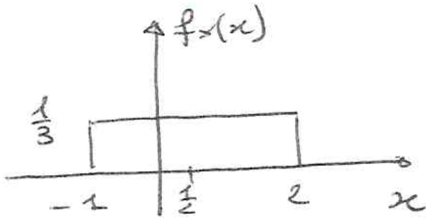
Es. Sia $Y=2X+3$. Si ricavi la ddp di Y se X è una ① v. uniforme in $[-1,2]$. Se ne calcolino valor medio e varian[za]

Poichè X e Y sono entrambe v.a. continue, applichiamo il teorema fond. della prob. La sol. in questo caso è unic[a]

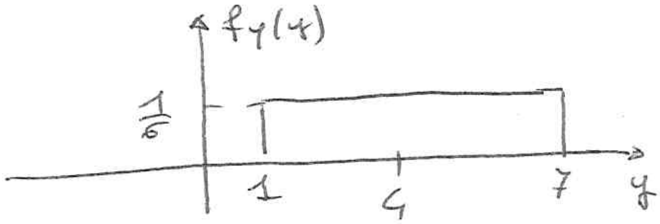
$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|\dot{g}(x)|}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$



$$x = \frac{y-3}{2} \qquad \dot{g}(x) = \frac{dy}{dx} = 2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{3}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \left.\frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{3}\right)}{2}\right|_{x=\frac{y-3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\,\mathrm{rect}\left(\frac{y-4}{6}\right)$$



$E\{Y\} = 4 \qquad \sigma_Y^2 = (7-1)^2/12 = 3$

Es. La velocità di una molecola di gas all'equilibrio è una v.a. V la ~~cui~~ ddp è data da

$$f(v) = \begin{cases} k\,v\exp(-bv^2) & v>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove k è una costante e b dipende dalla temperatura assoluta e dalla massa della molecola

1) Calcolare il valore k in funzione di b

2) Calcolare la ddp dell'energia cinetica $W = mv^2/2$ della molecola.

1) Per calcolare la costante k applichiamo la proprietà (c
di normalizzazione, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv = 1$$

$$\int_0^{+\infty} k v e^{-bv^2}\,dv = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} k v e^{-bv^2}\,dv = \left.\frac{k e^{-bv^2}}{-2b}\right|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow k = 2b$$

La ddp ha dunque l'espressione

$$f_V(v) = 2bv\, e^{-bv^2}\, u(v)$$

2) $W = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{\frac{2w}{m}} \qquad g'(v) = \frac{dw}{dv} = mv$

Poiché $v>0$ si prende solo la soluz. >0 $\;v = \sqrt{\frac{2w}{m}}$

$$f_W(w) = \left.\frac{f_V(v)}{|g'(v)|}\right|_{v=g^{-1}(w)} = \left.\frac{2b\cancel{v}e^{-bv^2}}{m\cancel{v}}\right|_{v=\sqrt{\frac{2w}{m}}}$$

$$= \frac{2b}{m}\, e^{-\frac{b2w}{m}}\, u(w)$$

Es. La v.a. X è Gaussiana a valor medio μ e varianza σ^2.
Ricavare l'espressione della ddp $f_Y(y)$ della v.a. $Y = e^X$.

—

Possiamo applicare il teo fond. della prob. La soluzione
è unica $\quad X = \ln y \qquad y>0$

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=g^{-1}(y)}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = e^x = y$$ Poiché $y>0$ il modulo non è necessario

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{e^x}\Bigg|_{x=\ln y} =$$

$$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Es. Sia X una v.a. con ddp di Rayleigh data da

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] u(x).$$

1) Si calcoli la funzione di distribuzione di X

2) Si supponga ora che X rappresenti il pt di atterraggio (in m) di un paracadutista dal centro di un'area bersaglio. Si ponga $\sigma^2=40$. Si calcoli la prob. che il paracadutista atterri entro una distanza di 3 m dal centro dell'area bersaglio

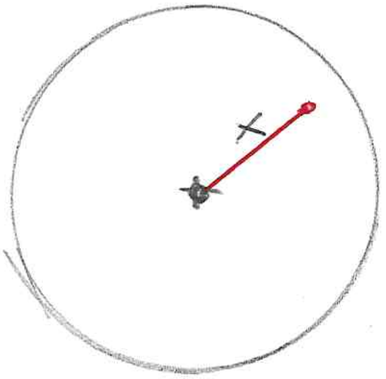
---

Calcoliamo $F_X(x)$

1) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_0^x \frac{\alpha}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right] d\alpha$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2) $\sigma^2 = 40$. Dal grafico



La prob. che il paracadutista atterri entro 3 m dal centro è pari a

$$P(x \le 3) = F_x(3) = 1 - \exp\left[-\frac{9}{80}\right] \simeq 0.10$$

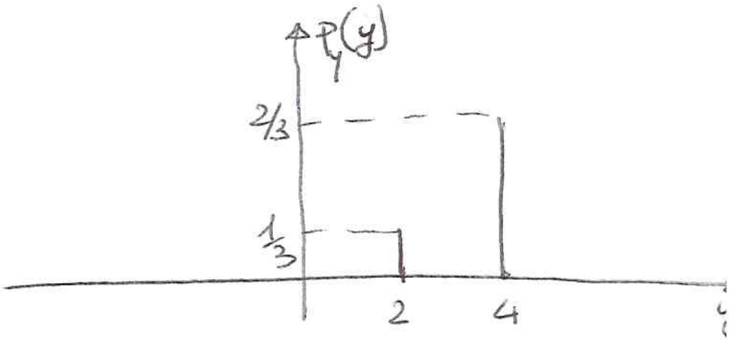
Es. Sia data la v.a. $x \in U(-2,1)$ e la trasformazione $y = \mathrm{sgn}(x) + 3$. Si trovi la ddp di y.

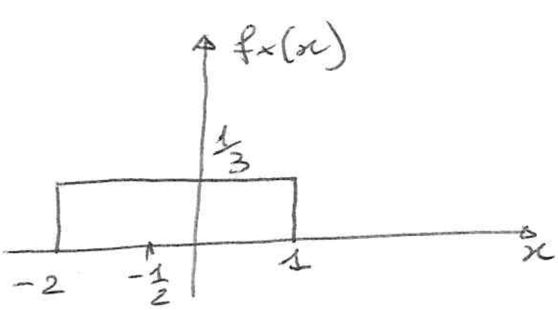
La v.a Y è discreta, infatti poichè $\mathrm{sgn}(x) = 1$ per $x > 0$ e $\mathrm{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$.

$$Y = \begin{cases} 1+3=4 & x \ge 0 \\ -1+3 = 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(Y=4) = P(x \ge 0) = \frac{1}{3}$$

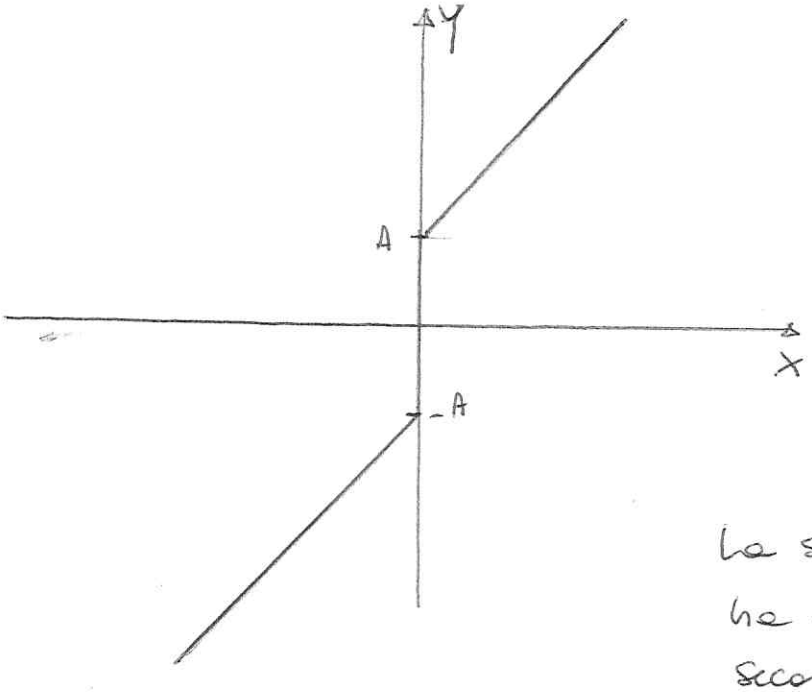
$$P(Y=2) = P(x < 0) = \frac{2}{3}$$





Es. Calcolare la densità di prob. della v.a. $z = A\,\mathrm{sgn}(x) + x$ dove $x \in \mathcal{N}(0,1)$ e $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ e $A > 0$

Disegniamo la trasformazione



$$y = \begin{cases} A + x & x > 0 \\ -A + x & x < 0 \end{cases}$$ (5)

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

La soluzione è unica ma ha due espressioni diverse a seconda del segno di x e di y, dunque

$$f_Y(y) = f_X(x)\Big|_{x = y - A} \quad \text{per } y > 0$$

$$f_Y(y) = f_X(x)\Big|_{x = y + A} \quad \text{per } y < 0$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-A)^2}{2}\right] \quad \text{per } y > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y+A)^2}{2}\right] \quad y < 0$$