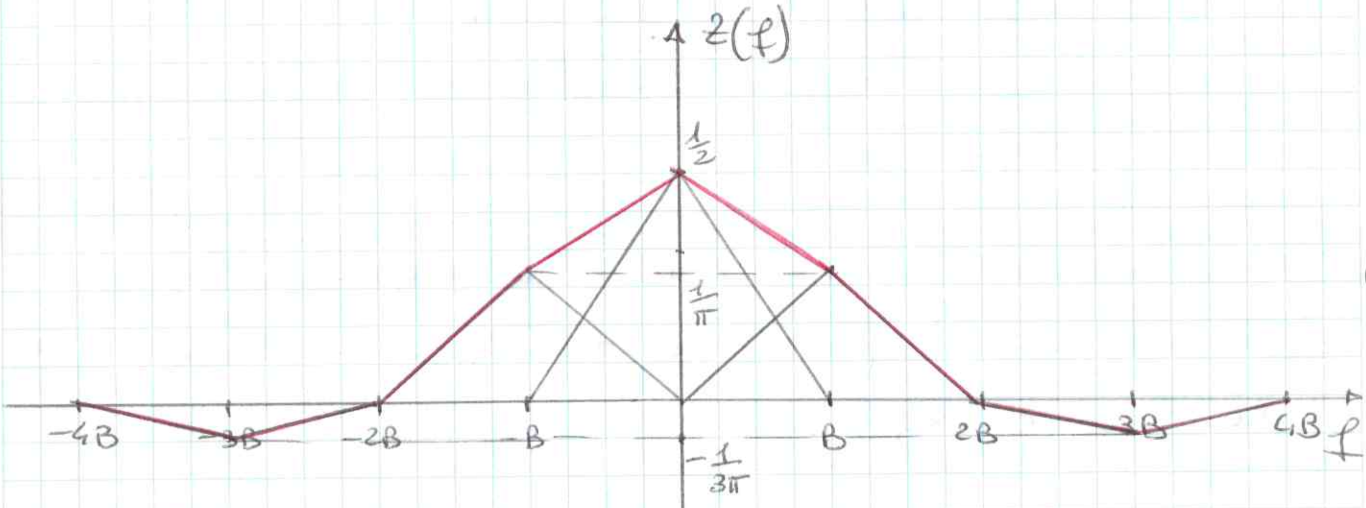
$k = 0 \quad \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 1$

$k = \pm 1 \quad \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$

$k = \pm 2 \quad \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 0$

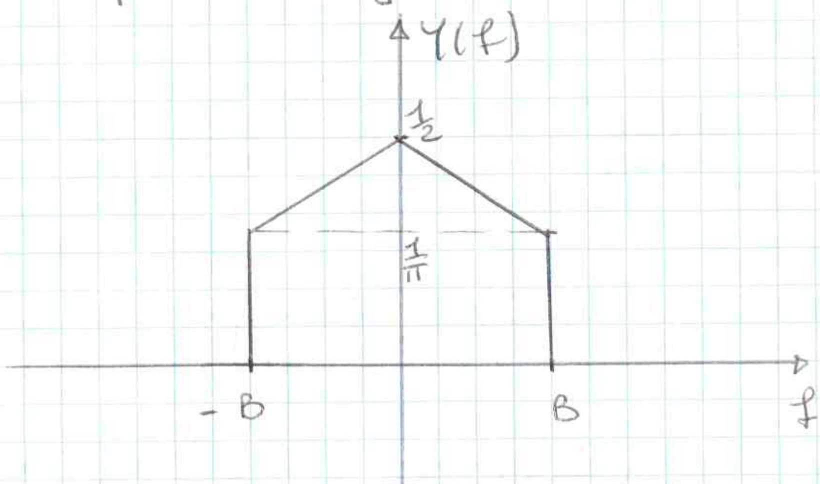
$k = \pm 3 \quad \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{2}{3\pi}$

ecc.




In rosso il risultato finale.

2) Applichiamo ora il filtro passa-basso ideale di banda B. Lo spettro di y(t) è illustrato in figura




Dalla figura risulta chiaramente

$$Y(f) = \frac{1}{\pi}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) \text{tr}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)] = \frac{2B}{\pi}\,\mathrm{sinc}(2Bt) + \frac{\pi-2}{2\pi} B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$$

Calcoliamo ora l'energia $E_y$.

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df \qquad \text{PARSEVAL}$$

Nel nostro caso è preferibile lavorare nel dominio delle frequenze

$$E_y = 2\int_0^B |Y(f)|^2 df = 2\int_0^B \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi-2}{2\pi B} f\right)^2 df$$

$$= 2\int_0^B \left[\frac{1}{4} + \frac{(\pi-2)^2}{4\pi^2 B^2} f^2 - \frac{(\pi-2)}{2\pi B} f\right] df$$

$$= \frac{(\pi+2)^2}{6\pi^2} B$$

---

Es. 2 Sia dato il sistema LTI discreto causale caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-0.9)(z-0.2)}$$

1) Si scriva l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema;

2) Si trovino la risposta impulsiva e ~~la~~ il modulo della risposta in freq. del sistema causale;

3) ~~Si trovi la risposta al~~

3) Dire se il sistema è un passa-basso o passa-alto.

1) Riscriviamo $H(z)$ in funzione di $z^{-1}$

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

da cui

$$X(z)(1 - 0.5z^{-1}) = Y(z)(1 - 0.2z^{-1} - 0.9z^{-1} + 0.18z^{-2})$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 1.1y(n-1) - 0.18y(n-2)$$

2) Troviamo la risposta impulsiva del sistema causale

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z - 0.5}{(z-0.9)(z-0.2)} = \frac{A}{z-0.9} + \frac{B}{z-0.2}$$

$$A = \left.\frac{z-0.5}{z-0.2}\right|_{z=0.9} \simeq 0.57$$

$$B = \left.\frac{z-0.5}{z-0.9}\right|_{z=0.2} \simeq 0.43$$

$$\Rightarrow H(z) = 0.57\frac{z}{z-0.9} + 0.43\frac{z}{z-0.2}$$

$$\Rightarrow h(n) = 0.57(0.9)^n u(n) + 0.43(0.2)^n u(n)$$

Risposta causale che converge per $|z| > 0.9$

$\therefore$ Poiché la circonferenza di raggio unitario fa parte della zona di convergenza, è possibile calcolare la risposta in frequenza del sistema ponendo $z = e^{j2\pi f}$

$$\bar{H}(f) = \frac{e^{j2\pi f}\left(e^{j2\pi f} - 0.5\right)}{\left(e^{j2\pi f} - 0.9\right)\left(e^{j2\pi f} - 0.2\right)}$$

$$|\bar{H}(f)| = \frac{\sqrt{(\cos 2\pi f - 0.5)^2 + \sin^2 2\pi f}}{\sqrt{\left[(\cos 2\pi f - 0.9)^2 + \sin^2 2\pi f\right]\left[(\cos 2\pi f - 0.2)^2 + \sin^2 2\pi f\right]}}$$

$$= \frac{\sqrt{1.25 - \cos 2\pi f}}{\sqrt{(1.81 - 1.8\cos 2\pi f)(1.04 - 0.4\cos 2\pi f)}}$$

3) Valutiamo $|\bar{H}(0)|$ e $|\bar{H}(\pm \frac{1}{2})|$

$$|\bar{H}(0)| = \frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{0.01 \cdot 0.64}} = 6.25$$

$$|\bar{H}(\pm \tfrac{1}{2})| = \frac{\sqrt{2.25}}{\sqrt{1.81+1.8}\,\sqrt{1.04+0.4}} = \sqrt{0.43}$$

Il sistema è un passa-basso.