Rappresentazione dei Numeri

Esercizi risolti

a cura del professor Marco Cococcioni

Versione 0.16

Esercizio 1

Sia **A** il naturale che rappresenta l'intero **a** = -31 in complemento a due su 6 bit. Trovare **A**, esprimendolo in binario. Successivamente trovarne anche la rappresentazione in base 16.

A (espresso in binario) □□□□□□

A (espresso in base 16) ____________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 1

La rappresentazione cercata è data dal naturale 2^6-*ABS*(-31) = 64-31=33, ossia 2^5+2^0: 100001.
Il naturale 33 in base sedici ha rappresentazione 21, come si può facilmente scoprire raggruppando le cifre di quattro in quattro da destra ed aggiungendo 2 zeri a sinistra:

$\underbrace{0010}_{2}$-$\underbrace{0001}_{1}$

Ovviamente, si sarebbe giunti alla stessa soluzione, applicando l'algoritmo Div&Mod al naturale 33 ed usando come base 16:

$q_0 = 33$

q_1= 33 div 16 = 2 a_0=33 mod 16 = 1

q_2= 2 div 16 = **0** a1=33 mod 16 = 2

Pertanto, ancora, iln naturale 33 in base 16 ha rappresentazione $\mathbf{(21)_{16}}$ (*e si legge due uno in base sedici*).

Esercizio 2

Data la rappresentazione **A** = 01101, dire a quale intero **a** essa corrisponde nell'ipotesi di aver utilizzato la rappresentazione con *bias* su 5 bit.

Inoltre, data la rappresentazione **R** = {0, 01101, 1000000000}, trovare il numero reale **r** corrispondente nell'ipotesi di rappresentazione in virgola mobile e precisione dimezzata (*half precision*).

a = _________	**r =** ____________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 2

Per trovare **a** da **A** basta togliere ad **A** il bias. Il bias vale 2^{K-1}-1. Per K=5, bias = 01111 = 15.
Pertanto 01101-01111 = 13-15 = -2 $\Rightarrow$ Pertanto l'intero **a** cercato vale -2.

Data **R**={0, 01101, 1000000000}, si ha che:
s = 0 (il numero reale **r** cercato è dunque positivo)
E = 01101 ed
F = 1000000000
Il significando m sarà pertanto il reale 1.1000000000 (per via dell'1 implicito).
L'esponente e = -2, in virtù della rappresentazione con bias (vedere sopra).

Pertanto $\boldsymbol{r} = m \cdot \text{due}^{-2} = 1.1 \cdot \text{due}^{-2} = 0.011 \cdot \text{due}^{0} = 2^{-2} + 2^{-3} = 0.25 + 0.125 =$ **0.375.**

Esercizio 3

Trovare la rappresentazione di -64 in complemento a due su 7 bit, se rappresentabile. Trovarne inoltre la rappresentazione in modulo e segno, sempre su 7 bit (e sempre al patto che sia rappresentabile).

□ **-64 è rappresentabile in *c2* su 7 bit (□ □ □ □ □ □ □)** □ **-64 non è rappresentabile in *c2* su 7 bit**	□ **-64 è rappresentabile in *ms* su 7 bit (□ □ □ □ □ □ □)** □ **-64 non è rappresentabile in *ms* su 7 bit**

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 3

L'intervallo di rappresentabilità in complemento a 2 su 7 bit è $[-2^{(7-1)}, +-2^{(7-1)}-1]$, ossia [-64, +63]. Pertanto -64 è rappresentabile. La sua rappresentazione A è data da $2^7-64 = 128-64 = 64$, ossia **1000000**.

Invece l'intervallo di rappresentabilità in modulo e segno su 7 bit è $[-2^{(7-1)}-1, +-2^{(7-1)}-1]$, ossia [-63, +63] e di conseguenza -64 **non è rappresentabile in modulo e segno su 7 bit**.

Esercizio 4

Dara la rappresentazione in virgola mobile *R*={s,F,E}, dove s=1, F=01000 (parte frazionaria su 5 bit) ed E=010 (esponente su 3 bit), a quale numero reale *r* corrisponde?

***r* = ____________**

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 4

Il significando del numero è 1.01000 per via dell'*uno implicito*.

Il numero r in base due è $1.01000 \cdot \text{due}^{-1}$, ossia 0.101000, che in base dieci vale $2^{-1}+2^{-3} = 0.5 + 0.125$, da cui segue che r = **-0.625**.

Esercizio 5

Trovare la rappresentazione binaria **A** in complemento a 2 dell'intero **a** = -31 su p = 6 bit.

Trovare inoltre la rappresentazione in base 8 del naturale **A** appena trovato.

A (in base 2) ___________ A (in base 8) _________________

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 5

Trattandosi di un numero negativo, il naturale A vale $2^p - |-31| = 64 - 31 = 33_{(10)}$, ossia $A=100001_{(2)}$.

Per esprimere A in base 8 basta raggruppare le cifre a tre a tre partendo da sinistra e decodificare ciascun gruppo mediante conversione da binario a decimale:
A=$\mathbf{41_{(8)}}$ (*e si legge quattro uno in base otto*).

Esercizio 6

Dato il numero naturale *A* la cui codifica in base 5 è 104, trovarne la codifica in base 2.

Successivamente, assumendo che la rappresentazione binaria trovata sia quella dell'esponente *E* di un numero reale in *half precision* (*K*=5), dire quanto vale l'esponente intero *e* corrispondente.

A* (in base 2)** ____________ ***e ___________________

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 6

Il numero $104_{(5)}$ corrisponde al decimale $1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^0 = 29_{(10)}$.

$29_{(10)}$ equivale a 16+8+4+1, ossia $11101_{(2)}$.

Considerando 11101 come il valore di *E, l'intero e corrispondente è il naturale che si ottiene sottraendo ad E il bias B* = K^{5-1}-1=15, ossia 29-15 = 14. Dunque l'esponende *e* è positivo e vale **14**.

Esercizio 7

Rappresentare il numero intero decimale **a** = -31 in base 3 su 5 cifre, mediante tecnica del modulo e segno (si utilizzi la cifra 1 per codificare il segno).

A (ms base 3) □□□□□

(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)

Soluzione Esercizio 7

Per prima cosa occorre trovare la rappresentazione del modulo di **a** su 4 cifre.

Notando che $31 = 3^3+3^1+3^0$, segue che la rappresentazione su quattro cifre è 1011.

Premettendo il segno (rappresentto con la cifra ad 1, in analogia a quanto avviene in base 2), si ottiene la rappresentazione cercata: **11011**.

Esercizio 8

Sia data la seguente rappresentazione R_1 di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (tre per l'esponente, quattro per la parte frazionaria, uno per il segno): R_1={S,E,F}, con S = 0, E = 010 ed F = 1010.

- A quale numero reale r_1 corrisponde la rappresentazione R_1 ?
- Quanto vale in base dieci il massimo numero r_2 rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al "+∞" ?

$\boldsymbol{r_1}$ __________________	$\boldsymbol{r_2}$ __________________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 8

Il significando m_1 vale 1.1010, per via dell'uno implicito.

L'esponente e_1 vale E_1-*bias = 010-011 = -1*

S=0 (ossia il numero è positivo).

Pertanto $r_1 = 1.1010 \cdot \text{due}^{-1} = 0.11010 = 2^{-1}+2^{-2}+2^{-4} = 0.5+0.25+.0625 =$ **+0.8125**.

Il massimo reale positivo è quello associato al segno positivo (S_2=0), al massimo esponente E_2=111 ed alla massima parte frazionaria F_2=1111.

Il significando m_2 corrispondente vale: 1.1111, mentre l'esponente e_2 vale: 111-011 = 7-3 = 4.

Pertanto $r_2 = 1.1111 \cdot \text{due}^{+4} = 11111 = 2^4+2^3+2^2+2^1+2^0 =$ **31**.

Esercizio 9

- Sia dato il numero 105 in base 6. Trovarne la rappresentazione in base 10 e quella in base 2 .

Base 10 ________________	***Base 2*** ________________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 9

105 in base 6 corrisponde a 41 in base 10. Infatti, utilizzando la formula della sommatoria, si ottiene:

$1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^0 = 36+5 = \mathbf{(41)_{10}}$.

La rapprensentazione di $(41)_{10}$ in base 2 si può ottenere con la procedura Div&Mod:

$q_0 = 41$

$q_1 = 41$ div $2 = 20$	$a_0 = 41$ mod $2 = 1$
$q_2 = 20$ div $2 = 10$	$a_1 = 20$ mod $2 = 0$
$q_3 = 10$ div $2 = 5$	$a_2 = 10$ mod $2 = 0$
$q_4 = 5$ div $2 = 2$	$a_3 = 5$ mod $2 = 1$
$q_5 = 2$ div $2 = 1$	$a_4 = 2$ mod $2 = 0$
$q_6 = 1$ div $2 = \mathbf{0}$	$a_5 = 1$ mod $2 = 1$

Pertanto la rappresentazione in base due cercata consta di 6 bit ($a_5 \dots a_0$) : **101001**.

Esercizio 10

Dato il numero reale r = 0.3125, trovarne la rappresentazione binaria R in virgola fissa, usando 6 bit per la parte decimale.

$$R = 0.\square\square\square\square\square\square$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 10

Si pone $f_0 = 0.3125$ e poi si applica l'algoritmo "Parte frazionaria – Parte intera":

$f_0 = 0.3125$

$f_{-1} = F(f_0 \cdot 2 = 0.3125 \cdot 2 = \mathbf{0.625}) = 0.625$ $\quad a_{-1} = I(0.625) = \mathbf{0}$

$f_{-2} = F(f_{-1} \cdot 2 = 0.625 \cdot 2 = \mathbf{1.25}) = 0.25$ $\quad a_{-2} = I(1.25) = \mathbf{1}$

$f_{-3} = F(f_{-2} \cdot 2 = 0.25 \cdot 2 = \mathbf{0.5}) = 0.5$ $\quad a_{-3} = I(0.5) = \mathbf{0}$

$f_{-4} = F(f_{-3} \cdot 2 = 0.5 \cdot 2 = \mathbf{1.0}) = \mathbf{0}$ $\quad a_{-4} = I(1.0) = \mathbf{1}$

Avendo ottenuto f_{-4} pari a zero, l'algoritmo si ferma. Questo sifnifica che il numero reale 0.3125 ha rappresentazione binaria esatta, pari a $(a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}) = 0101$.

Poichè era richiesta la rappresentazione su 6 bit per la parte frazionaria, si aggiungono due ulteriori zeri a destra: *R* = **0.010100**.

Esercizio 11

Data la rappresentazione **A** = $(11110001)_2$ di un intero in complemento a 2, trovarne il valore in base 10.

a = ______

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 11

Dopo aver notato che **A** inizia per 1 e che pertanto **a** non può che essere negativo, il suo valore assoluto è dato dalla formula due^8-**A**, dove **A** viene trattato come se fosse un naturale:

$2^8 - 11110001 = 256 - (2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0) = 256 - (128 + 64 + 32 + 16 + 1) = 256 - 241 = (15)_{10}$, ossia *quindici*.

Ricapitolando **a** = **-15**.

Esercizio 12

Data la rappresentazione in virgola mobile **R** = {s,F,E}, dove s=1, F=01000 (parte frazionaria su 5 bit) ed E=010 (esponente su 3 bit), a quale numero reale ***r*** corrisponde?

r = ___________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 12

Il significando *m* di ***r*** è: 1.01000, per via dell'uno implicito. L'esponente è dato dal valore di E, come naturale, a cui viene sottratto il bias. In questo caso E vale 010 ed il bias 011, dunque la differenza dà -1. In definitiva r=1.01000·due^{-1}, ossia 0.101000 (basta infatti spostare il separatore decimale a sinistra di uno).

Pertanto ***r*** = $2^{-1}+2^{-3}$ = 0.5 + 0.125 = **-0.625**.

Esercizio 13

Dato il numero reale ***r***, la cui rappresentazione in virgola mobile **R** = {s, F, E} sia: s=1, F=01000 (parte frazionaria su 5 bit) ed E=010 (esponente su 3 bit), trovare la rappresentazione del numero reale ***r'***=2·***r***.

R'={s'=□, F'=□□□□□, E'= □□□ }

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 13

r’ avrà la stessa rappresentazione di **r**, ma con l’esponente incrementato di uno**.** Pertanto **E’ = 011.**
Complessivamente la rappresentazione cercata è:

R’={ **s’=1,   F’=01000,   E’= 011** }

Controprova: decodificando **R** si scopre che ***r*** = 0.625, mentre decodificando R’ si scopre che ***r’*** è 1.25, laddove 1.25 è effettivamente il doppio di 0.625.

Esercizio 14

Sia data la seguente rappresentazione R_1 di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (due per l'esponente, cinque per la parte frazionaria, uno per il segno): R_1={S,E,F}, con S = 0, E = 10 ed F = 00110.

- A quale numero reale r_1 corrisponde la rappresentazione R_1 ?
- Quanto vale in base dieci il minimo numero r_2 rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al "-∞" ?

r_1 ____________________	r_2 ____________________

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

Soluzione Esercizio 14

Il significando m_1 vale 1.00110, per via dell'uno implicito.

L'esponente e_1 vale E_1-*bias* = 10 - 01 = +1

S=1 (ossia il numero è negativo).

Pertanto $r_1 = -1.00110 \cdot due^{+1} = -10.0110 = -(2^{+1} + 2^{-2} + 2^{-3}) = -(2 + 0.25 + .125) =$ **-2.375**

Il massimo reale negativo è quello associato al segno positivo (S_2=1), al massimo esponente E_2=11 ed alla massima parte frazionaria F_2=11111.

Il significando m_2 corrispondente vale: 1.11111, mentre l'esponente e_2 vale: 11-01 = +2.

Pertanto $r_2 = -1.11111 \cdot due^{+2} = -111.111 = 2^2+2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}$ = **-7.875**.

Esercizio 15

Sia dato il numero reale r = -13.8125. Calcolare la sua rappresentazione in virgola mobile su 16 bit. Seguire lo standard IEEE-754 half-precision, ovvero: 1 bit per il segno, 5 bit per l'esponente, 10 bit per la parte frazionaria del significando.

Soluzione Esercizio 15

Siccome r è negativo, il bit del segno sarà s=1. Calcolo adesso la rappresentazione del valore assoluto di r in base 2.

$|r|$ = 13.8125 = 13 + 0.8125. La parte intera (13) e quella frazionaria (0.8125) possono essere convertite in base 2 separatamente, rispettivamente con l'algoritmo "DIV&MOD" e l'algoritmo "parte frazionaria - parte intera".

Conversione della parte intera in base 2:

13/2 = 6, resto = 1

6/2 = 3, resto = 0

3/2 = 1, resto = 1

1/2 = **0**, resto = 1 => FINE

13 = $(1101)_2$

Conversione della parte frazionaria in base 2:

0.8125*2 = 1.625, parte intera = 1

0.625*2 = 1.25, parte intera = 1

0.25*2 = 0.5, parte intera = 0

0.5*2 = 1, parte intera = 1 => FINE

0.8125 = $(0.1101)_2$

Quindi: 13.8125 = $(1101.1101)_2$

Sposto la virgola di tre posizioni verso sinistra per ottenere il significando nella forma $(1.F)_2$.

1101.1101 = 1.1011101 due^{+3}

La parte frazionaria sarà quindi F = 1011101000. Adesso devo rappresentare l'esponente, che vale 3, nella rappresentazione intera con bias E. Quindi devo imporre che E-bias = 3. Il bias vale 2^{k-1}-1 dove k sono i bit su cui è rappresentato l'esponente. Nel nostro caso k=5, quindi bias=15. Se E-15 = 3 allora E = 3+15 = 18.

Conversione di E in base 2:

18/2 = 9, resto 0

9/2 = 4, resto 1

4/2 = 2, resto 0

2/2 = 1, resto 0

1/2 = 0, resto 1 => FINE

18 = $(10010)_2$

La rappresentazione di r sarà quindi R = **1 10010 1011101000**.