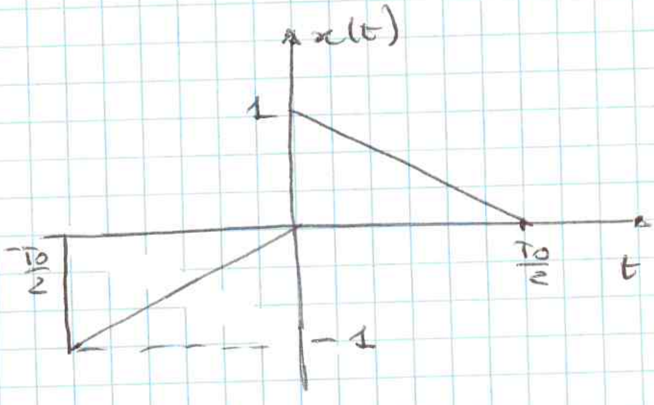
COMPITO 1/2/2017 Fila A

Es. 1 – Calcolare la potenza e l'espressione dei coeff. della serie di Fourier del segnale $x(t)$ periodico di periodo T_0 rappresentato in fig. 1 la cui espressione analitica è:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T_0} & -\frac{T_0}{2} \le t < 0 \\ 1 - \frac{2t}{T_0} & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$



$$x_0(t) = \left(1 - \frac{2|t|}{T_0}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t + \frac{T_0}{4}}{T_0/2}\right)$$

$$X_0(f) = \frac{T_0}{2} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{2}\right) - \frac{T_0}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{fT_0}{2}\right) e^{j\frac{\pi f T_0}{2}}$$

$$= \frac{T_0}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{fT_0}{2}\right)\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{fT_0}{2}\right) - e^{j\frac{\pi f T_0}{2}}\right]$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) - e^{j\frac{\pi k}{2}}\right]$$

Calcoliamo ora la potenza

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right)^2 dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \left(1 + \frac{4t^2}{T_0^2} - \frac{4t}{T_0}\right) dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\left[t + \frac{4}{3}\frac{t^3}{T_0^2} - \frac{2t^2}{T_0}\right]\Bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{3}$$

Es. 2 - Il segnale $x(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)u(t)$, dove $\tau = 0.01$ msec, viene campionato ad una freq. $f_c = 1$ MHz e poi interpolato con S&H.

1) Si calcoli la banda a 3 dB del segnale $x(t)$;

2) Si scriva l'espressione e si faccia il grafico del modulo dello spettro del segnale campionato;

3) Si scriva l'espressione del segnale interpolato in funzione dei campioni di $x(t)$, se ne faccia il grafico e se ne calcoli l'energia.

---

1) $x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$ $\qquad \tau = 0.01$ msec $\qquad f_c = 1$ MHz

$$X(f) = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} \qquad |X(f)| = \frac{\tau}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2 \tau^2}}$$

Da ciò si ricava che $B_{3dB} = \frac{1}{2\pi\tau} \simeq 16$ kHz

2) Il segnale campionato ha spettro

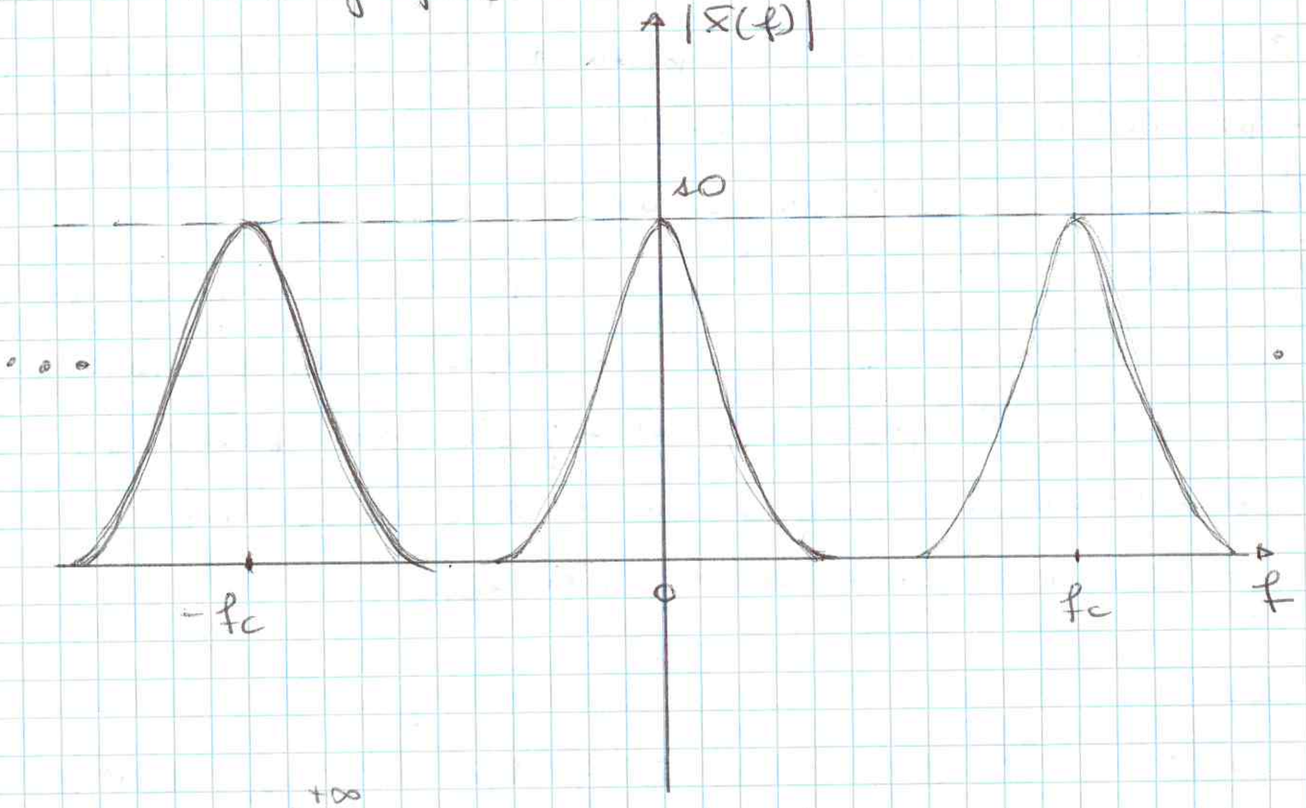
$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \qquad T_c = 1\,\mu\text{sec}$$

$$= 10^6 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1 + j2\pi(f - kf_c)\tau}$$

Poiché $f_c \gg B_{3dB}$ le repliche nello spettro del segnale campionato possono essere considerate separate, quindi

$$|\overline{X}(f)| \simeq 10^6 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{\sqrt{1+4\pi^2(f-kf_c)^2\tau^2}}$$

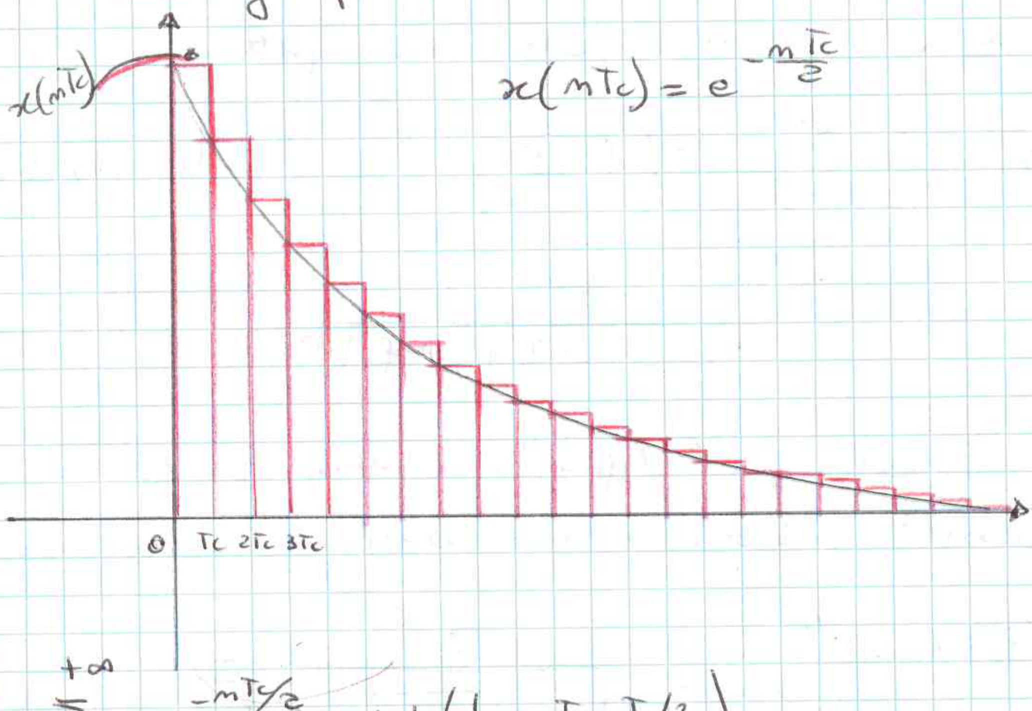
Facciamo il grafico



3) $$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, p(t-nT_c)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_c-T_c/2}{T_c}\right)$$

Facciamo il grafico:



$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nT_c/2}\, \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_c-T_c/2}{T_c}\right)$$

$$E_{\hat{x}} = \int_0^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2 \, dt = T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2T_c/2}\right)^n =$$

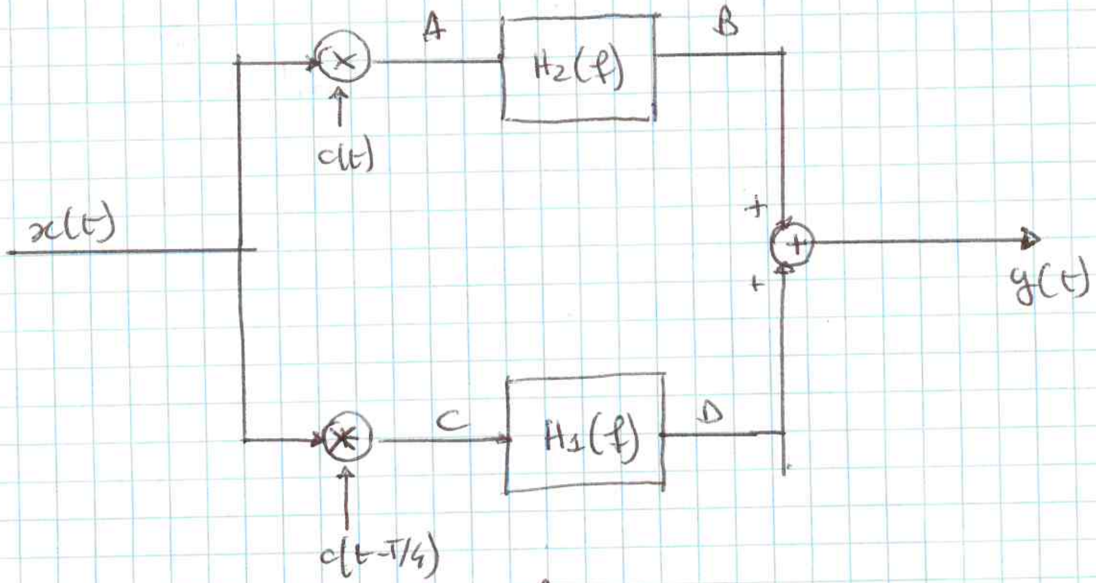
$$= T_c \frac{1}{1 - e^{-2\frac{T_c}{2}}} \simeq 5.52 \cdot 10^{-6}$$

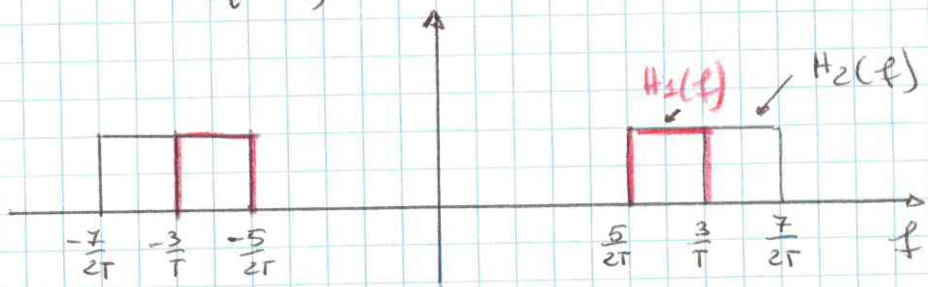
$$E_x = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{2}} \, dt = \frac{2}{2} = 5 \cdot 10^{-6}$$ Energia del segnale continuo iniziale.

COMPITO 1/02/2017 File B

Es. 1 – Si consideri lo schema di fig. 1 in cui il segnale $x(t)$ è espresso da $x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + \mathrm{sinc}\left(\frac{t+T/2}{T}\right)$.

Sapendo che $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$ e che le risposte in freq. $H_1(f)$ e $H_2(f)$ sono come in fig. 2





1) Si determini l'espressione e si disegni lo spettro del segnale nel pt A;

2) Si determini l'espressione e si disegni lo spettro del segnale nel pt C;

3) Si determini l'espressione dello spettro del segnale di uscita $y(t)$.

–

Nel pt A $\quad x_A(t) = x(t)\, c(t)$

$$\Rightarrow X_A(f) = X(f) \otimes C(f)$$

$$X(f) = T\,\mathrm{rect}(fT)\left[e^{-j\pi fT} + e^{j\pi fT}\right] = 2T\,\mathrm{rect}(fT)\cos(\pi fT)$$

$$c_0(t) = \begin{cases} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) & \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il periodo è T.

$$\Rightarrow C_0(f) = \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)$$

$$C_k = \frac{1}{T} C_0\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

La trasformata generalizzata di $c(t)$ è

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$X_A(f) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{k}{T}\right)T\right]\cos\left[\pi\left(f-\frac{k}{T}\right)T\right]$$

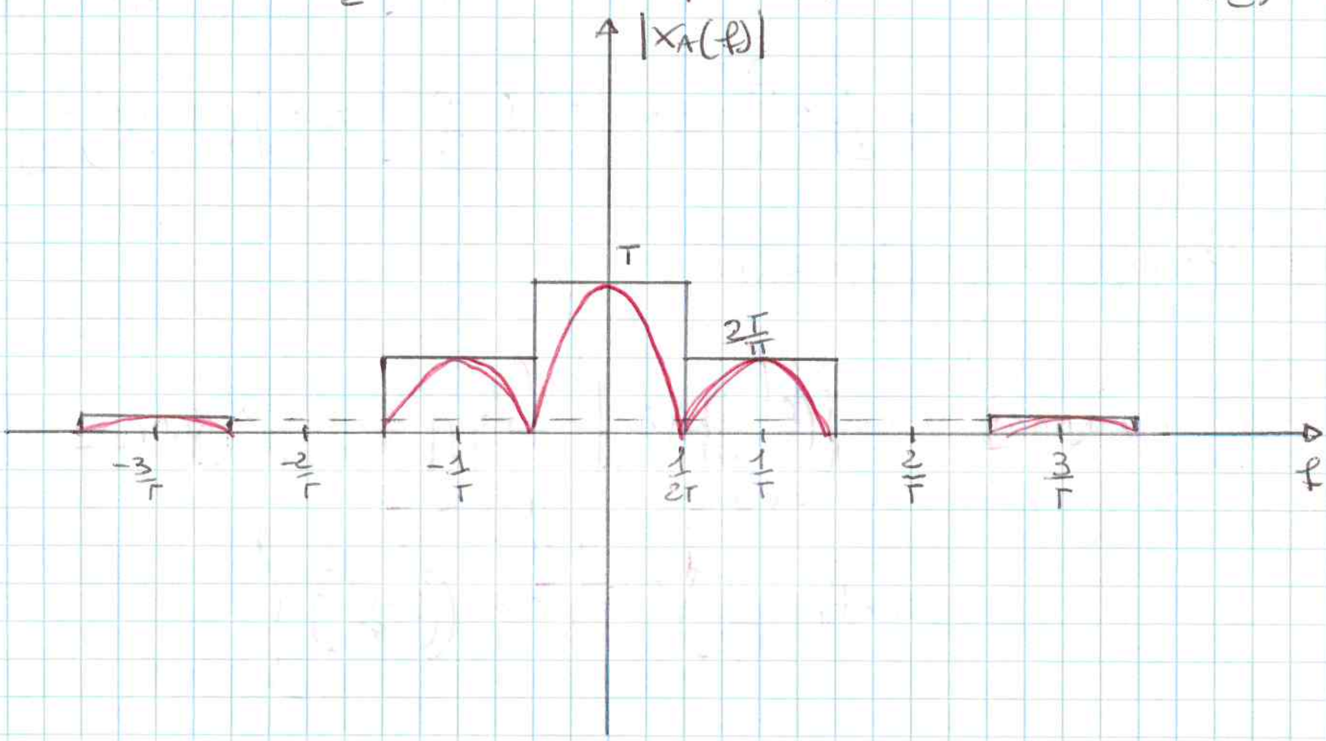
Le repliche non si sovrappongono

$k=0 \quad \mathrm{sinc}(0) = 1$

$k=1 \quad \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$

$k=2 \quad \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 0$

per k pari $\neq 0$ $\quad \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 0$



$$X_B(f) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right)\cos\left(\pi\left(f-\frac{3}{T}\right)T\right)\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{13}{4T}\right)2T\right]$$

$$+T\,\mathrm{sinc}\left(-\frac{3}{2}\right)\cos\left(\pi\left(f+\frac{3}{T}\right)T\right)\mathrm{rect}\left[\left(f+\frac{13}{4T}\right)2T\right]$$

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) = \mathrm{sinc}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

2) $X_C(f) = X(f) \otimes \left[C(f)e^{-j\frac{\pi f T}{2}}\right]$

$$C(f)e^{-j\frac{\pi f T}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)e^{-j\frac{k\pi}{2}}\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$X_C(f) = T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)e^{-j\frac{k\pi}{2}}\,\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{k}{T}\right)T\right]\cos\left[\pi\left(f-\frac{k}{T}\right)T\right]$$

~~Ea~~ $|X_C(f)| = |X_A(f)|$ I grafici sono uguali

$$X_D(f) = X_C(f)\,H_1(f)$$

$$X_D(f) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}\pi}\cos\left[\pi\left(f-\frac{3}{T}\right)T\right]\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{11}{4T}\right)2T\right]$$

$$+T\,\mathrm{sinc}\left(-\frac{3}{2}\right)e^{j\frac{3}{2}\pi}\cos\left[\pi\left(f+\frac{3}{T}\right)T\right]\mathrm{rect}\left[\left(f+\frac{11}{4T}\right)2T\right]$$

3) $Y(f) = X_B(f) + X_D(f)$

$$= \frac{2\pi T}{3}\cos(\pi f T)\Big\{\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{13}{4T}\right)2T\right] + \mathrm{rect}\left[\left(f+\frac{13}{4T}\right)2T\right]$$

$$+j\,\mathrm{rect}\left[\left(f-\frac{11}{4T}\right)2T\right] - j\,\mathrm{rect}\left(\left(f+\frac{11}{4T}\right)2T\right)\Big\}$$

Es. 2 - Il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\, u(t)$ costituisce l'ingresso di un filtro ideale passa-alto di banda $B = 2f_0$.

1) Determ. energia e potenza di $x(t)$;

2) Calcolare la trasformata generalizzata di Fourier di $x(t)$;

3) Si supponga ora $\phi = 0$ e $f_0 \gg 1$. Si disegni il modulo dello spettro del segnale in uscita al sistema e se ne calcoli l'energia.

---

1) $E_x = +\infty$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)\, u(t)\, dt = \frac{A^2}{4}$$

2) $$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0)e^{j\phi} + \delta(f+f_0)e^{-j\phi}\right] \otimes U(f)$$

dove $U(f) = \mathcal{F}[u(t)]$

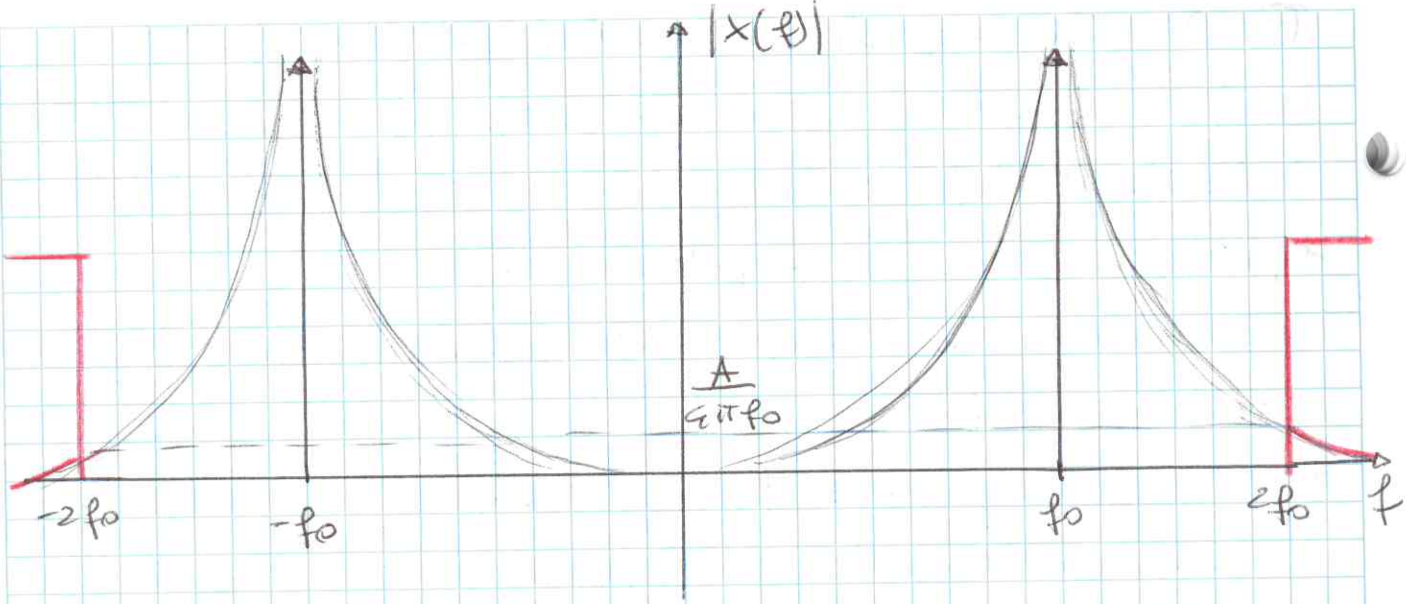
$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}e^{j\phi}\frac{1}{j2\pi(f-f_0)} + \frac{A}{4}e^{j\phi}\delta(f-f_0)$$

$$+ \frac{A}{2}e^{-j\phi}\frac{1}{j2\pi(f+f_0)} + \frac{A}{4}e^{-j\phi}\delta(f+f_0)$$

3) $\phi = 0 \quad f_0 \gg 1$

Le repliche praticamente sono separate.



Applichiamo il filtro passa-alto

$$
Y(f) = \begin{cases} \dfrac{A}{2} \dfrac{1}{j2\pi(f-f_0)} & f \geq 2f_0 \\ \dfrac{A}{2} \dfrac{1}{j2\pi(f+f_0)} & f \leq -2f_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

$$
E_Y = 2 \int_{2f_0}^{+\infty} \frac{A^2}{4} \frac{1}{4\pi^2 (f-f_0)^2} \, df
$$

$$
= \frac{A^2}{8\pi^2} \int_{f_0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2} \, d\alpha = \frac{A^2}{8\pi^2 f_0}
$$