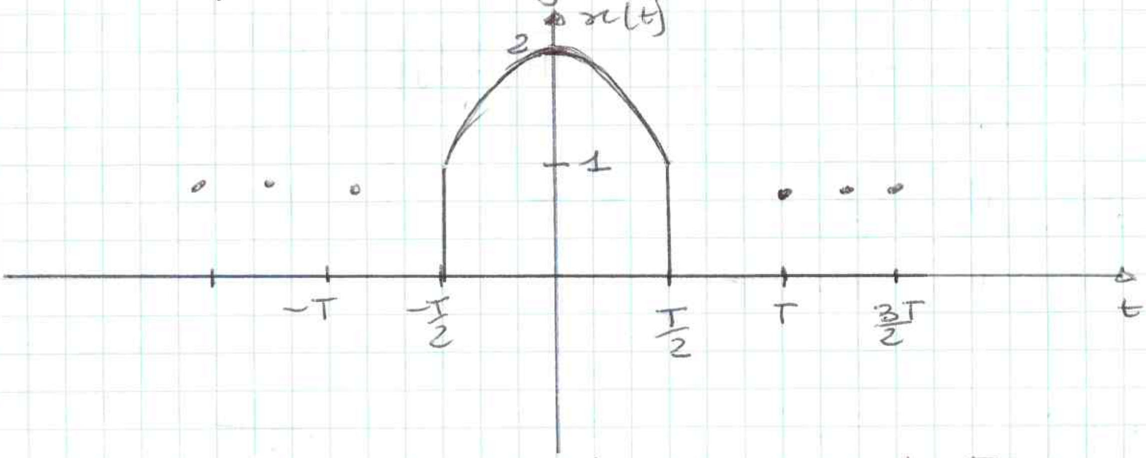
COMPITO 29/6/2017

Es. 1 - Si calcolino la potenza e la trasformata serie di Fourier del segnale periodico $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT)$ dove $x_0(t) = [1+\cos(2\pi f_0 t)]\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ e $f_0 = 1/2T$. Si calcolino esplicitamente i coeff. della serie per $k=0, 1$ e 2

Facciamo prima il grafico del segnale $x(t)$



Calcoliamo i coefficienti della serie di Fourier. Dalle leggi di Poisson sappiamo che

$$X_k = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{k}{T}\right)$$

Calcoliamo $X_0(f) = \mathcal{F}[x_0(t)]$

$$x_0(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$X_0(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT) + \frac{T}{2}\mathrm{sinc}((f-f_0)T) + \frac{T}{2}\mathrm{sinc}((f+f_0)T)$$

$$\Rightarrow X_k = \mathrm{sinc}(k) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(k-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

Calcoliamo ora esplicitamente gli X_k per

$k = 0, 1 \text{ e } 2.$

$$k=0 \quad X_k = \text{sinc}(0) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\pi}$$

$$k=1 \quad X_k = \text{sinc}(1) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3\pi}$$

$$k=2 \quad X_k = \text{sinc}(2) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{15\pi}$$

Calcoliamo ora la potenza. Per segnali periodici

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1 + \cos 2\pi f_0 t)^2\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1 + \frac{1+\cos 4\pi f_0 t}{2} + 2\cos 2\pi f_0 t\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{3}{2}t + \frac{\sin 4\pi f_0 t}{8\pi f_0} + \frac{\sin 2\pi f_0 t}{\pi f_0}\right]\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2\cancel{T}}{8\pi\cancel{T}}\Big[\overbrace{\sin \frac{4\pi}{2\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{2} - \sin\left(-\frac{4\pi}{2T}\frac{T}{2}\right)}^{0}\Big]$$

$$+ \frac{2\cancel{T}}{\pi\cancel{T}}\Big[\underbrace{\sin\frac{2\pi}{2\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{2} - \sin\left(\frac{2\pi}{2T}\cdot\frac{T}{2}\right)}_{2}\Big]$$

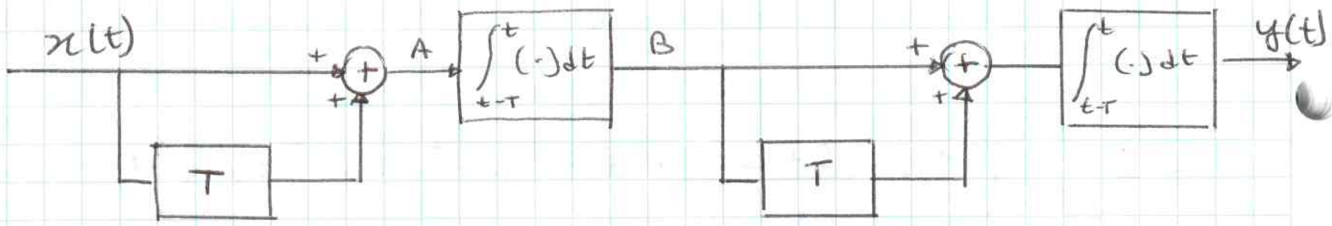
$$= \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi}$$

Es. 2 – Sia dato il sistema LTI rappresentato in Fig. 1.

1) Si calcoli la risposta in frequenza del sistema e se faccia il grafico del modulo.

2) Si calcoli la risposta impulsiva e se ne faccia il grafico.

3) Si determini inoltre il segnale $y(t)$ in uscita al sistema quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t) = 2+2\cos(2\pi f_0 t)$ per $f_0 = 1/T$.



---

1) $x_A(t) = x(t) + x(t-T)$

$$X_A(f) = \frac{X(f)}{2} \cos(\pi f T)\, e^{-j\pi f T}$$

$$\Rightarrow \frac{X_A(f)}{X(f)} = 2\cos(\pi f T)\, e^{-j\pi f T}$$

Calcoliamo ora la risposta in frequenza dell'integratore a finestra mobile posto tra i punti A e B.

$$h_{MA}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \Rightarrow H_{MA}(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$$

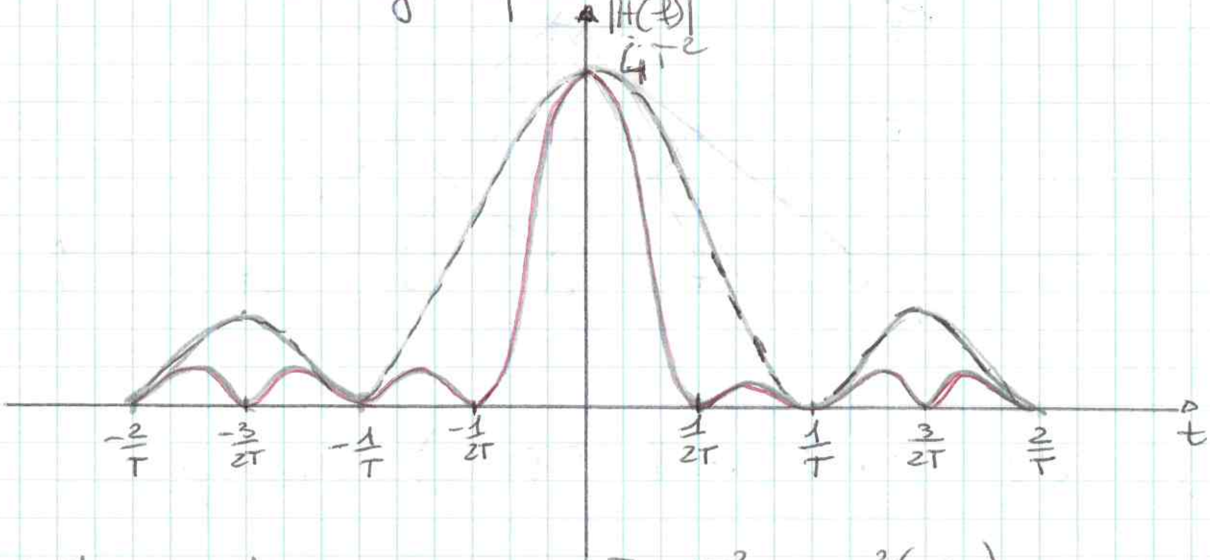
$H(f)$ sarà dunque:

$$H(f) = \left[2T\,\mathrm{sinc}(fT)\cos(\pi f T)\, e^{-j2\pi f T}\right]^2$$

Calcoliamone ora il modulo

$$|H(f)| = 4T^2 \, \text{sinc}^2(fT) \cos^2(\pi f T)$$

Facciamone il grafico



Tratteggiato in nero è $\frac{T^2}{4} \text{sinc}^2(fT)$, in rosso $|H(f)|$

2) Passiamo ora alla risposta impulsiva

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)]$$

$$H(f) = 4T^2 \, \text{sinc}^2(fT) \cos^2(\pi f t) \, e^{-j4\pi f T}$$

Osservo che $T \, \text{sinc}^2(fT) \Longleftrightarrow tr\left(\frac{t}{2T}\right) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right)$

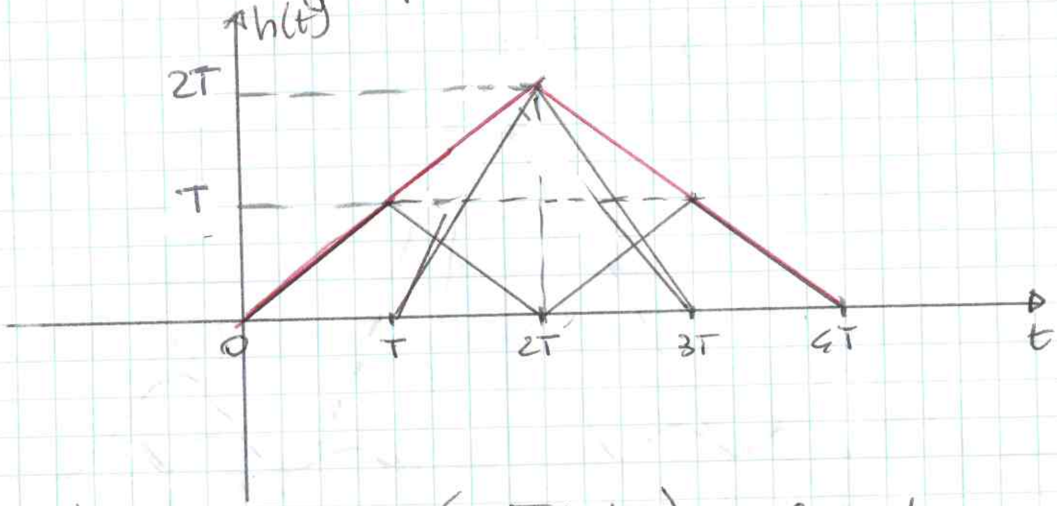
$$\cos^2(\pi f T) = \frac{1 + \cos 2\pi f T}{2}$$

$$\Rightarrow H(f) = 2T^2 \, \text{sinc}^2(fT) \, e^{-j4\pi f T} + 2T^2 \, \text{sinc}^2(fT) \, e^{-j4\pi f T} \cos(2\pi f T)$$

$$h(t) = 2T \, tr\left(\frac{t-2T}{2T}\right) + 2T \, tr\left(\frac{t-2T}{2T}\right) \otimes \left[\frac{1}{2}\delta(t-T) + \frac{1}{2}\delta(t+T)\right]$$

$$= 2T \, tr\left(\frac{t-2T}{2T}\right) + T \, tr\left(\frac{t-3T}{2T}\right) + T \, tr\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

Facciamone il grafico



3) $x(t) = 2 + 2\cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = \frac{1}{2T}$

$$y(t) = 2H(0) + 2\left|H\left(\frac{1}{2T}\right)\right| \cos\left(2\pi f_0 t + \angle H\left(\frac{1}{2T}\right)\right)$$

$H(0) = 4T^2 \qquad \left|H\left(\frac{1}{2T}\right)\right| = 0$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underline{8T^2}$$