

# **Rappresentazione dei Numeri**

**Esercizi risolti**

**a cura del professor Marco Cococcioni**

**Versione 0.15**

### Esercizio 1

Sia  $A$  il naturale che rappresenta l'intero  $a = -31$  in complemento a due su 6 bit. Trovare  $A$ , esprimendolo in binario. Successivamente trovarne anche la rappresentazione in base 16.

**A (espresso in binario)**

**A (espresso in base 16)** \_\_\_\_\_

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 1

La rappresentazione cercata è data dal naturale  $2^6 - ABS(-31) = 64 - 31 = 33$ , ossia  $2^5 + 2^0$ : 100001.

Il naturale 33 in base sedici ha rappresentazione 21, come si può facilmente scoprire raggruppando le cifre di quattro in quattro da destra ed aggiungendo 2 zeri a sinistra:

0010-0001  
└──┬──┘ └──┬──┘  
  2   1

Ovviamente, si sarebbe giunti alla stessa soluzione, applicando l'algoritmo Div&Mod al naturale 33 ed usando come base 16:

$$q_0 = 33$$

$$q_1 = 33 \text{ div } 16 = 2 \quad a_0 = 33 \text{ mod } 16 = 1$$

$$q_2 = 2 \text{ div } 16 = 0 \quad a_1 = 2 \text{ mod } 16 = 2$$

Pertanto, ancora, il naturale 33 in base 16 ha rappresentazione  $(21)_{16}$  (e si legge due uno in base sedici).

## Esercizio 2

Data la rappresentazione  $\mathbf{A} = 01101$ , dire a quale intero  $\mathbf{a}$  essa corrisponde nell'ipotesi di aver utilizzato la rappresentazione con *bias* su 5 bit.

Inoltre, data la rappresentazione  $\mathbf{R} = \{0, 01101, 1000000000\}$ , trovare il numero reale  $\mathbf{r}$  corrispondente nell'ipotesi di rappresentazione in virgola mobile e precisione dimezzata (*half precision*).

$\mathbf{a} =$ _____	$\mathbf{r} =$ _____
----------------------	----------------------

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

## Soluzione Esercizio 2

Per trovare **a** da **A** basta togliere ad **A** il bias. Il bias vale  $2^{K-1}-1$ . Per  $K=5$ , bias = 01111 = 15.  
Pertanto  $01101-01111 = 13-15 = -2 \Rightarrow$  Pertanto l'intero **a** cercato vale -2.

Data  $\mathbf{R}=\{0, 01101, 1000000000\}$ , si ha che:

$s = 0$  (il numero reale **r** cercato è dunque positivo)

$E = 01101$  ed

$F = 1000000000$

La mantissa  $m$  sarà pertanto il reale 1.1000000000 (per via dell'1 implicito).

L'esponente  $e = -2$ , in virtù della rappresentazione con bias (vedere sopra).

Pertanto  $r = m \cdot \text{due}^{-2} = 1.1 \cdot \text{due}^{-2} = 0.011 \cdot \text{due}^0 = 2^{-2} + 2^{-3} = 0.25 + 0.125 = \mathbf{0.375}$ .

### Esercizio 3

Trovare la rappresentazione di -64 in complemento a due su 7 bit, se rappresentabile. Trovarne inoltre la rappresentazione in modulo e segno, sempre su 7 bit (e sempre al patto che sia rappresentabile).

-64 è rappresentabile in *c2* su 7 bit (        )

-64 non è rappresentabile in *c2* su 7 bit

-64 è rappresentabile in *ms* su 7 bit (        )

-64 non è rappresentabile in *ms* su 7 bit

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 3

L'intervallo di rappresentabilità in complemento a 2 su 7 bit è  $[-2^{(7-1)}, +2^{(7-1)}-1]$ , ossia  $[-64, +63]$ . Pertanto -64 è rappresentabile. La sua rappresentazione A è data da  $2^7-64 = 128-64 = 64$ , ossia **1000000**.

Invece l'intervallo di rappresentabilità in modulo e segno su 7 bit è  $[-2^{(7-1)}-1, +2^{(7-1)}-1]$ , ossia  $[-63, +63]$  e di conseguenza -64 **non è rappresentabile in modulo e segno su 7 bit**.

#### Esercizio 4

Dara la rappresentazione in virgola mobile  $R=\{s,F,E\}$ , dove  $s=1$ ,  $F=01000$  (mantissa su 5 bit) ed  $E=010$  (esponente su 3 bit), a quale numero reale  $r$  corrisponde?

$r =$  \_\_\_\_\_

*(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)*



### Soluzione Esercizio 4

La mantissa del numero è 1.01000 per via dell'*uno implicito*.

Il numero  $r$  in base due è  $1.01000 \cdot \text{due}^{-1}$ , ossia  $0.101000$ , che in base dieci vale  $2^{-1} + 2^{-3} = 0.5 + 0.125$ , da cui segue che  $r = \mathbf{-0.625}$ .

### Esercizio 5

Trovare la rappresentazione binaria **A** in complemento a 2 dell'intero **a** = -31 su  $p = 6$  bit.

Trovare inoltre la rappresentazione in base 8 del naturale **A** appena trovato.

**A (in base 2)** \_\_\_\_\_ **A (in base 8)** \_\_\_\_\_

*(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)*

### Soluzione Esercizio 5

Trattandosi di un numero negativo, il naturale  $A$  vale  $2^p - |-31| = 64 - 31 = 33_{(10)}$ , ossia  $A=100001_{(2)}$ .

Per esprimere  $A$  in base 8 basta raggruppare le cifre a tre a tre partendo da sinistra e decodificare ciascun gruppo mediante conversione da binario a decimale:

$A=41_{(8)}$  (e si legge quattro uno in base otto).

### Esercizio 6

Dato il numero naturale  $A$  la cui codifica in base 5 è 104, trovarne la codifica in base 2.

Successivamente, assumendo che la rappresentazione binaria trovata sia quella dell'esponente  $E$  di un numero reale in *half precision* ( $K=5$ ), dire quanto vale l'esponente intero  $e$  corrispondente.

$A$ (in base 2) _____ $e$ _____
---------------------------------

*(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)*

### Soluzione Esercizio 6

Il numero  $104_{(5)}$  corrisponde al decimale  $1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^0 = 29_{(10)}$ .

$29_{(10)}$  equivale a  $16+8+4+1$ , ossia  $11101_{(2)}$ .

Considerando  $11101$  come il valore di  $E$ , *l'intero e corrispondente è il naturale che si ottiene sottraendo ad  $E$  il bias  $B = K^{5-1} - 1 = 15$ , ossia  $29 - 15 = 14$ . Dunque l'esponente  $e$  è positivo e vale **14**.*

### Esercizio 7

Rappresentare il numero intero decimale  $a = -31$  in base 3 su 5 cifre, mediante tecnica del modulo e segno (si utilizzi la cifra 1 per codificare il segno).

**A (ms base 3)**   

*(spazio riservato allo svolgimento dell'esercizio)*

### Soluzione Esercizio 7

Per prima cosa occorre trovare la rappresentazione del modulo di  $a$  su 4 cifre.

Notando che  $31 = 3^3 + 3^1 + 3^0$ , segue che la rappresentazione su quattro cifre è 1011.

Premettendo il segno (rappresentato con la cifra ad 1, in analogia a quanto avviene in base 2), si ottiene la rappresentazione cercata: **11011**.

### Esercizio 8

Sia data la seguente rappresentazione  $R_1$  di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (tre per l'esponente, quattro per la mantissa, uno per il segno):  $R_1 = \{S, E, F\}$ , con  $S = 0$ ,  $E = 010$  ed  $F = 1010$ .

- A quale numero reale  $r_1$  corrisponde la rappresentazione  $R_1$  ?
- Quanto vale in base dieci il massimo numero  $r_2$  rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al “ $+\infty$ ” ?

$r_1$  \_\_\_\_\_

$r_2$  \_\_\_\_\_

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione



### Soluzione Esercizio 8

La mantissa  $m_1 = 1.1010$ , per via dell'uno implicito.

L'esponente  $e_1$  vale  $E_1 - bias = 010 - 011 = -1$

$S=0$  (ossia il numero è positivo).

Pertanto  $r_1 = 1.1010 \cdot due^{-1} = 0.11010 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} = 0.5 + 0.25 + .0625 = +0.8125$ .

Il massimo reale positivo è quello associato al segno positivo ( $S_2=0$ ), al massimo esponente  $E_2=111$  ed alla massima mantissa  $F_2=1111$ .

La mantissa  $m_2$  associata vale: 1.1111, mentre l'esponente  $e_2$  associato vale:  $111 - 011 = 7 - 3 = 4$ .

Pertanto  $r_2 = 1.1111 \cdot due^{+4} = 11111 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$ .

### Esercizio 9

- Sia dato il numero 105 in base 6. Trovarne la rappresentazione in base 10 e quella in base 2 .

**Base 10** \_\_\_\_\_

**Base 2** \_\_\_\_\_

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 9

105 in base 6 corrisponde a 41 in base 10. Infatti, utilizzando la formula della sommatoria, si ottiene:

$$1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^0 = 36 + 5 = (41)_{10}.$$

La rappresentazione di  $(41)_{10}$  in base 2 si può ottenere con la procedura Div&Mod:

$$q_0 = 41$$

$$q_1 = 41 \text{ div } 2 = 20 \quad a_0 = 41 \text{ mod } 2 = 1$$

$$q_2 = 20 \text{ div } 2 = 10 \quad a_1 = 20 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_3 = 10 \text{ div } 2 = 5 \quad a_2 = 10 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_4 = 5 \text{ div } 2 = 2 \quad a_3 = 5 \text{ mod } 2 = 1$$

$$q_5 = 2 \text{ div } 2 = 1 \quad a_4 = 2 \text{ mod } 2 = 0$$

$$q_6 = 1 \text{ div } 2 = \mathbf{0} \quad a_5 = 1 \text{ mod } 2 = 1$$

Pertanto la rappresentazione in base due cercata consta di 6 bit  $(a_5 \dots a_0)$  : **101001**.

### Esercizio 10

Dato il numero reale  $r = 0.3125$ , trovarne la rappresentazione binaria  $R$  in virgola fissa, usando 6 bit per la parte decimale.

$$R = 0.\square\square\square\square\square\square$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 10

Si pone  $f_0 = 0.3125$  e poi si applica l'algoritmo "Parte frazionaria – Parte intera":

$$f_0 = 0.3125$$

$$f_1 = F(f_0 \cdot 2 = 0.3125 \cdot 2 = \mathbf{0.625}) = 0.625 \quad a_{.1} = I(0.625) = \mathbf{0}$$

$$f_2 = F(f_1 \cdot 2 = 0.625 \cdot 2 = \mathbf{1.25}) = 0.25 \quad a_{.2} = I(1.25) = \mathbf{1}$$

$$f_3 = F(f_2 \cdot 2 = 0.25 \cdot 2 = \mathbf{0.5}) = 0.5 \quad a_{.3} = I(0.5) = \mathbf{0}$$

$$f_4 = F(f_3 \cdot 2 = 0.5 \cdot 2 = \mathbf{1.0}) = \mathbf{0} \quad a_{.4} = I(1.0) = \mathbf{1}$$

Avendo ottenuto  $f_4$  pari a zero, l'algoritmo si ferma. Questo significa che il numero reale 0.3125 ha rappresentazione binaria esatta, pari a  $(a_{.1}a_{.2}a_{.3}a_{.4}) = 0101$ .

Poichè era richiesta la rappresentazione su 6 bit per la parte frazionaria, si aggiungono due ulteriori zeri a destra:  $R = \mathbf{0.010100}$ .

### Esercizio 11

Data la rappresentazione  $\mathbf{A} = (11110001)_2$  di un intero in complemento a 2, trovarne il valore in base 10.

$$\mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 11

Dopo aver notato che **A** inizia per 1 e che pertanto **a** non può che essere negativo, il suo valore assoluto è dato dalla formula  $2^8 - \mathbf{A}$ , dove **A** viene trattato come se fosse un naturale:

$$2^8 - 11110001 = 256 - (2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0) = 256 - (128 + 64 + 32 + 16 + 1) = 256 - 241 = (15)_{10}, \text{ ossia } \textit{quindici}.$$

Ricapitolando **a** = **-15**.

### Esercizio 12

Data la rappresentazione in virgola mobile  $\mathbf{R} = \{s,F,E\}$ , dove  $s=1$ ,  $F=01000$  (mantissa su 5 bit) ed  $E=010$  (esponente su 3 bit), a quale numero reale  $r$  corrisponde?

$$r = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione



### Soluzione Esercizio 12

La mantissa  $m$  di  $r$  è: 1.01000, per via dell'uno implicito. L'esponente è dato da E meno il bias. In questo caso E vale 010 ed il bias 011, dunque la differenza da -1. In definitiva  $r=1.01000 \cdot \text{due}^{-1}$ , ossia 0.101000 (basta infatti spostare il separatore decimale a sinistra di uno).

Pertanto  $r = 2^{-1} + 2^{-3} = 0.5 + 0.125 = \mathbf{-0.625}$ .

### Esercizio 13

Dato il numero reale  $r$ , la cui rappresentazione in virgola mobile  $\mathbf{R} = \{s, F, E\}$  sia:  $s=1$ ,  $F=01000$  (mantissa su 5 bit) ed  $E=010$  (esponente su 3 bit), trovare la rappresentazione del numero reale  $r'=2 \cdot r$ .

$$\mathbf{R}' = \{s' = \square, F' = \square\square\square\square\square, E' = \square\square\square\}$$

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 13

$r'$  avrà la stessa rappresentazione di  $r$ , ma con l'esponente incrementato di uno. Pertanto  $E' = 011$ .  
Complessivamente la rappresentazione cercata è:

$$\mathbf{R'} = \{ \mathbf{s'=1, F'=01000, E'=011} \}$$

Controprova: decodificando  $\mathbf{R}$  si scopre che  $r = 0.625$ , mentre decodificando  $\mathbf{R'}$  si scopre che  $r'$  è 1.25, laddove 1.25 è effettivamente il doppio di 0.625.

### Esercizio 14

Sia data la seguente rappresentazione  $R_1$  di un numero reale in virgola mobile su 8 bit (due per l'esponente, cinque per la mantissa, uno per il segno):  $R_1 = \{S, E, F\}$ , con  $S = 0$ ,  $E = 10$  ed  $F = 00110$ .

- A quale numero reale  $r_1$  corrisponde la rappresentazione  $R_1$  ?
- Quanto vale in base dieci il minimo numero  $r_2$  rappresentabile su 8 bit, ossia quello associato al “ $-\infty$ ” ?

$r_1$  \_\_\_\_\_

$r_2$  \_\_\_\_\_

Nello spazio sottostante riportare i passaggi più significativi della soluzione

### Soluzione Esercizio 14

La mantissa  $m_1 = 1.00110$ , per via dell'uno implicito.

L'esponente  $e_1$  vale  $E_1 - bias = 10 - 01 = +1$

$S=1$  (ossia il numero è negativo).

Pertanto  $r_1 = -1.00110 \cdot due^{+1} = -10.0110 = - (2^{+1} + 2^{-2} + 2^{-3}) = - (2 + 0.25 + .125) = -2.375$

Il massimo reale negativo è quello associato al segno positivo ( $S_2=1$ ), al massimo esponente  $E_2=11$  ed alla massima mantissa  $F_2=11111$ .

La mantissa  $m_2$  associata vale:  $1.11111$ , mentre l'esponente  $e_2$  associato vale:  $11 - 01 = +2$ .

Pertanto  $r_2 = -1.11111 \cdot due^{+2} = -111.111 = 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = -7.875$ .

### **Esercizio 15**

Sia dato il numero reale  $r = -13.8125$ . Calcolare la sua rappresentazione in virgola mobile su 16 bit. Seguire lo standard IEEE-754 half-precision, ovvero: 1 bit per il segno, 5 bit per l'esponente, 10 bit per la parte frazionaria della mantissa.

### Soluzione Esercizio 15

Siccome  $r$  è negativo, il bit del segno sarà  $s=1$ . Calcolo adesso la rappresentazione del valore assoluto di  $r$  in base 2.

$|r| = 13.8125 = 13 + 0.8125$ . La parte intera (13) e quella frazionaria (0.8125) possono essere convertite in base 2 separatamente, rispettivamente con l'algoritmo "DIV&MOD" e l'algoritmo "parte frazionaria - parte intera".

Conversione della parte intera in base 2:

$$13/2 = 6, \text{ resto} = 1$$

$$6/2 = 3, \text{ resto} = 0$$

$$3/2 = 1, \text{ resto} = 1$$

$$1/2 = 0, \text{ resto} = 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$13 = (1101)_2$$

Conversione della parte frazionaria in base 2:

$$0.8125 * 2 = 1.625, \text{ parte intera} = 1$$

$$0.625 * 2 = 1.25, \text{ parte intera} = 1$$

$$0.25 * 2 = 0.5, \text{ parte intera} = 0$$

$$0.5 * 2 = 1, \text{ parte intera} = 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$0.8125 = (0.1101)_2$$

$$\text{Quindi: } 13.8125 = (1101.1101)_2$$

Sposto la virgola di tre posizioni verso sinistra per ottenere il significando nella forma  $(1.F)_2$ .

$$1101.1101 = 1.1011101 \text{ due}^{+3}$$

La parte frazionaria sarà quindi  $F = 1011101000$ . Adesso devo rappresentare l'esponente, che vale 3, nella rappresentazione intera con bias E. Quindi devo imporre che  $E\text{-bias} = 3$ . Il bias vale  $2^{k-1}-1$  dove  $k$  sono i bit su cui è rappresentato l'esponente. Nel nostro caso  $k=5$ , quindi  $\text{bias}=15$ . Se  $E-15 = 3$  allora  $E = 3+15 = 18$ .

Conversione di E in base 2:

$$18/2 = 9, \text{ resto} 0$$

$$9/2 = 4, \text{ resto} 1$$

$$4/2 = 2, \text{ resto} 0$$

$$2/2 = 1, \text{ resto} 0$$

$$1/2 = 0, \text{ resto} 1 \Rightarrow \text{FINE}$$

$$18 = (10010)_2$$

La rappresentazione di  $r$  sarà quindi  $R = \mathbf{1\ 10010\ 1011101000}$ .