



### MATERIALE COMPOSITO (DEFINIZIONE OPERATIVA)

MATERIALE OTTENUTO PER UNIONE DI DUE O PIU' MATERIALI, CHIMICAMENTE E/O FISICAMENTE DISTINTI A LIVELLO MACROSCOPICO ED INSOLUBILI, AVENTE PROPRIETA' TECNOLOGICAMENTE MIGLIORI RISPETTO A QUELLE DEI COMPONENTI SOTTO UNO O PIU' ASPETTI

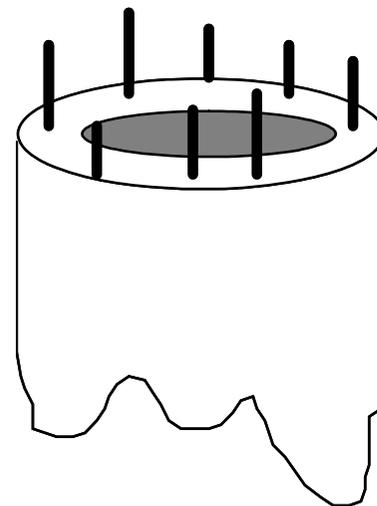


## COMPOSITI NATURALI

MOLTI TESSUTI NATURALI POSSONO ESSERE FATTI RIENTRARE NELLA DEFINIZIONE PRECEDENTE:

- LEGNO
- OSSA
- MUSCOLI

ESEMPIO: CANNE DI BAMBU', COSTITUITE DA FIBRE DI CELLULOSA AD ALTA RESISTENZA ORIENTATE IN SENSO PARALLELO ALL'ASSE, ANNEGATE IN UNA MATRICE POROSA AVENTE FUNZIONI DI COLLEGAMENTO.



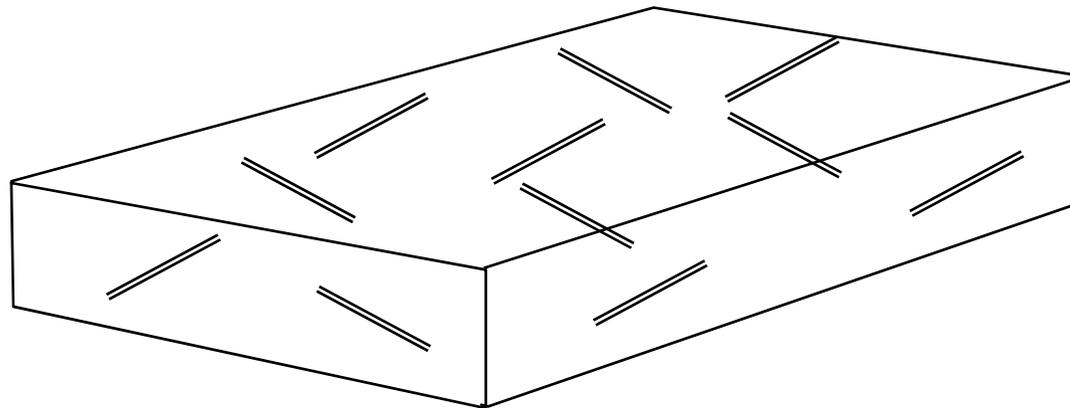


## PRIME APPLICAZIONI DEI MATERIALI COMPOSITI

ANTICO EGITTO: FABBRICAZIONE MATTONI CON ARGILLA MISCHIATA A PAGLIA TRITATA.

L'ARGILLA, COSTITUENTE BASE DEL MATTONE, HA UN'OTTIMA RESISTENZA A COMPRESSIONE, MA UNA SCARSA RESISTENZA A TRAZIONE

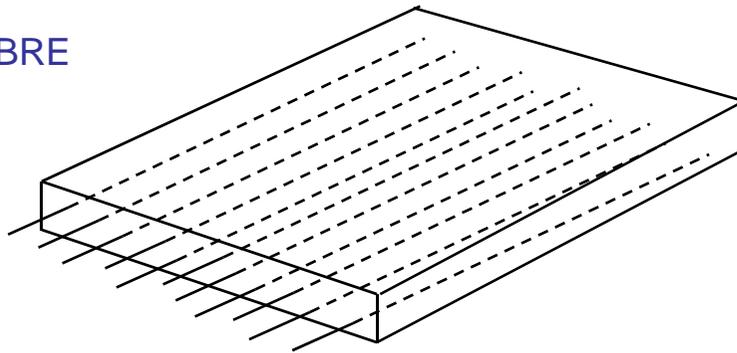
LA PAGLIA CONSENTE DI MIGLIORARE LA RESISTENZA A TRAZIONE DEL MATTONE



## MATERIALI COMPOSITI MODERNI

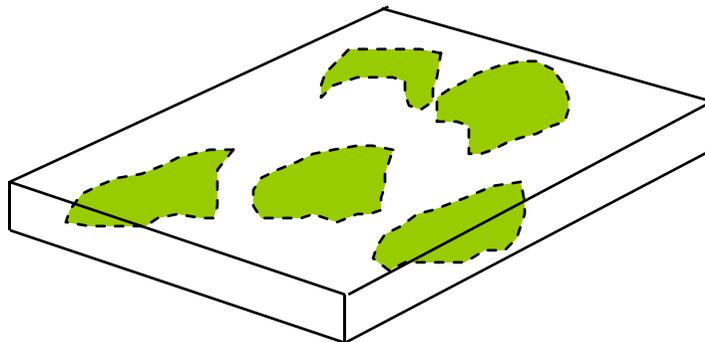
SONO GENERALMENTE COSTITUITI DALL'UNIONE DI UN MATERIALE DI RIEMPIMENTO (MATRICE) CON UNO DI RINFORZO E POSSONO ESSERE CLASSIFICATI IN BASE ALLA FORMA DI QUEST'ULTIMO:

- A FIBRE

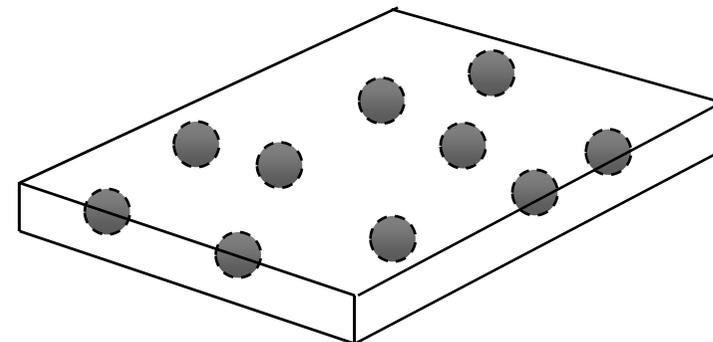


GLI UNICI AVENTI UNA LARGA DIFFUSIONE AL MOMENTO ATTUALE SONO I COMPOSITI A FIBRE

- A FIOCCHI (FLAKES)



- A PARTICELLE (PARTICULATE)





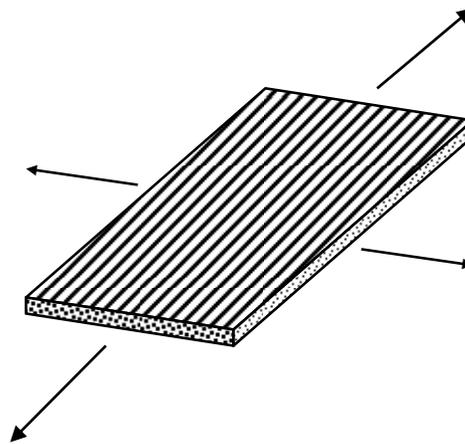
### PRINCIPALI CARATTERISTICHE PECULIARI DI UNA STRUTTURA IN MATERIALE COMPOSITO

- piccolo spessore
- forte anisotropia del materiale per quanto riguarda:
  - proprietà elastiche
  - resistenza
- elevate prestazioni in termini di rigidità e resistenza
- maggiori difficoltà di analisi rispetto ad un materiale isotropo, con:
  - riduzione dei casi per i quali è possibile una soluzione analitica
  - maggiore ricorso a metodi numerici, quali il FEM



## MACROMECCANICA DELLA LAMINA

- STUDIA IL COMPORTAMENTO MACROSCOPICO DELLA LAMINA, CONSIDERATA COME UN CORPO **ELASTICO, OMOGENEO, ANISOTROPO** (ORTOTROPO)



- FORNISCE LE RELAZIONI TRA STATI DI TENSIONE E DEFORMAZIONE, NEI DIVERSI POSSIBILI SISTEMI DI RIFERIMENTO



## MACROMECCANICA DELLA LAMINA

### TIPI DI RELAZIONE $\sigma$ - $\varepsilon$

#### Notazione

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

#### Legge di Hooke

*Matr. di rigidezza*

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\}$$

*Matr. di cedevolezza*

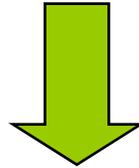
Per materiali che ammettano  
un potenziale elastico:

$$C_{ij} = C_{ji}$$



## MATERIALI ANISOTROPI

- Gli elementi delle matrici  $[C]$  ed  $[S]$  sono tutti indipendenti tra loro



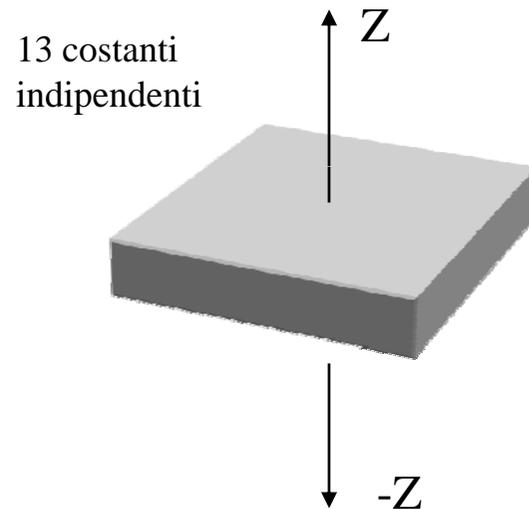
- Per caratterizzare completamente un materiale anisotropo sono necessarie **21** costanti elastiche indipendenti
- Per fortuna i materiali completamente anisotropi sono rari; la maggior parte dei materiali presenta alcune **SIMMETRIE** nella distribuzione spaziale delle proprietà meccaniche



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MATERIALI CON UN PIANO DI SIMMETRIA (MONOCLINI)

- Se il piano ortogonale all'asse Z è di simmetria, la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  deve restare la stessa cambiando il **verso** dell'asse Z.
- Dato che cambiando il verso dell'asse Z le componenti di deformazione  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$  cambiano di segno, mentre le componenti di tensione  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{xy}$  non cambiano di segno, per garantire l'invarianza devono annullarsi nella matrice [C] i termini che legano tra loro tali componenti.

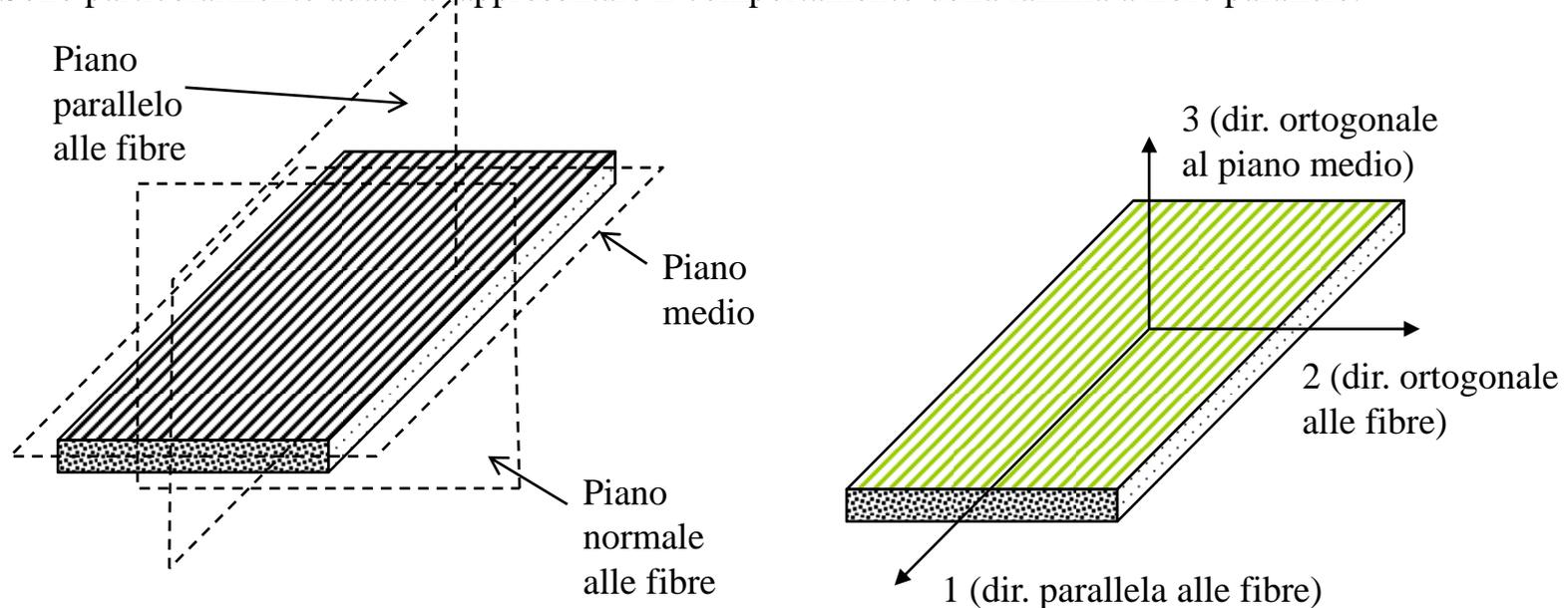


$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = 0$$

## MATERIALI CON TRE PIANI DI SIMMETRIA (ORTOTROPI)

Si dimostra che i piani devono essere tra loro ortogonali.

- Sono particolarmente adatti a rappresentare il comportamento della lamina a fibre parallele.



- Per questi materiali esiste un sistema di riferimento privilegiato, detto SISTEMA PRINCIPALE, i cui assi sono paralleli alle rette intersezione dei piani di simmetria ed in cui la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  assume una forma semplice; tale sistema è solitamente indicato con 1-2-3, per distinguerlo dal sistema generico indicato con X-Y-Z



- Nel sistema di riferimento principale la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & = & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

- Il materiale può essere quindi caratterizzato con **9** costanti indipendenti



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MATERIALI ORTOTROPICI

### RELAZIONE $\sigma$ - $\varepsilon$ IN TERMINI DI COSTANTI INGEGNERISTICHE

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{131}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}$$

- Le 9 costanti indipendenti possono essere viste come:

- 3 moduli di Young (dir. 1, 2 e 3)
- 3 moduli di taglio
- 3 coefficienti di Poisson

- Per simmetria infatti deve essere:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$$



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## LIMITAZIONI SULLE CARATTERISTICHE DEI MATERIALI

- Esistono alcune limitazioni sui valori che le costanti di un materiale possono assumere affinché il materiale stesso abbia senso fisico

### MATERIALI ISOTROPI

$$E > 0; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$
$$\frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$$
$$\Rightarrow \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

### MATERIALI ORTOTROPI

$$C_{ij}, S_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} E_{1-3}, G_{1-3} &> 0 \\ \nu_{ij} \cdot \nu_{ji} &< 1 \end{aligned}$$

$$1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{13} \cdot \nu_{31} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - 2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13} > 0$$



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## LAMINA ORTOTROPA IN STATO PIANO DI TENSIONE

- Si tratta di un modello molto importante in quanto i compositi sono generalmente utilizzati sotto forma di elementi di piccolo spessore, per i quali l'ipotesi di stato piano di tensione risulta soddisfacente; esistono però situazioni, trattate a parte, che richiedono analisi 3D.
- Nel sistema principale, la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  assume la forma seguente:

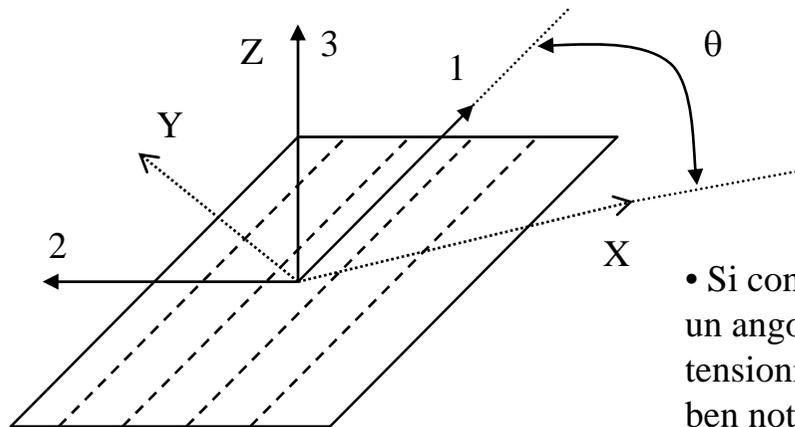
$$\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}$$

- Le matrici di rigidezza e cedevolezza comprendono **4** costanti indipendenti

## RELAZIONE $\sigma$ - $\varepsilon$ IN UN S.R. GENERICO



- Si consideri un SR generico (XYZ), ottenuto ruotando di un angolo  $\theta$  attorno all'asse "3" del SR principale (123); le tensioni nel nuovo SR potranno essere ottenute in base alle ben note relazioni di trasformazione dei tensori:

$$m = \cos(\vartheta); \quad n = \sin(\vartheta)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad o \quad \{\sigma_{xyz}\} = [T]^{-1} \cdot \{\sigma_{123}\}$$



## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Una relazione analoga vale per il tensore delle deformazioni, tenendo conto che la relativa componente di taglio,  $\varepsilon_{xy}$ , è pari a metà della componente ingegneristica,  $\gamma_{xy}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad o \quad \{\varepsilon_{xyz}\} = [R] \cdot \{\bar{\varepsilon}_{xyz}\}$$
$$\{\varepsilon_{123}\} = [R] \cdot \{\bar{\varepsilon}_{123}\}$$

$$\{\bar{\varepsilon}_{xyz}\} = [T]^{-1} \cdot \{\bar{\varepsilon}_{123}\}$$

$$\{\varepsilon_{xyz}\} = [R] \cdot \{\bar{\varepsilon}_{xyz}\} = [R] \cdot [T]^{-1} \cdot \{\bar{\varepsilon}_{123}\} = [R] \cdot [T]^{-1} \cdot [R]^{-1} \cdot \{\varepsilon_{123}\}$$



## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- E' adesso immediato costruire la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  nel generico SR.

$$\begin{aligned}\{\sigma_{xyz}\} &= [T]^{-1} \cdot \{\sigma_{123}\} = [T]^{-1} \cdot [Q] \cdot \{\varepsilon_{123}\} = \\ &= [T]^{-1} \cdot [Q] \cdot [R] \cdot [T] \cdot [R]^{-1} \cdot \{\varepsilon_{xyz}\} = [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon_{xyz}\}\end{aligned}$$

- La matrice di rigidità nel sistema generico ha la seguente forma:

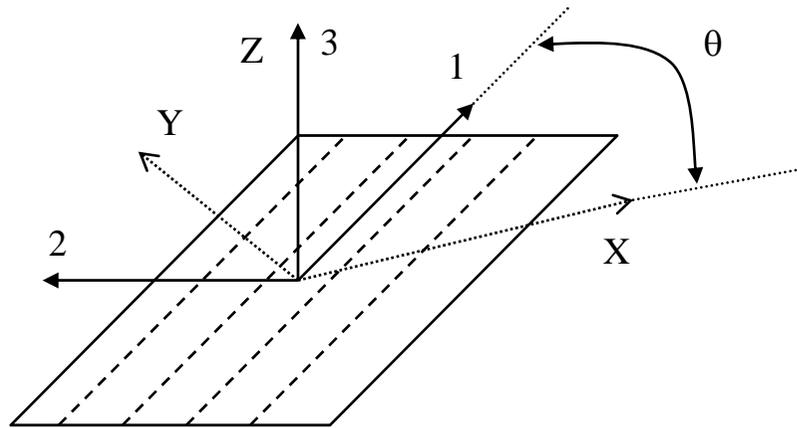
$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}$$

le cui componenti sono date da:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 4m^2n^2 \\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^4 + n^4 & m^2n^2 & -4m^2n^2 \\ -m^3n & mn(m^2 - n^2) & mn^3 & 2mn(m^2 - n^2) \\ -mn^3 & mn(n^2 - m^2) & m^3n & 2mn(n^2 - m^2) \\ m^2n^2 & -2m^2n^2 & m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{33} \end{Bmatrix}$$



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito



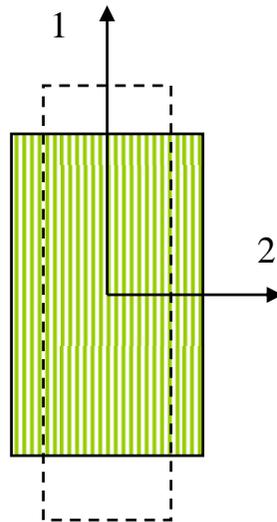
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

OSSERVAZIONE: Nel SR principale la relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  assume una forma semplice, mentre nel SR generico essa risulta simile a quella di un materiale anisotropo. I termini della matrice sono però funzione di 4 soli parametri, mentre in un materiale anisotropo i parametri indipendenti sarebbero 6.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

## ASPETTI PARTICOLARI DEL COMPORTAMENTO DELLA LAMINA ORTOTROPA

- Lamina sollecitata in modo che le direzioni principali dello stato di deformazione (o tensione) **coincidano** con il SR principale della lamina (123)



$$\varepsilon_1 = \hat{\varepsilon} \neq 0$$

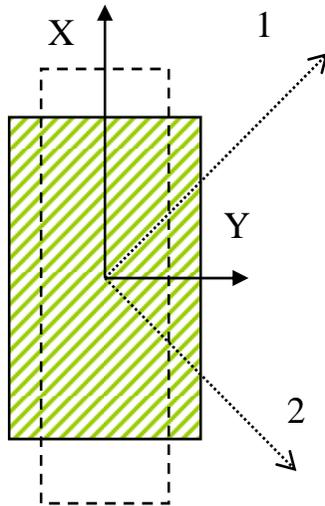
$$\varepsilon_2 = -\nu_{12} \cdot \varepsilon_1 \neq 0$$

$$\gamma_{12} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- In questo caso  $\tau_{12}=0$  e le direzioni principali delle tensioni coincidono con quelle delle deformazioni e con gli assi del SR 123.
- In generale, se le direzioni principali dello stato di deformazione (tensione) coincidono con gli assi del SR principale del materiale (123), esse coincidono anche con le direzioni principali dello stato di tensione (deformazione).
- Questo comportamento è analogo a quello ben noto di un qualsiasi materiale isotropo, per il quale le direzioni principali dello stato di tensione sono sempre coincidenti con quelle dello stato di deformazione.

- Lamina sollecitata in modo che le direzioni principali dello stato di deformazione (o tensione) **non coincidano** con il SR principale della lamina (123)



$$\varepsilon_x \neq 0$$

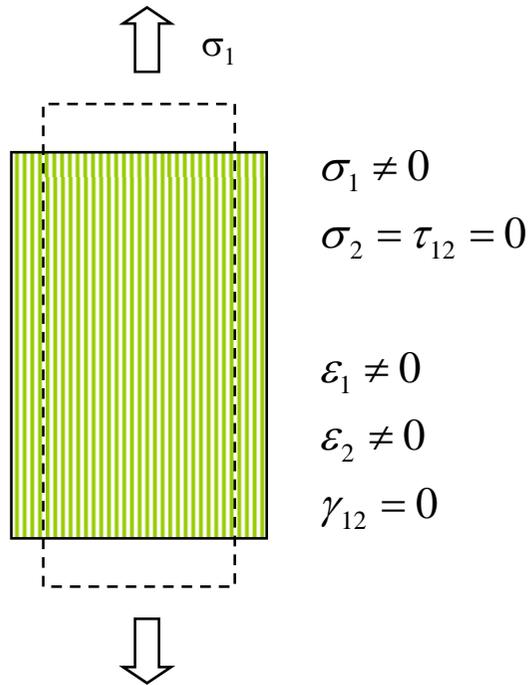
$$\varepsilon_y \neq 0$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

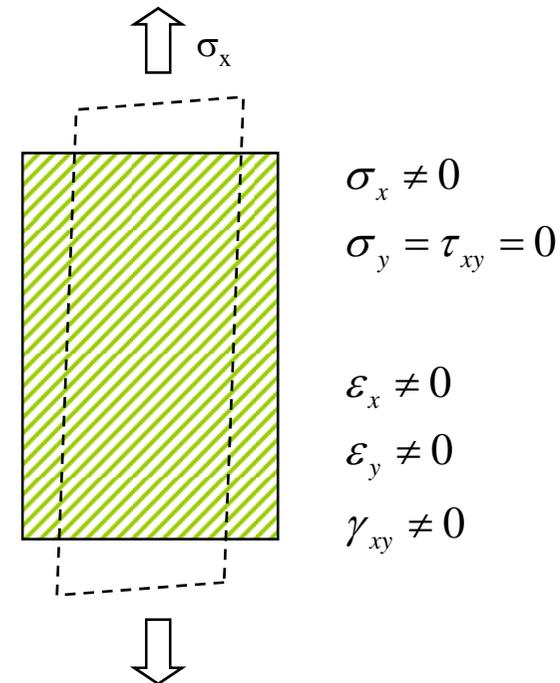
- In questo caso  $\tau_{xy}$  è diverso da 0 e le direzioni principali delle tensioni **non coincidono** con quelle delle deformazioni

- In generale, se le direzioni principali dello stato di deformazione (tensione) non coincidono con gli assi del SR principale del materiale (123), esse non coincidono neppure con le direzioni principali dello stato di tensione (deformazione).



• Se invece la si sollecita in una direzione inclinata rispetto alle fibre, essa mostrerà anche una deformazione di taglio, deformandosi come in figura

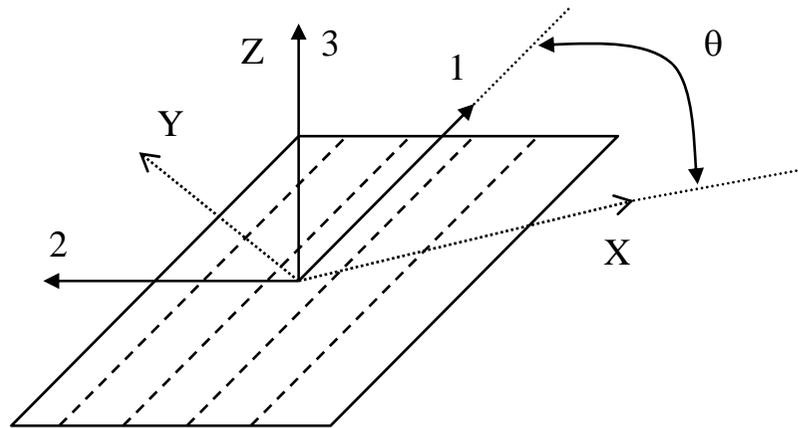
• Di conseguenza, se si sollecita la lamina nella direzione delle fibre essa mostra un comportamento analogo a quello di un materiale isotropo, allungandosi nella direzione del carico e contraendosi in direzione trasversale



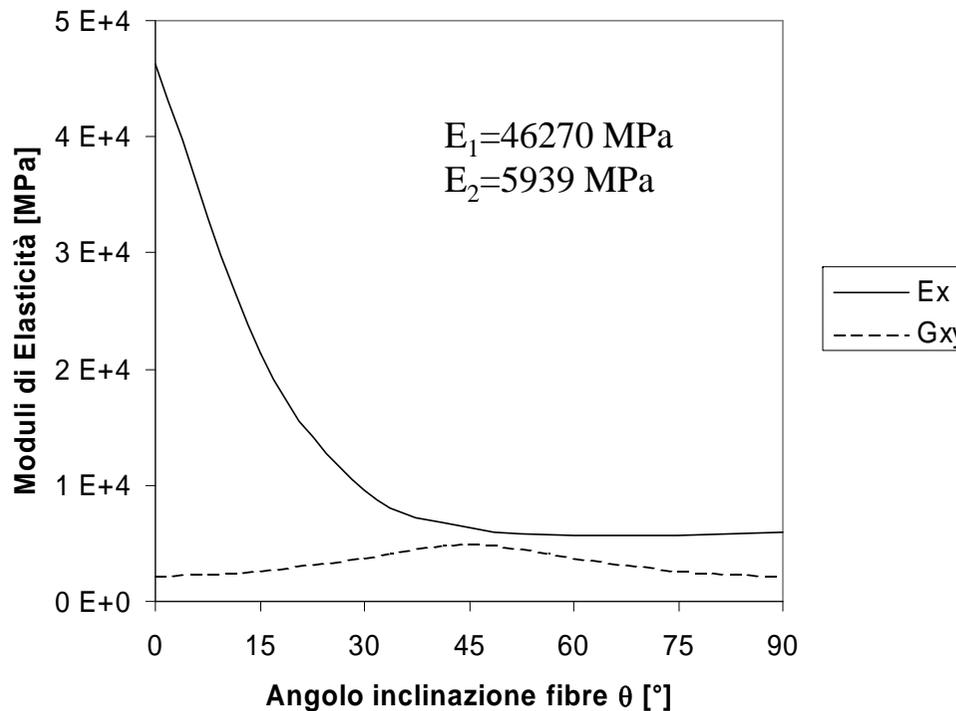


# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6



- La figura illustra la variazione di due costanti ingegneristiche del materiale, il modulo di Young in direzione "x" ( $E_x$ ) ed il modulo di taglio nel sistema "xy" ( $G_{xy}$ ) al variare dell'angolo  $\theta$  del SR "xy" con il SR principale del materiale. Si nota come  $G_{xy}$  presenti una variazione simmetrica con massimo a  $45^\circ$ , mentre  $E_x$  presenta una variazione graduale; da notare che  $E_x$  non assume necessariamente valore massimo o minimo agli estremi dell'intervallo.

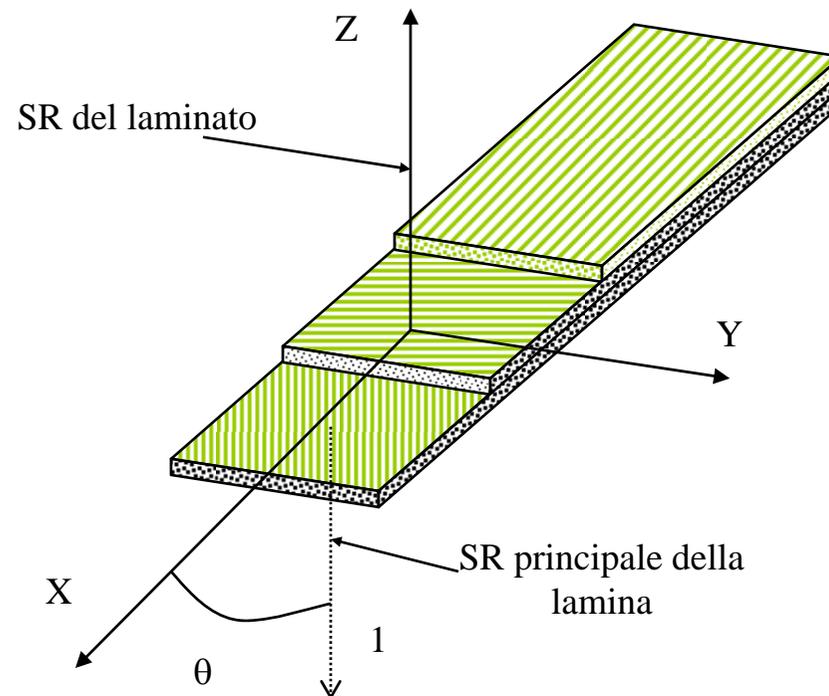




## MACROMECCANICA DEL LAMINATO

### SISTEMI DI RIFERIMENTO

- Nello studio dei laminati si usa solitamente un SR scelto caso per caso in base alla geometria del pezzo ed in generale non coincidente con i SR principali delle singole lamine
- Ciascuna lamina è caratterizzata dall'angolo che l'asse "1" del suo SR principale fa con la direzione di riferimento, in genere con l'asse "X" del SR del laminato.

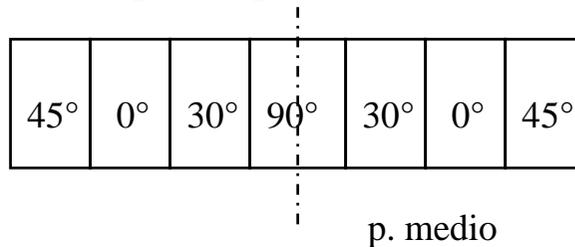




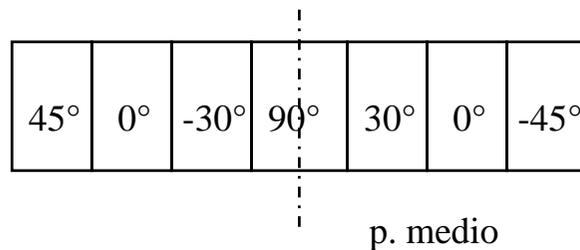
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## TIPI SPECIALI DI LAMINATI

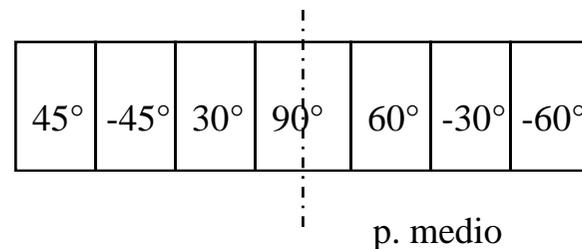
- **SIMMETRICI**: per ogni lamina con inclinazione  $\theta$  ne esiste un'altra con la stessa inclinazione in posizione simmetrica rispetto al piano medio



- **ANTISIMMETRICI**: per ogni lamina con inclinazione  $+\theta$  ne esiste un'altra con inclinazione  $-\theta$  in posizione simmetrica rispetto al piano medio



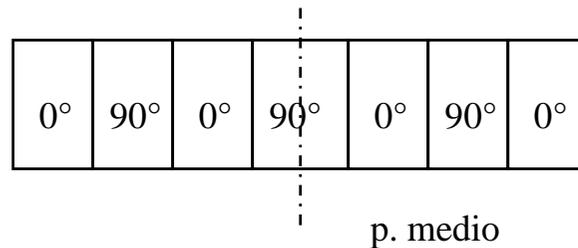
- **EQUILIBRATI**: per ogni lamina con inclinazione  $+\theta$  ne esiste un'altra con inclinazione  $-\theta$  in posizione qualsiasi



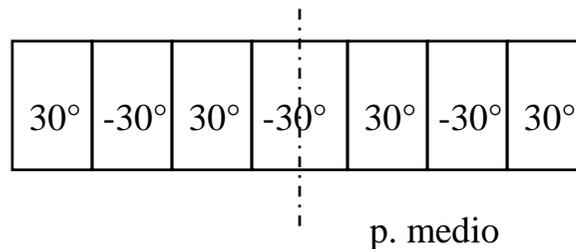


# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

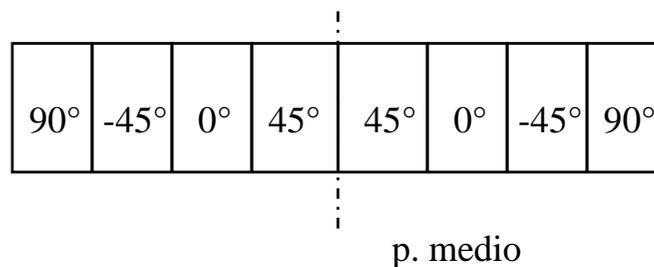
- “CROSS PLY”: laminati costituiti da una alternanza di lamine a  $0^\circ$  ed a  $90^\circ$ .



- “ANGLE PLY”: laminati costituiti da una alternanza di lamine a  $+\theta$  ed a  $-\theta$ .



- “QUASI ISOTROPI”: laminati **simmetrici** costituiti da un uguale numero di lamine a  $0^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$  e  $90^\circ$  (in qualsiasi ordine); devono essere costituiti da almeno 8 lamine ed hanno proprietà elastiche nel piano medio indipendenti dalla direzione.





## DESIGNAZIONE DEI LAMINATI

- La disposizione delle lamine (sequenza di impacchettamento o di “lay-up”) del laminato viene specificata attraverso una designazione convenzionale, in cui le orientazioni delle diverse lamine sono riportate nell'ordine in cui appaiono attraversando lo spessore.
- Esempio:

$[0/+45/-45/90]$   
oppure

$[0/\pm 45/90]$

$0^\circ$
$45^\circ$
$-45^\circ$
$90^\circ$

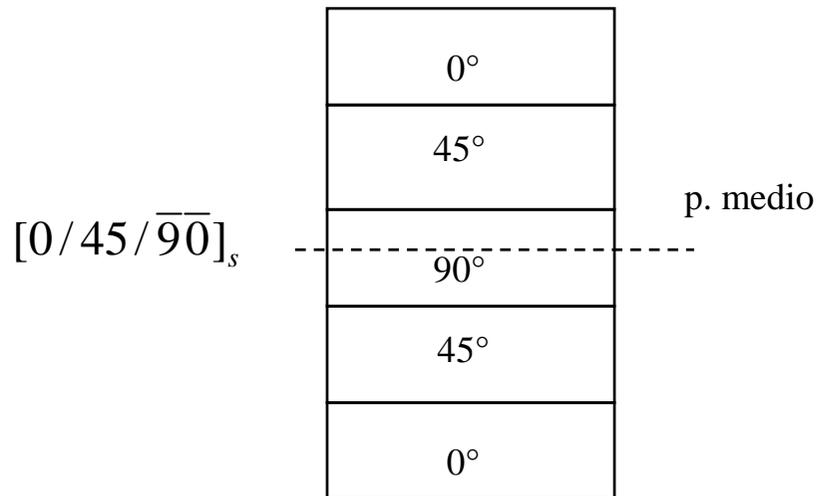
- Esistono poi speciali convenzioni volte a rendere la designazione più sintetica. Per laminati **simmetrici** si usa il pedice S, dopo aver indicato metà delle lamine:

$[0/45]_S$

$0^\circ$
$45^\circ$
$45^\circ$
$0^\circ$



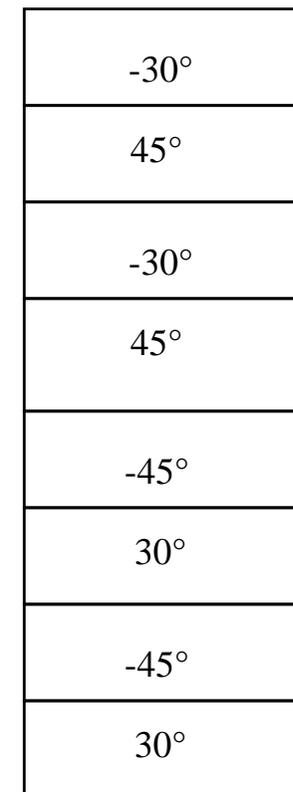
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito



- Per laminati **antisimmetrici** si usa il pedice “Q” dopo aver indicato metà delle lamine; si noti la possibilità di indicare sequenze ripetute attraverso parentesi ed un pedice numerico che indica il n° di ripetizioni:

- Nel caso in cui il piano medio attraversi una lamina, questa viene soprasegnata:

$[(-30/45)_2]_Q$



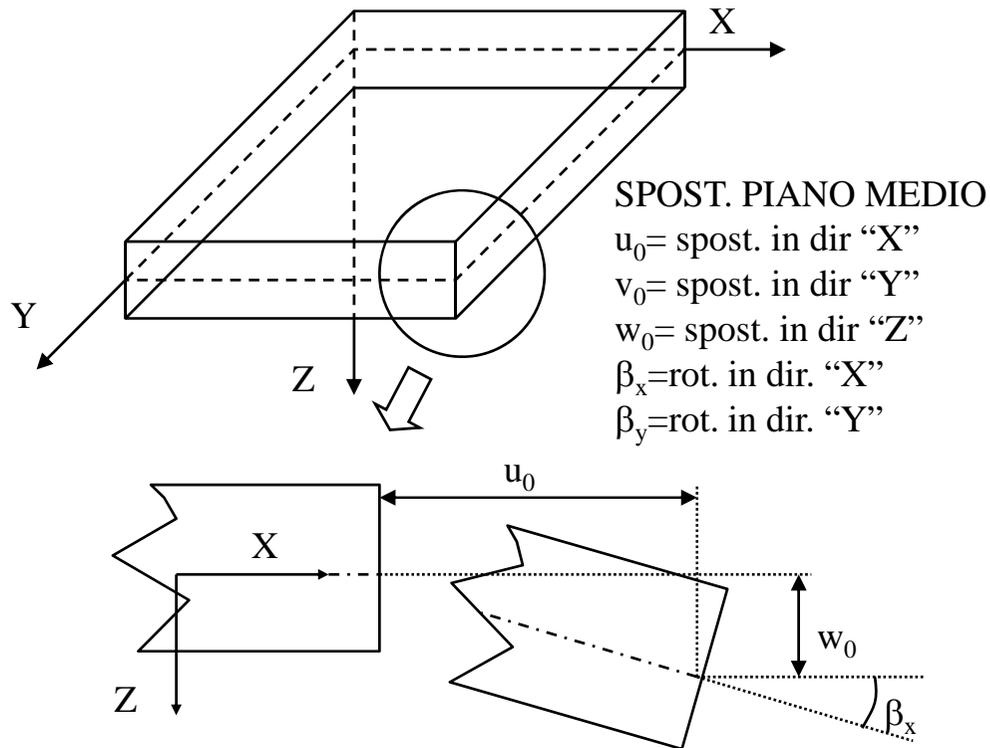


## TEORIA CLASSICA DELLA LAMINAZIONE

- Permette di analizzare il comportamento globale dei laminati, studiando la relazione tra carichi applicati e deformazioni e lo stato di sollecitazione
- Si basa sulle seguenti ipotesi:
  - Le lamine sono perfettamente connesse tra loro, con interfaccia rigida a taglio
  - Una linea ortogonale al piano medio prima della deformazione si mantiene tale anche dopo la deformazione (Kirchoff-Love)
- La prima ipotesi ha come conseguenza la continuità degli spostamenti e delle deformazioni attraverso l'interfaccia
- La seconda ipotesi è desunta dalla teoria dei gusci sottili e presuppone di trascurare la deformabilità a taglio del laminato
- E' necessario considerare che i classici limiti di validità della teoria dei gusci sottili applicabili nel caso dei materiali isotropi (spessore inferiore ad  $1/10$  delle altre dimensioni caratteristiche) possono non essere sufficientemente restrittivi nel caso dei materiali compositi, in quanto il rapporto tra rigidità a taglio e rigidità nel piano medio è, per questi materiali, assai inferiore a quello di un materiale convenzionale.



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito



- Calcolo spostamenti lungo lo spessore:

$$\beta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\beta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$u(z) = u_0 - \beta_x \cdot z = u_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(z) = u_0 - \beta_y \cdot z = u_0 - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}$$



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Calcolo deformazioni

*Deformazione nello spessore*

*Deformazione piano medio*

*Curvatura piano medio*

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(z) &= \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_{x0} + z \cdot k_x \\ \varepsilon_y(z) &= \frac{\partial v(z)}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \varepsilon_{y0} + z \cdot k_y \\ \gamma_{xy}(z) &= \frac{\partial u(z)}{\partial y} + \frac{\partial v(z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \\ &= \gamma_{xy0} + z \cdot k_{xy}\end{aligned}$$

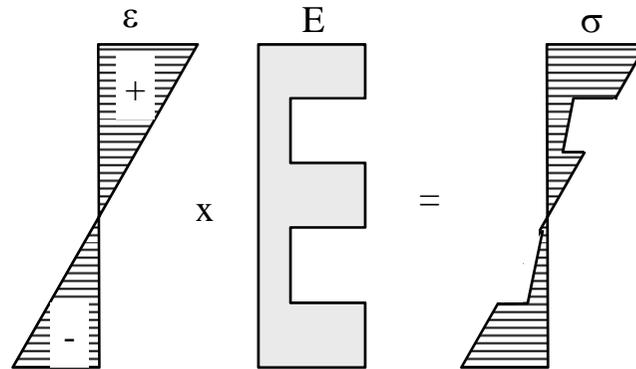
In forma sintetica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

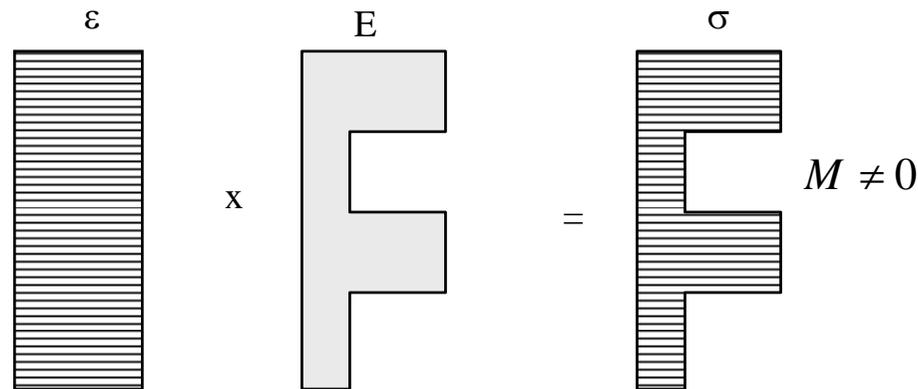


## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

OSSERVAZIONE 1: La deformazione è lineare e continua nello spessore, ma, a causa della discontinuità nei valori delle caratteristiche elastiche tra una lamina e l'altra, la tensione è discontinua



OSSERVAZIONE 2: Se si applica uno stato di deformazione uniforme (membranale) si osserva che lo stato di tensione può avere una componente flessionale. A causa della variazione delle caratteristiche elastiche nello spessore possono pertanto prodursi accoppiamenti tra deformazioni membranali (flessionali) e componenti di tensione flessionali (membranali).

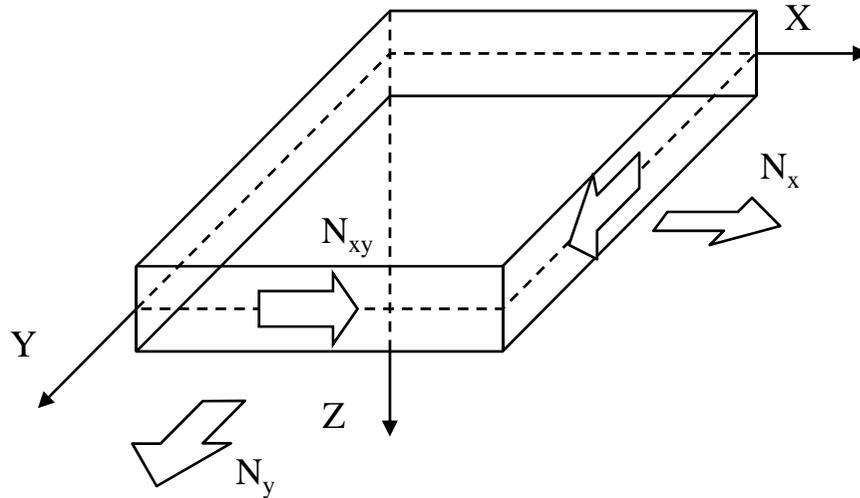




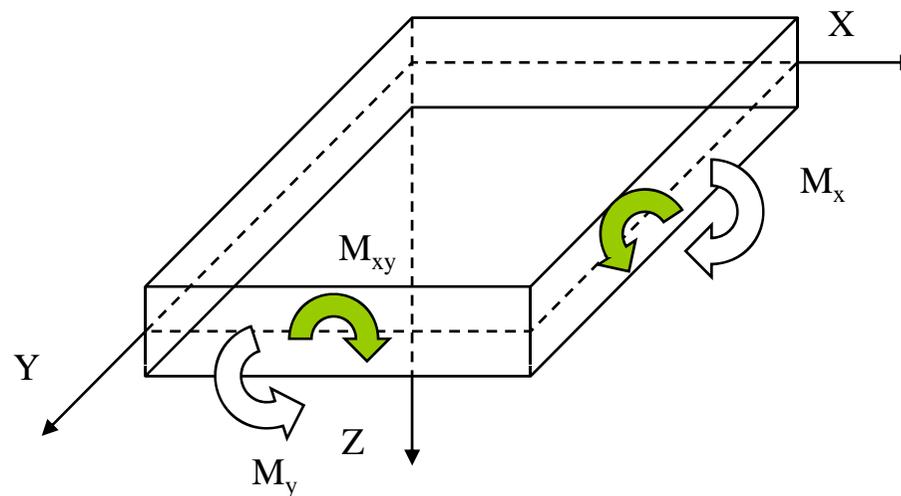
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## DEFINIZIONE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE GENERALIZZATE

- Sollecitazioni membranali

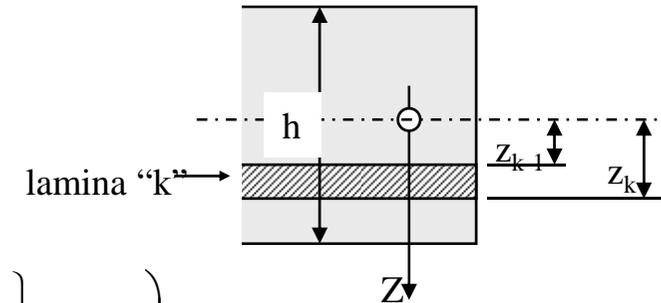


- Sollecitazioni flessionali



- Assumendo che il laminato sia composto di “ $n_l$ ” lamine e facendo uso della nomenclatura riportata in figura:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz = \sum_{k=1}^{n_l} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz =$$



$$= \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz = \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \cdot dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \right) =$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \cdot (z_k - z_{k-1}) \right) \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} =$$

$$= [A] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + [B] \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

dove :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$



## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Analogamente, per caratteristiche di tipo flessionale si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz = \sum_{k=1}^{n_l} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz = \\ &= \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz = \\ &= \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \left( \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z^2 \cdot dz \right) = \\ &= \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}]_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right) \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \\ &= [B] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + [D] \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dove :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$
$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_l} [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$



## RELAZIONE GENERALE TRA CAR. DI SOLLECITAZIONE E DEF.NI

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{k\} \end{Bmatrix}$$

[A] : relazione tra sollecitazioni membranali e deformazioni del piano medio

[D] : relazione tra sollecitazioni flessionali e curvature

[B] : relazione tra sollecitazioni membranali e curvature e tra sollecitazioni membranali e deformazioni del piano medio (termine misto)



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## FORMA ASSUNTA DALLE MATRICI [A], [B] E [D]

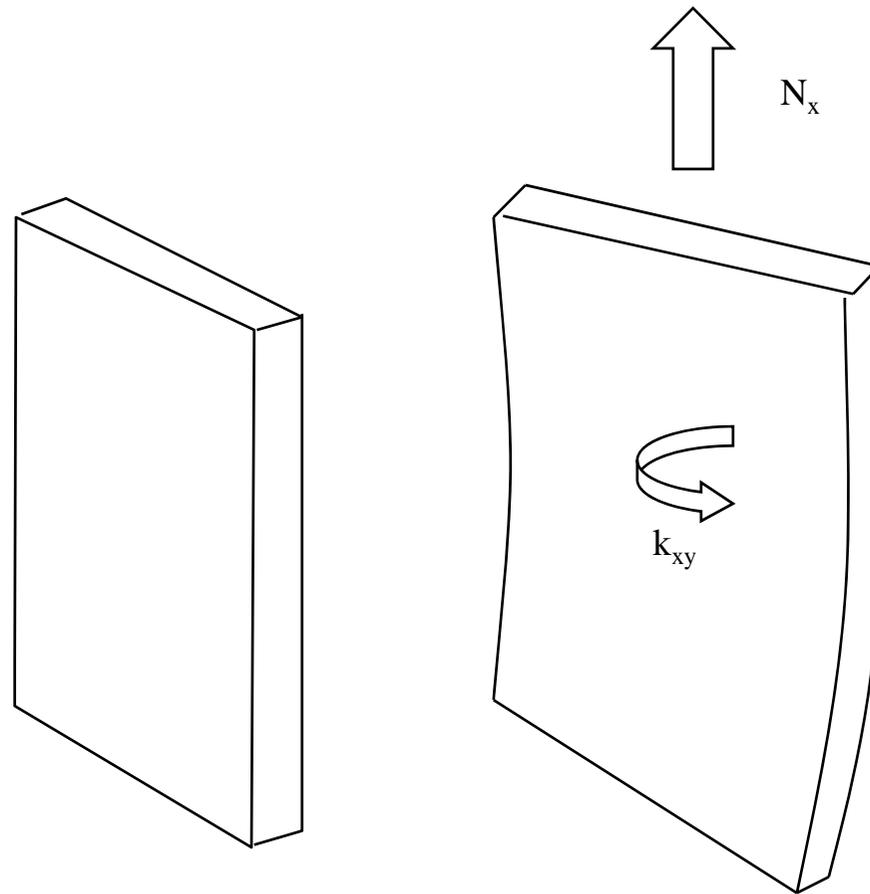
	$\begin{bmatrix} X & X & 0 \\ X & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>[A] – <b>mat. omogeneo</b>  <b>ortotropo</b>          – "cross – ply"          – equilibrati</p>	<p>– tutti gli altri</p>	<p>– – –</p>	
<p>[B] – non simmetrici</p>	<p>– non simmetrici</p>	<p>– <b>mat. omogeneo</b>  <b>ortotropo</b>          – simmetrici</p>	
<p>[D] – <b>mat. omogeneo</b>  <b>ortotropo</b>          – antisimmetrici          – "cross – ply"</p>	<p>– tutti gli altri</p>		

- Dalla tabella risulta che i soli laminati "cross-ply" simmetrici, dotati cioè di un numero dispari di lamine hanno un comportamento deformativo assimilabile a quello di un corpo fatto di materiale omogeneo ortotropo; per tutti gli altri sono presenti termini aggiuntivi, che danno ad esempio accoppiamenti tra sollecitazioni flessionali e deformazioni membranali



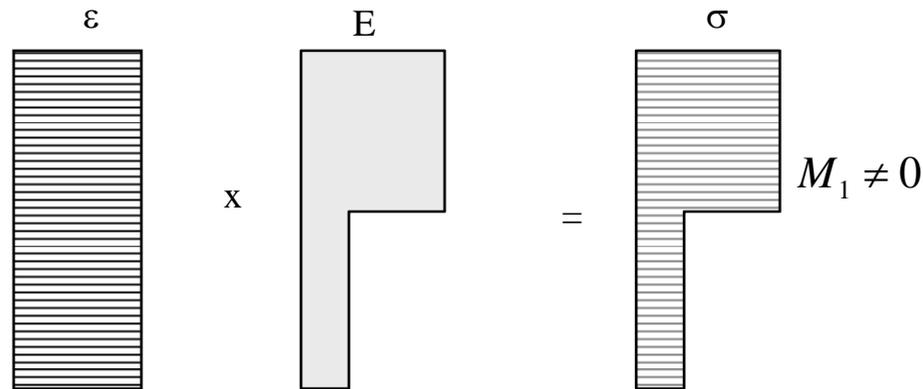
## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Questi termini aggiuntivi producono spesso comportamenti inusuali; a titolo di esempio, il termine  $B_{13}$  introduce un accoppiamento tra sollecitazioni membranali in direzione "x" ( $N_x$ ) e torsioni ( $k_{xy}$ ); in conseguenza di ciò, il laminato sottoposto a trazione lungo "x" subirà, oltre ad un allungamento, anche una torsione.

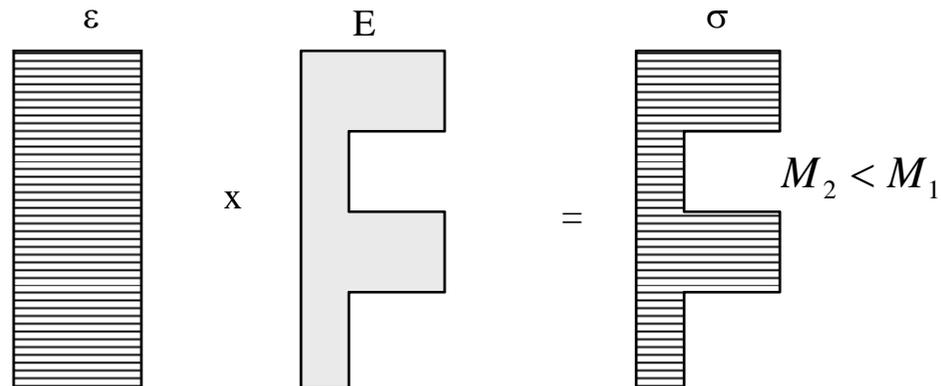


- E' tuttavia interessante osservare che l'importanza di tali termini aggiuntivi va rapidamente decrescendo al crescere del numero delle lamine; pertanto un laminato con molte lamine (15-20) si comporta sostanzialmente come se fosse fatto di un materiale omogeneo ortotropo; la giustificazione appare evidente dalla figura

Laminato a 2 lamine



Laminato a 4 lamine





### TENSIONI INTERLAMINARI

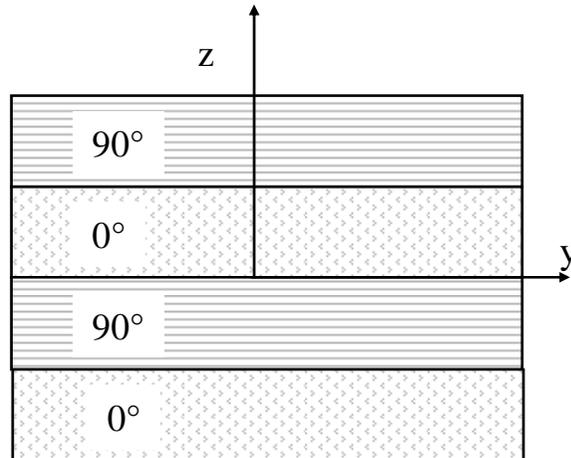
- La Teoria Classica della Laminazione (TCL) non si occupa di valutare le componenti di tensione dirette lungo lo spessore del laminato, ritenute di entità trascurabile; tuttavia esistono alcune situazioni nelle quali tali componenti possono assumere valori elevati e risultare il fattore determinante per la resistenza del pezzo.
- Tali situazioni si verificano soprattutto ai bordi liberi del laminato (tanto che il meccanismo responsabile del loro insorgere viene spesso indicato con il termine “effetto di bordo”), ma possono riscontrarsi anche in altre situazioni, come carichi concentrati, variazioni di geometria etc.
- L'insorgere di tali stati di tensione è solitamente legato al diverso modo di deformarsi che le lamine che compongono il laminato mostrerebbero, se fossero tra loro indipendenti.
- Tali deformazioni di corpo libero produrrebbero uno stato di spostamento non congruente tra le diverse lamine, per recuperare il quale è necessario che le lamine stesse si scambino delle forze; questo scambio si verifica principalmente in prossimità dei bordi liberi, dando luogo a stati di tensione agenti sulla interfaccia tra le lamine, detti **tensioni interlaminari**.
- Al fine di illustrare i concetti esposti, prenderemo in esame i due principali meccanismi attraverso i quali possono prodursi tensioni interlaminari al bordo libero di un laminato:
  - Differenza nei coefficienti di Poisson (Poisson mismatch)
  - Differenza nelle deformazioni di taglio (Shear disagreement)



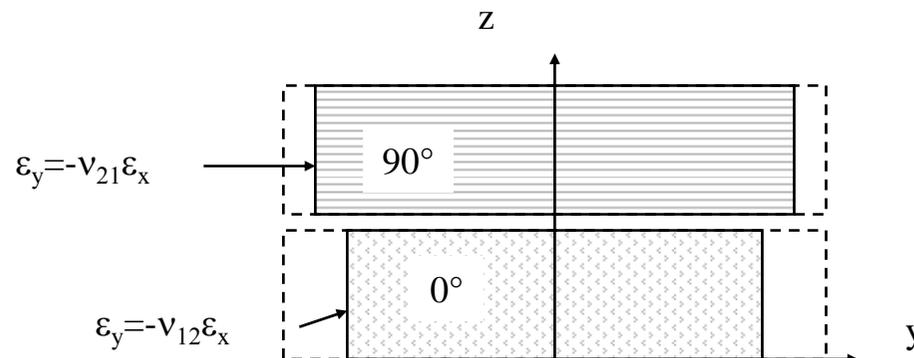
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## “POISSON MISMATCH”

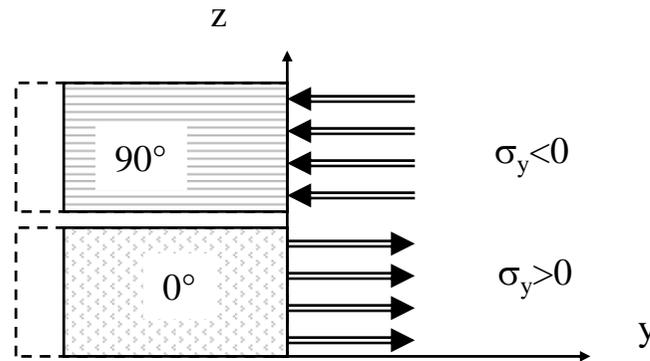
- Si tratta di un fenomeno osservabile in particolare al bordo di laminati “cross-ply”;



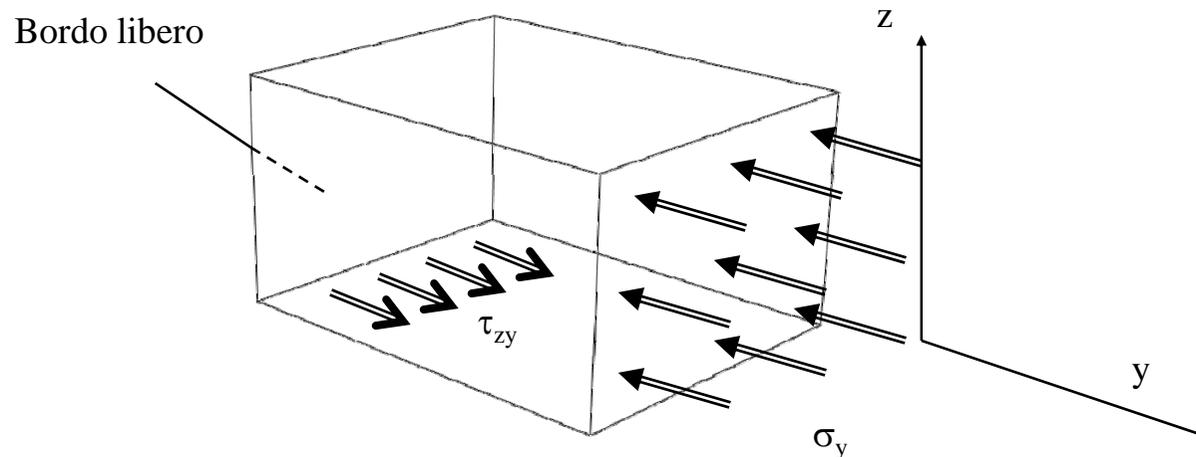
- Si supponga di sottoporre il laminato ad una deformazione uniforme lungo “x”; se le lamine fossero libere si contrarrebbero lateralmente nel modo indicato in figura, dato che  $\nu_{12} > \nu_{21}$ .



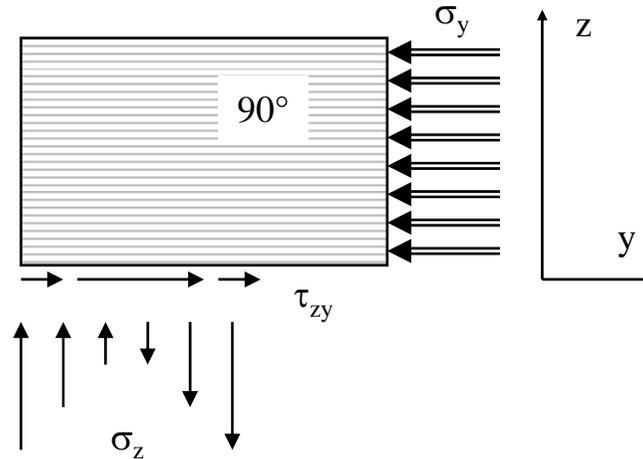
- Il ripristino della congruenza potrà essere ottenuto attraverso tensioni  $\sigma_y$  di trazione nella lamina a  $0^\circ$  e di compressione nella lamina a  $90^\circ$ .
- Tali stati di tensione, non essendo dovuti a carichi esterni, saranno auto-equilibrati sull'intero spessore del laminato e saranno sostanzialmente uniformi ad una certa distanza dal bordo libero.



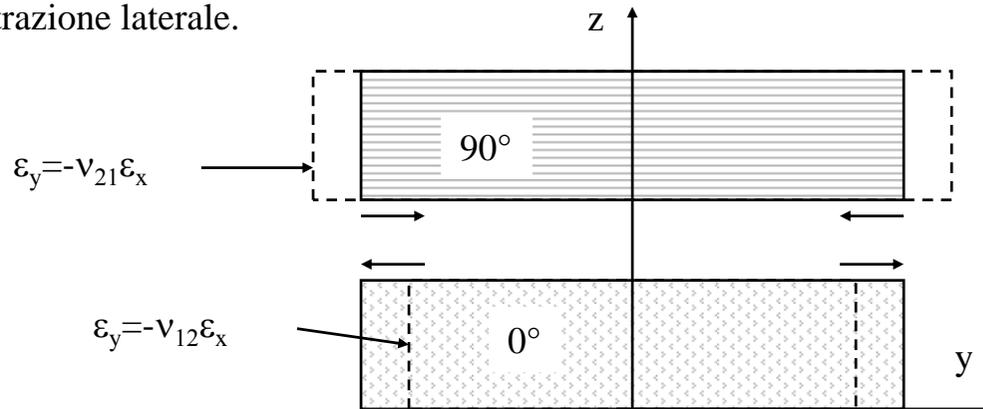
- Questi stati di tensione devono annullarsi sul bordo libero; pertanto, per assicurare l'equilibrio della lamina in prossimità di esso devono intervenire tensioni tangenziali di tipo  $\tau_{zy}$ .



- Una più dettagliata analisi delle condizioni di equilibrio mostra poi come le rette di azione della  $\sigma_y$  e della  $\tau_{zy}$  siano diverse, per cui è necessario un momento di reazione attorno all'asse "x"; tale momento viene fornito da una distribuzione di tensioni di tipo  $\sigma_z$  aventi risultante nulla.
- Le tensioni  $\sigma_z$  e  $\tau_{zy}$  sono dette "interlaminari" e corrispondono a delle forze scambiate tra le lamine attraverso l'interfaccia.



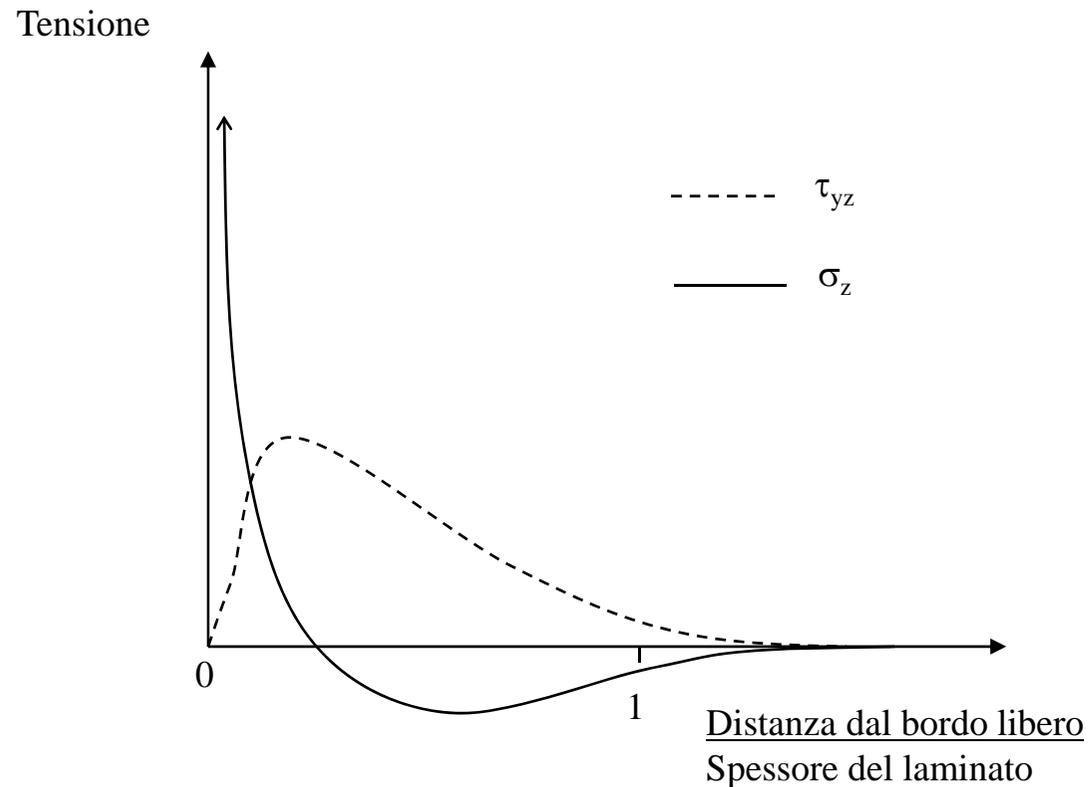
- In sostanza, dal punto di vista fisico la lamina a  $90^\circ$  viene "spinta" e quella a  $0^\circ$  viene "tirata" da forze autoequilibrate scambiate attraverso l'interfaccia in direzione "y" in prossimità del bordo libero; tali forze producono, ad una certa distanza dal bordo, lo stato di tensione  $\sigma_y$  che compensa la tendenza ad una diversa contrazione laterale.





## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Il tipico andamento delle tensioni interlaminari in prossimità del bordo libero per un laminato “cross-ply” è riportato nella figura; si può osservare come la  $\sigma_z$  risulti distribuita in modo da produrre una risultante nulla e, soprattutto, come essa risulti **singolare** in corrispondenza dell'interfaccia, analogamente a quanto si verifica all'apice di un difetto (anche è necessario precisare che il grado di singolarità è diverso).

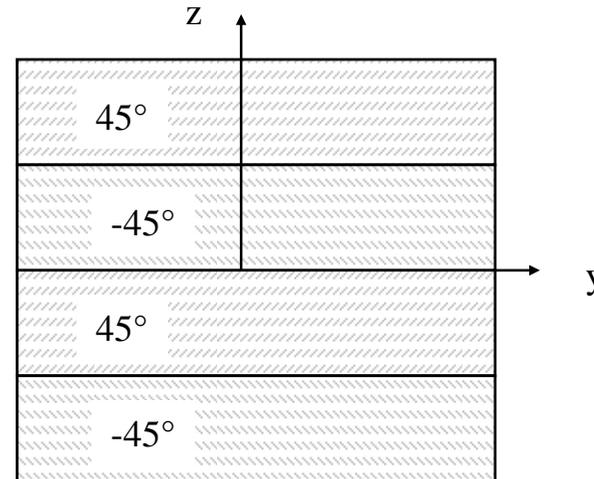




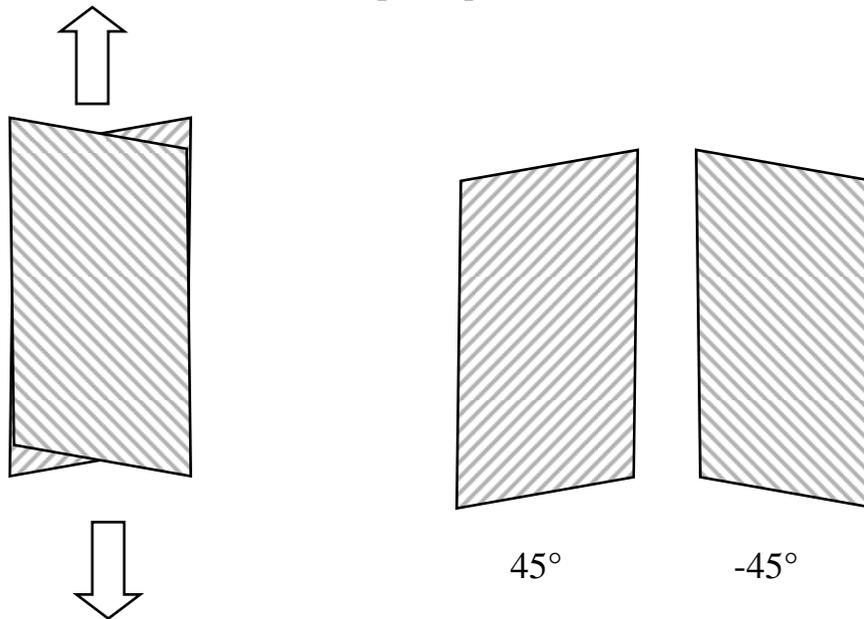
## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

### “SHEAR DISAGREEMENT”

- Si tratta di un fenomeno osservabile in particolare al bordo di laminati “angle-ply”;



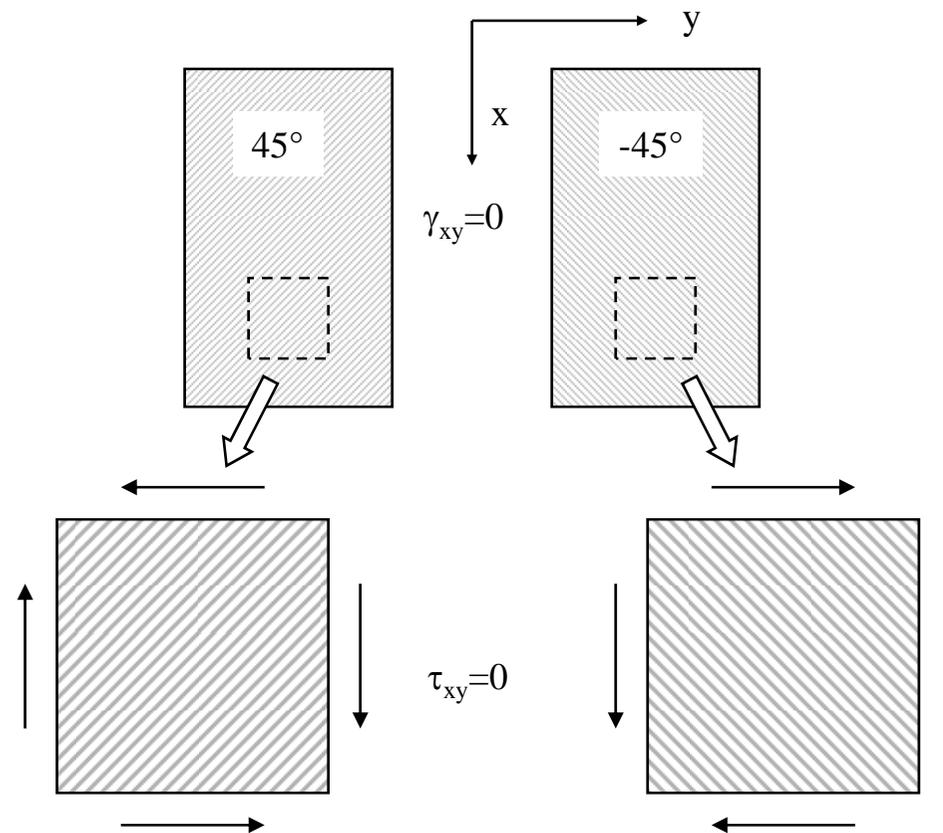
- Si supponga di sottoporre il laminato ad una tensione uniforme lungo “x”; se le lamine fossero libere, non essendo sollecitate secondo il loro SR principale si deformerebbero nel modo indicato in figura.





## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

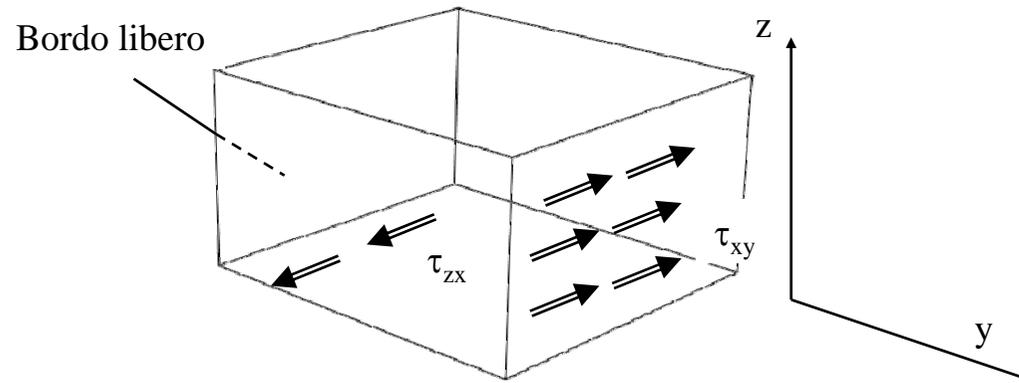
- Il ripristino della congruenza potrà essere ottenuto attraverso tensioni  $\tau_{xy}$  agenti in senso opposto nelle lamine a  $+45^\circ$  ed a  $-45^\circ$ ; in pratica è necessario ottenere  $\gamma_{xy}=0$  ed a tale scopo, non essendo il SR "xyz" principale del materiale, deve essere  $\tau_{xy}$  diverso da 0 (vedi anche la sezione sulla macromeccanica della lamina).
- Tali stati di tensione, non essendo dovuti a carichi esterni, saranno auto-equilibrati sull'intero spessore del laminato e sostanzialmente uniformi ad una certa distanza dal bordo libero.



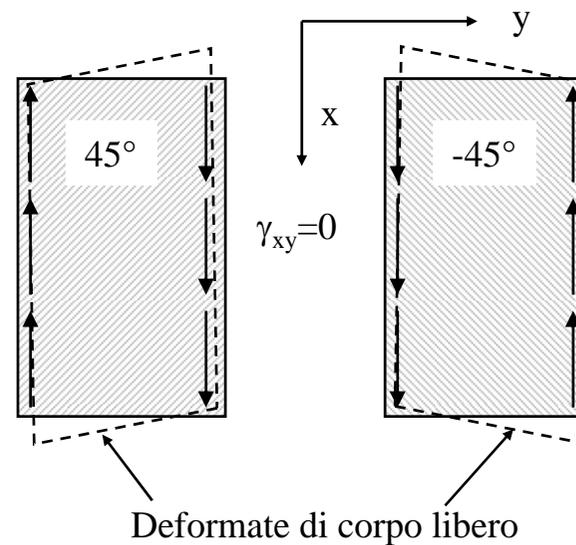


## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

- Questi stati di tensione devono annullarsi sul bordo libero; pertanto, per assicurare l'equilibrio della lamina in prossimità di esso devono intervenire tensioni tangenziali di tipo  $\tau_{zx}$ .



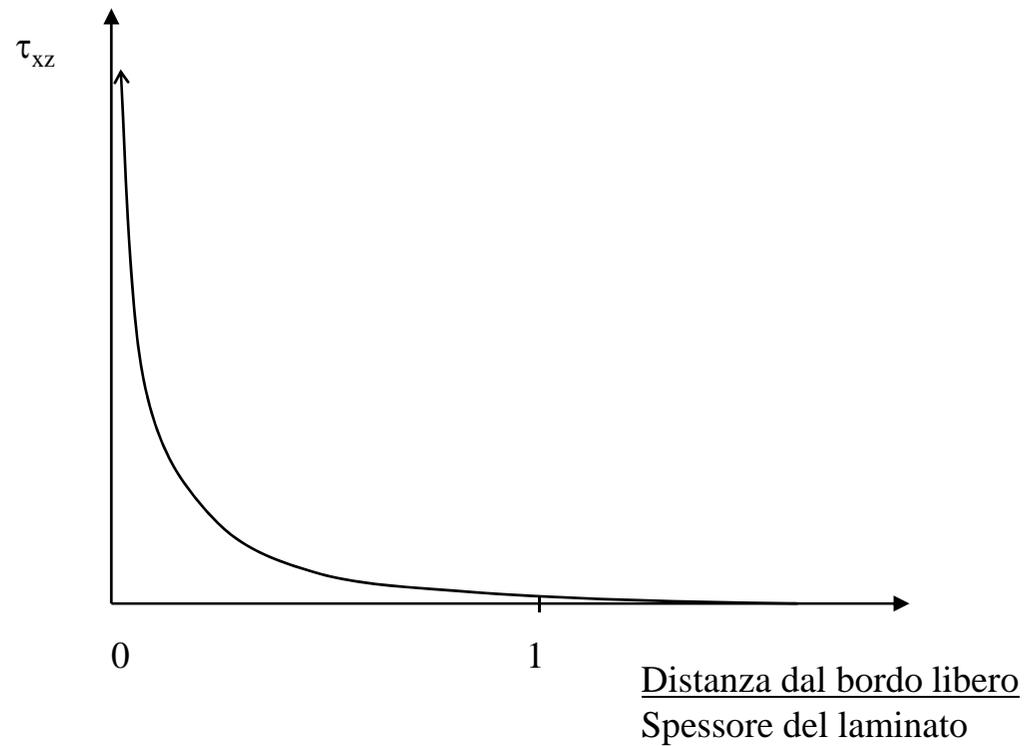
- Dal punto di vista fisico, analogamente al caso precedente, le lamine vengono sottoposte a taglio da forze autoequilibrate scambiate attraverso l'interfaccia in direzione "x" in prossimità del bordo libero





## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

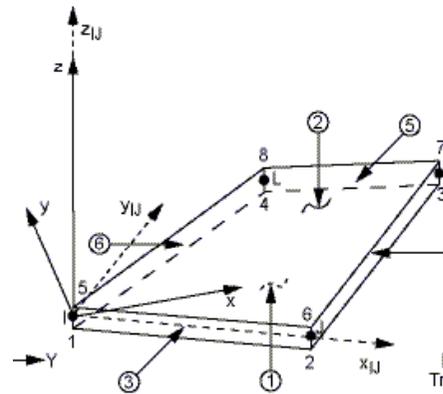
- Il tipico andamento delle tensioni interlaminari in prossimità del bordo libero per un laminato “angle-ply” è riportato nella figura; si può osservare come la  $\tau_{zx}$  risulti anch'essa **singolare** in corrispondenza dell'interfaccia.



## MODELLI FEM TIPICI PER STRUTTURE IN COMPOSITO

1 elemento nello spessore.  
Analisi generale tensioni e def.ni

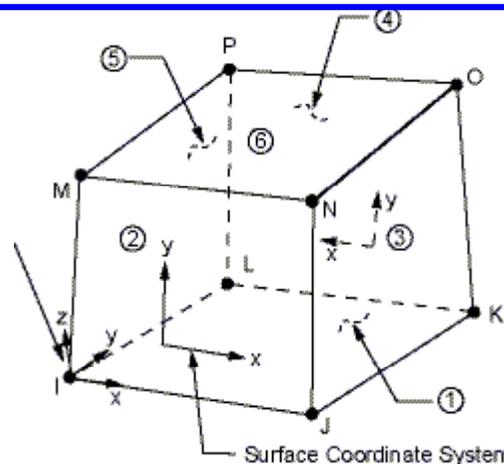
Elementi "omogenei"



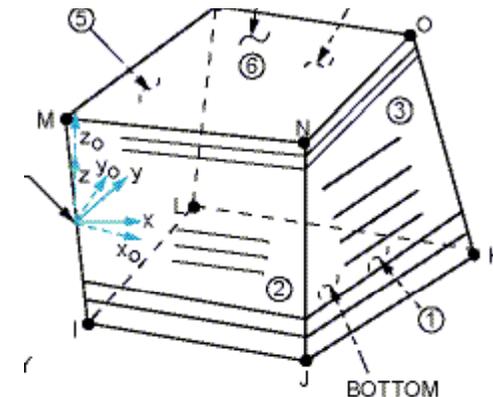
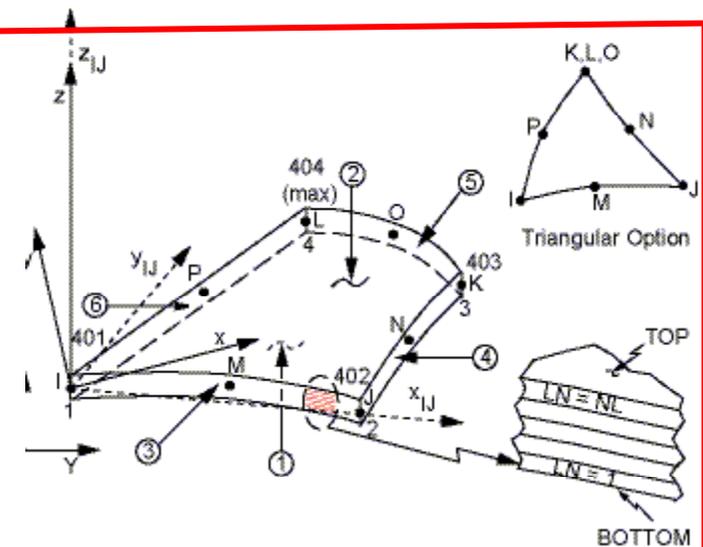
Elementi "shell"

Più elementi nello spessore.  
Studio di casi particolari

Elementi "solid"



Elementi "stratificati"

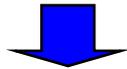




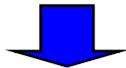
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MODELLI FEM CON ELEMENTI OMOGENEI

Elementi "shell"



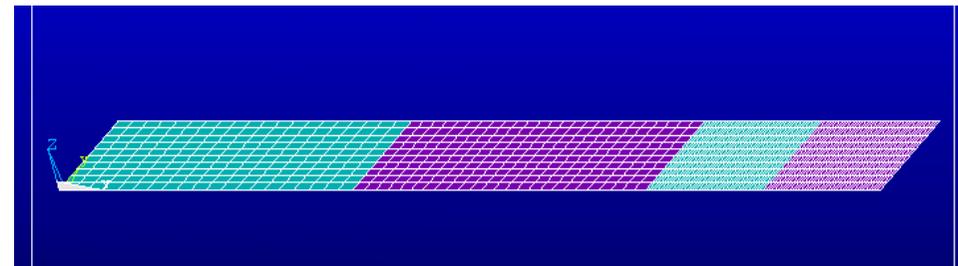
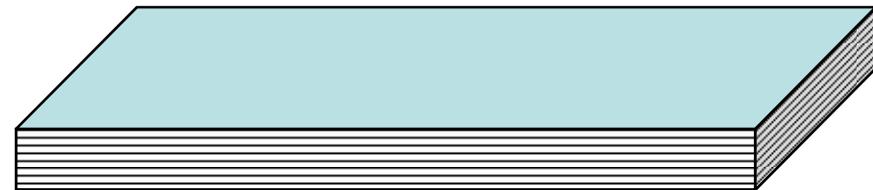
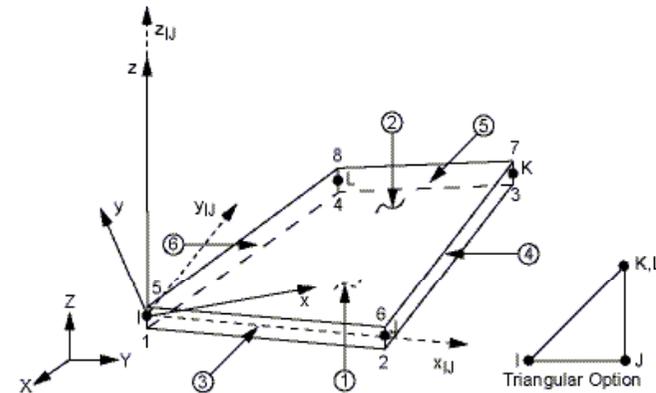
1 elemento nello spessore



Materiale: omogeneo su tutto lo spessore, proprietà: ortotropo "equivalente"



Analisi generale del comportamento deformativo.  
Analisi dello stato di tensione in zone di "plane stress"





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## FORMA ASSUNTA DALLE MATRICI [A], [B] E [D]

$$\begin{bmatrix} X & X & 0 \\ X & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- [A] **– mat. omogeneo ortotropo**  
– "cross – ply"  
– equilibrati
- tutti gli altri
- [B] – non simmetrici – non simmetrici
- mat. omogeneo ortotropo**  
– simmetrici
- [D] **– mat. omogeneo ortotropo**  
– antisimmetrici  
– "cross – ply"
- tutti gli altri

Tuttavia, un laminato con molte lamine (15-20) si comporta sostanzialmente come se fosse fatto di un materiale omogeneo ortotropo

## MODELLI FEM CON ELEMENTI OMOGENEI

Elementi "solid"



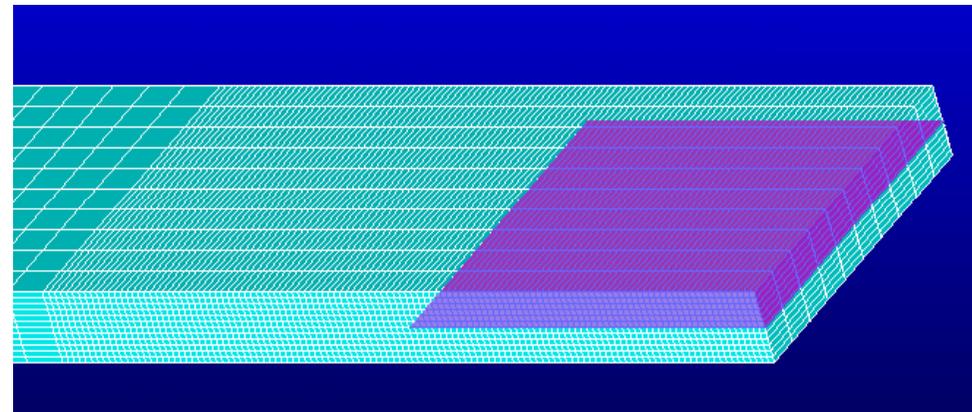
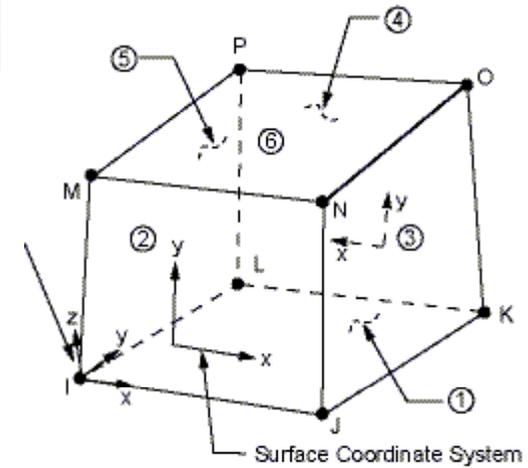
Più elementi nello spessore (in genere, più elementi per lamina)



Materiale: omogeneo ortotropo (variabile da lamina a lamina)



Studio di aspetti particolari (es. tensioni interlaminari)

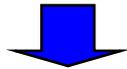




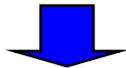
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MODELLI FEM CON ELEMENTI STRATIFICATI

Elementi "shell"



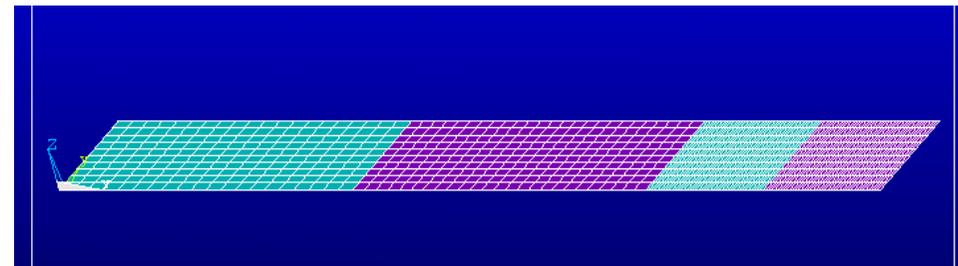
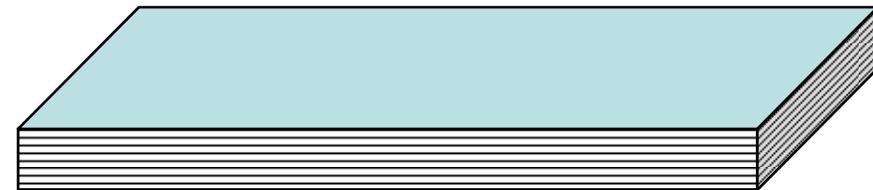
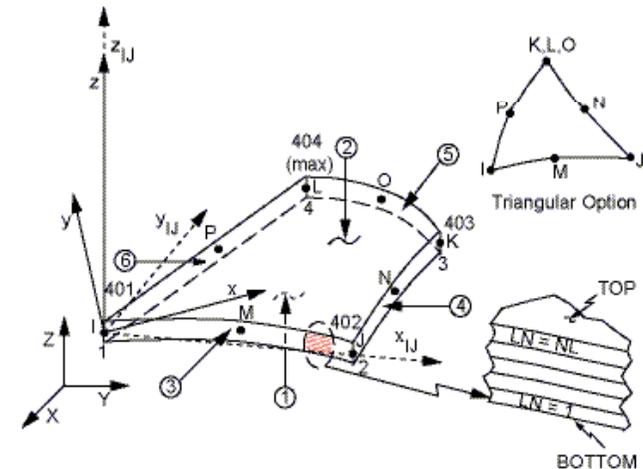
1 elemento nello spessore



Materiale: omogeneo  
ortotropo (variabile da  
lamina a lamina)



Analisi generale del  
comportamento deformativo.  
Analisi dello stato di tensione  
in zone di "plane stress"

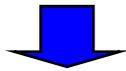


## MODELLI FEM CON ELEMENTI STRATIFICATI

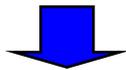
Elementi "solid"



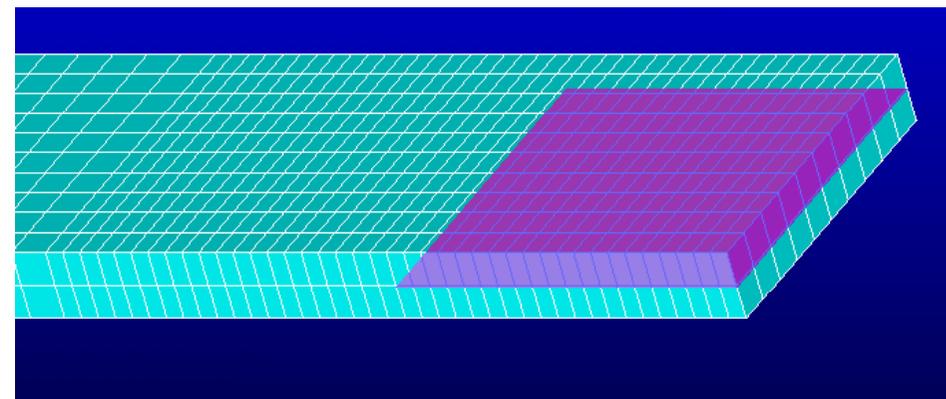
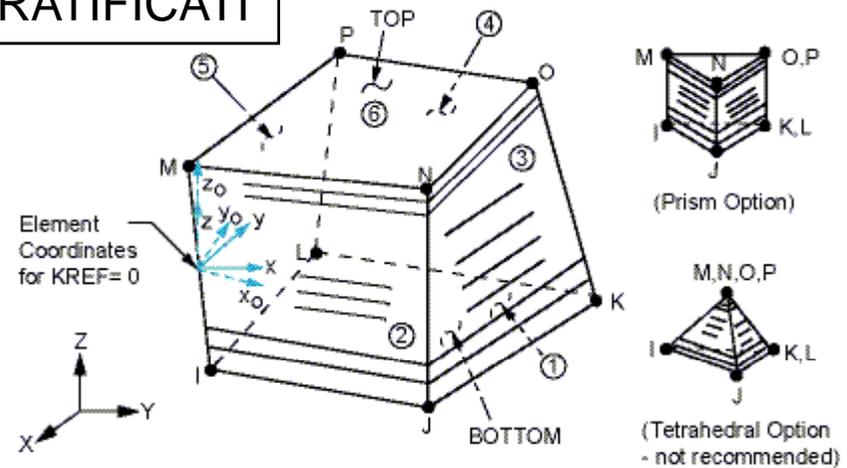
1 elemento nello spessore



Materiale: omogeneo  
ortotropo (variabile da  
lamina a lamina)



Analisi generale del  
comportamento deformativo.  
Adatto per laminati che non  
rispettino l'ipotesi di "piccolo"  
spessore





## Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

QUANDO UN LAMINATO E' SOTTILE?

QUANDO SI PUO' USARE LA SIMMETRIA?



## CONSIDERAZIONI DI SIMMETRIA

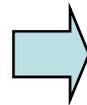
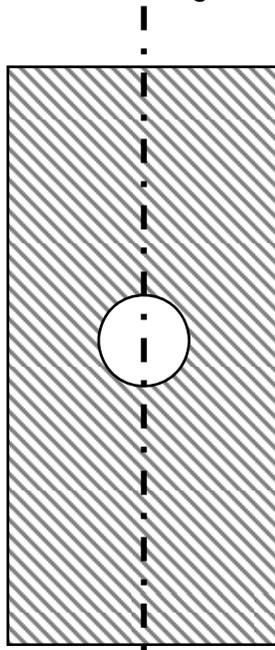
Una proprietà di simmetria, per poter essere utilizzata nell'analisi strutturale, deve valere per:

- geometria
- vincoli
- carichi (può valere anche l'anti-simmetria)

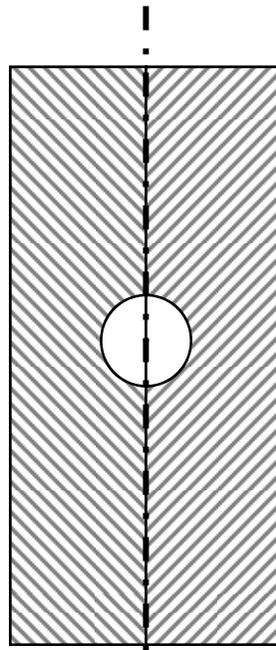
• proprietà del materiale

Generalmente non considerata esplicitamente perché per un materiale isotropo è sempre verificata

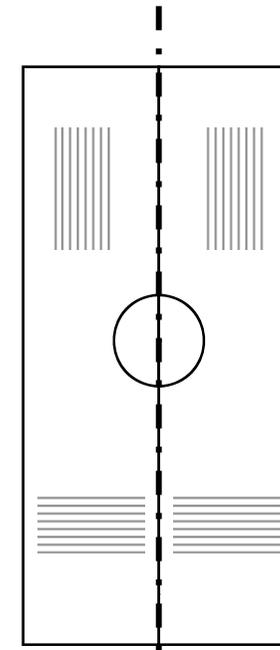
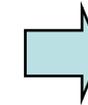
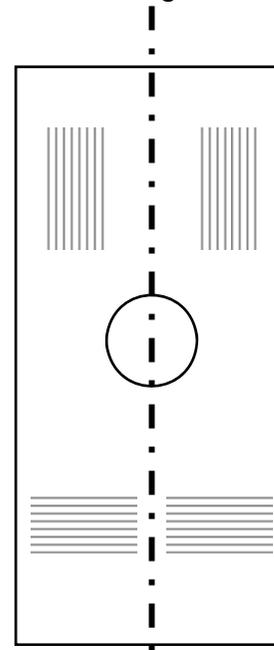
Piano di simmetria  
speculare della geometria



Effetto della riflessione



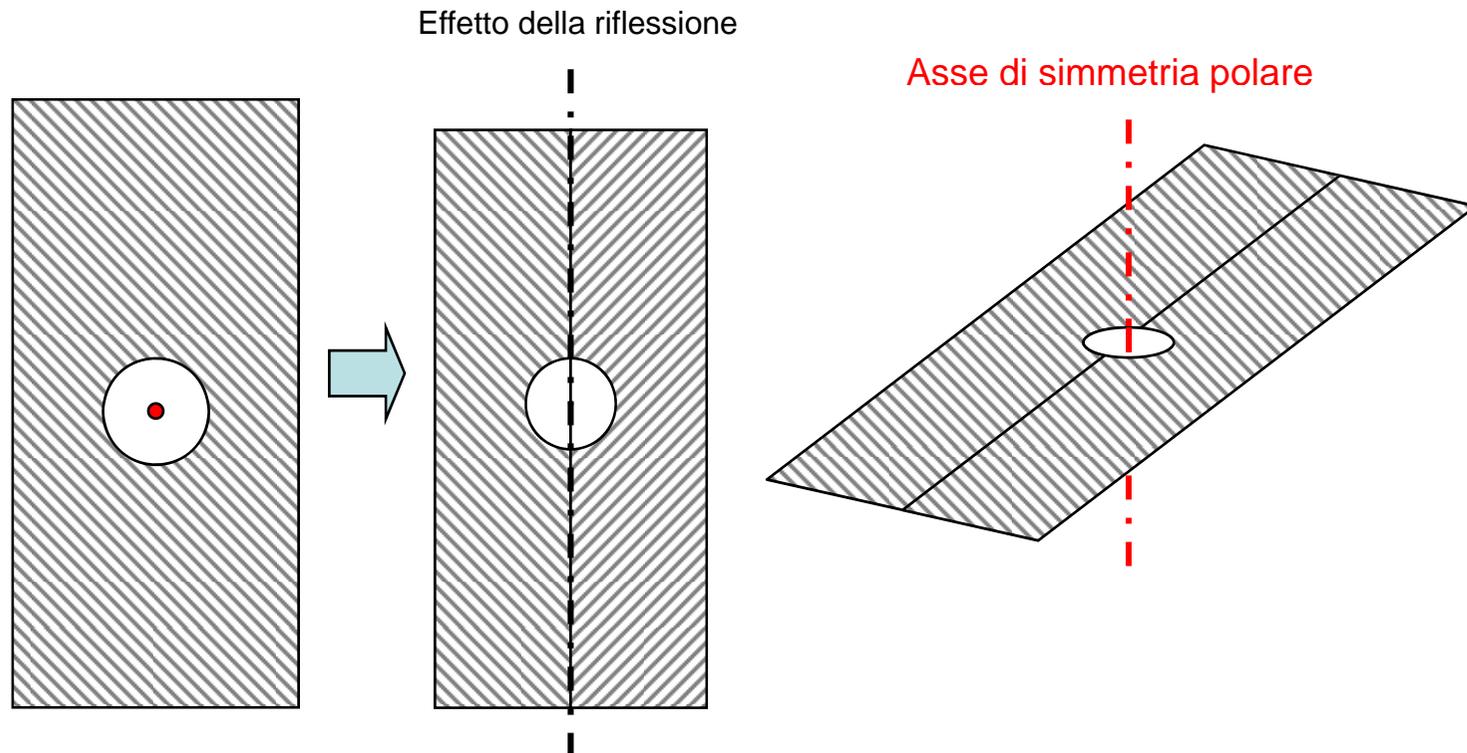
Effetto della riflessione con fibre parallele o  
ortogonali al piano di simmetria



Simmetria di riflessione utilizzabile solo in casi particolari



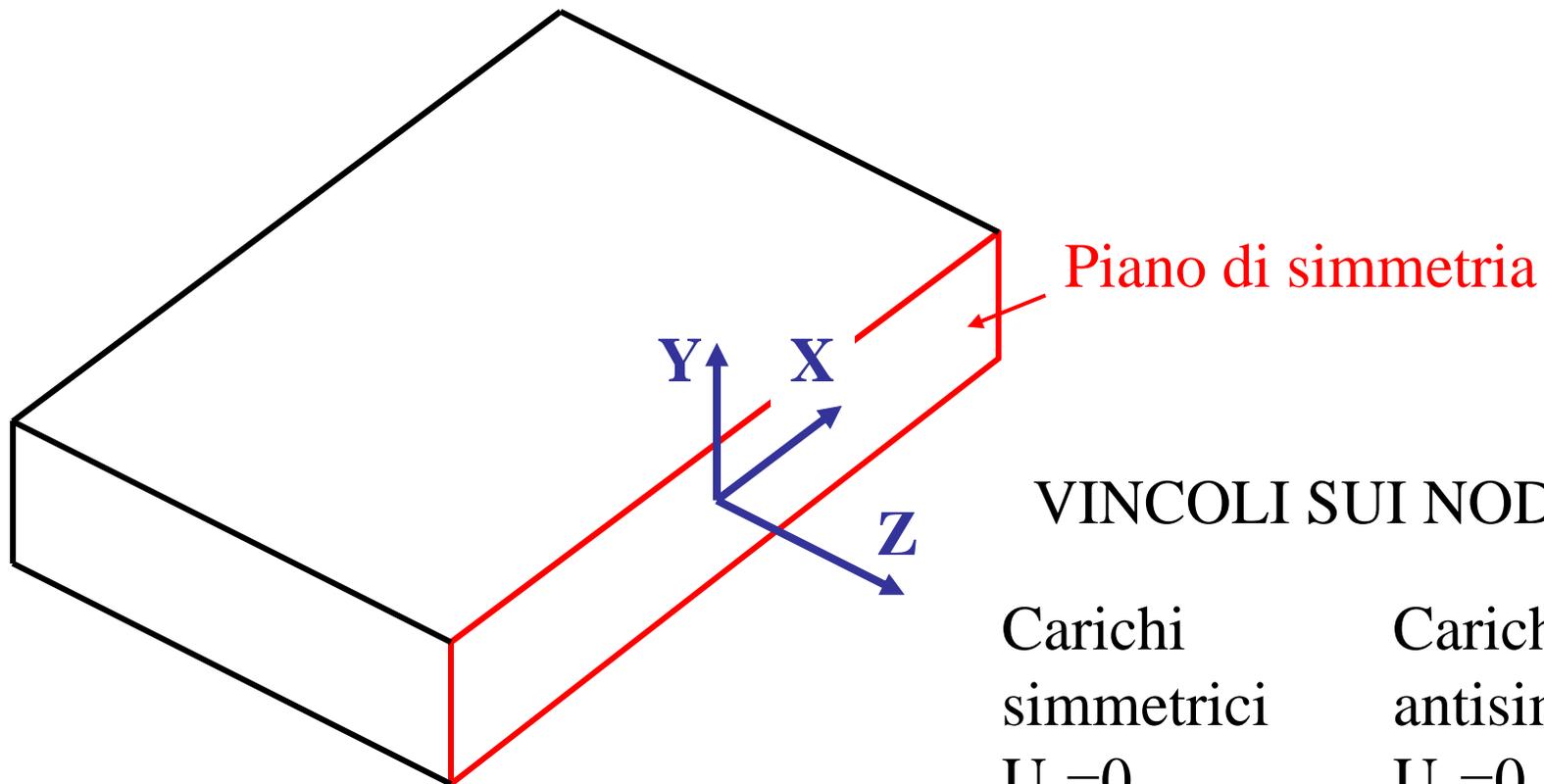
## CONSIDERAZIONI DI SIMMETRIA: Simmetria polare





## Simmetria di riflessione

La struttura viene tagliata in corrispondenza del piano di simmetria



### VINCOLI SUI NODI

Carichi  
simmetrici

$$U_z=0$$

$$ROT_x=0$$

$$ROT_y=0$$

Carichi  
antisimm.

$$U_y=0$$

$$U_x=0$$

$$ROT_z=0$$



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6

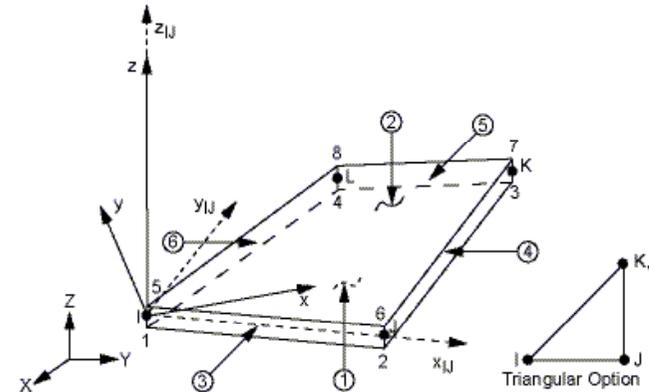


## SHELL 63 – NON STRATIFICATO PER ANALISI LINEARI E NON LINEARI

ET,1,63(o 93 o 181)      Spessore  
R,1,SP ← lamina

## MATERIALE OMOGENEO ORTOTROPO

C\*\*\*  
C\*\*\* MATERIALE LAMINE  
C\*\*\*  
MP,EX,1, 23000  
MP,EY,1, 20700  
MP,EZ,1, 10000  
MP,PRXY,1, 0.15  
MP,PRYZ,1, 0.15  
MP,PRXZ,1, 0.15  
MP,GXY,1, 4000  
MP,GYZ,1, 4000  
MP,GXZ,1, 4000

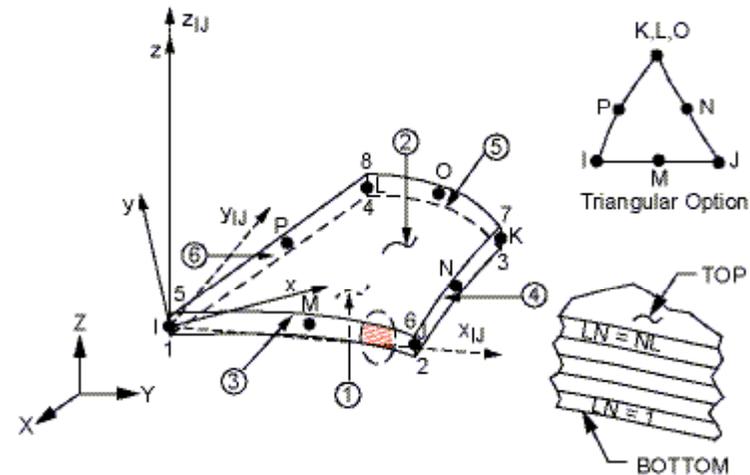




# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6

## SHELL 99 – STRATIFICATO PER ANALISI LINEARI



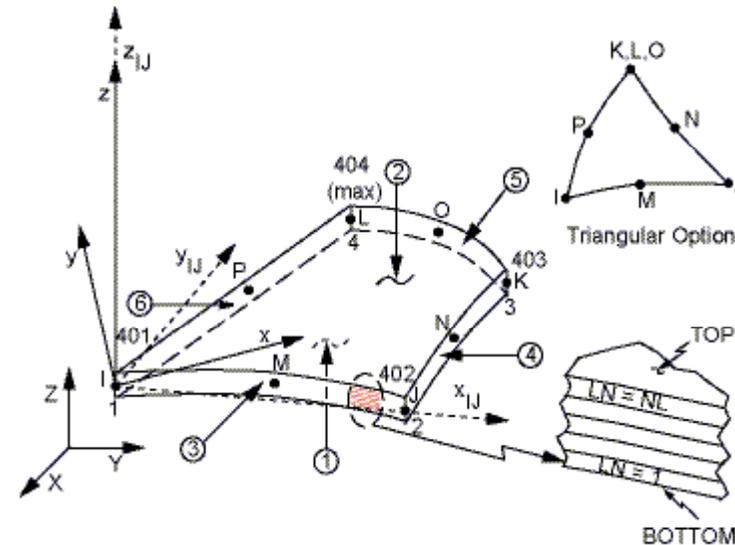
ET,1,99,,,,,,,,,1 ← Keyopt (8) = 1 memorizzazione  
C\*\*\* risultati per tutte le lamine  
C\*\*\* DEFINIZIONE STRATIFICAZIONE  
C\*\*\*  
R,1,NL,,,,,,,,, ← N° lamine  
RMORE, ← Imposta il valore di default  
per le costanti 7-12  
RMORE,1,0,SP/NL,1,90,SP/NL ← Ripetere la scheda fino al  
Completamento della stratificazione  
Mat. 1° lamina ←  
Spessore 1° lamina ←  
Inclinazione 1° lamina ←  
c.s. 2° lamina ←



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6

## SHELL 91 – STRATIFICATO PER ANALISI NON LINEARI



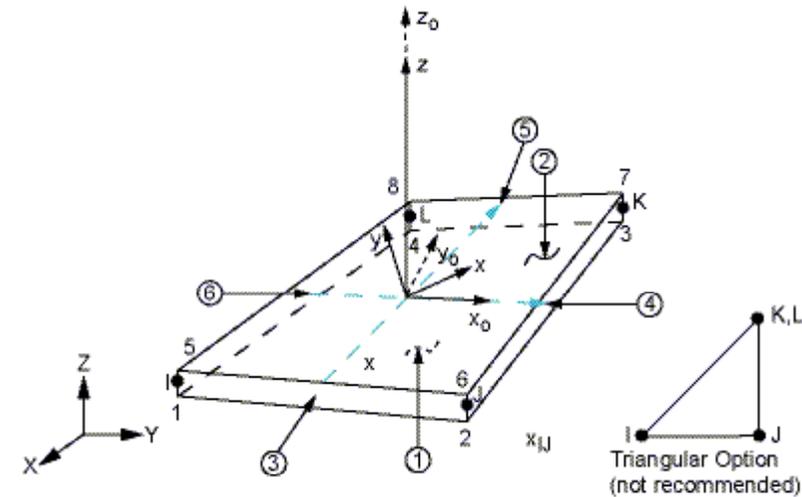
N° massimo lamine  
↓  
ET,1,91,50,1,,,,,1 ← Keyopt (8) = 1 memorizzazione risultati per tutte le lamine  
C\*\*\*  
C\*\*\* DEFINIZIONE STRATIFICAZIONE  
C\*\*\*  
R,1,NL,,,,, ← N° lamine  
RMORE, ← Imposta il valore di default per le costanti 7-12  
RMORE,1,0,SP/NL,1,90,SP/NL ← Ripetere la scheda fino al Completamento della stratificazione  
Mat. 1° lamina ←  
Spessore 1° lamina ←  
Inclinazione 1° lamina ←  
c.s. 2° lamina ←



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6

SHELL 181 – STRATIFICATO E  
NON STRATIFICATO PER ANALISI  
LINEARI E NON LINEARI



```
ET,1,181,,,,,,1 ← Keyopt (8) = 1 memorizzazione  
C*** ← risultati per tutte le lamine  
C*** DEFINIZIONE STRATIFICAZIONE  
C***  
SECTYPE,1,SHELL  
SECDATA,SP/NL,1,0 ← Ripetere la scheda fino al  
SECDATA,SP/NL,1,90 ← Completamento della stratificazione  
  
C***  
C*** ATTIVA LA STRATIFICAZIONE INTRODOTTA  
C***  
SECNUM,1 Spessore Mat. Inclinazione  
lamina lamina lamina
```



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## ACCORGIMENTI SPECIFICI

In primo luogo, è opportuno ricordare che le proprietà del materiale sono definite nel SR del singolo elemento, per cui è necessario controllare accuratamente la disposizione spaziale di quest'ultimo in modo che coincida, in ogni punto del modello con le effettive direzioni principali del materiale o con il SR desiderato per il laminato.

A tale scopo si richiede in primo luogo di "allineare" la normale uscente di tutti gli elementi, la quale può avere orientamenti diversi a seconda delle modalità di creazione, utilizzando uno dei seguenti due comandi:

- ANORM,xxx,0 che consente di allineare la normale di tutte le aree attive e degli elementi in esse presenti a quella dell'area xxx
- ENORM, xxx che consente di allineare la normale di tutti gli elementi attivi in accordo con quella dell'elemento xxx

La effettiva disposizione delle normali agli elementi può essere controllata con il comando:

- /NORMAL,,1, seguito dal comando EPLLOT

Una volta ottenuta una corretta disposizione delle normali agli elementi, occorre procedere ad allinearne i sistemi di riferimento. A tale scopo è possibile utilizzare i seguenti comandi:

- LOCAL,N,... crea un opportuno SR locale attribuendogli il numero identificativo "N"
- ESYS, N definisce "N" come il SR cui saranno allineati (paralleli) gli assi dei SR degli elementi che saranno creati nel seguito.

Se necessario, la procedura può essere ripetuta per orientare diversamente gli elementi appartenenti alle diverse zone del modello. La disposizione effettiva ottenuta può poi essere controllata tramite le istruzioni da "menu" o con il comando:

- /PSYMB,ESYS,1

In fase di "post-processing" è possibile utilizzare il comando:

- LAYER,n

per visualizzare i risultati relativi alla lamina "n-esima". Per "default" vengono rappresentati i risultati relativi alle superfici esterne del laminato.

Si può inoltre usare il comando:

- SHELL, TOP (o MID o BOT)

per selezionare la rappresentazione dei risultati relativi alla superficie superiore (o mediana o inferiore) della lamina.

Infine, è possibile fare uso del comando:

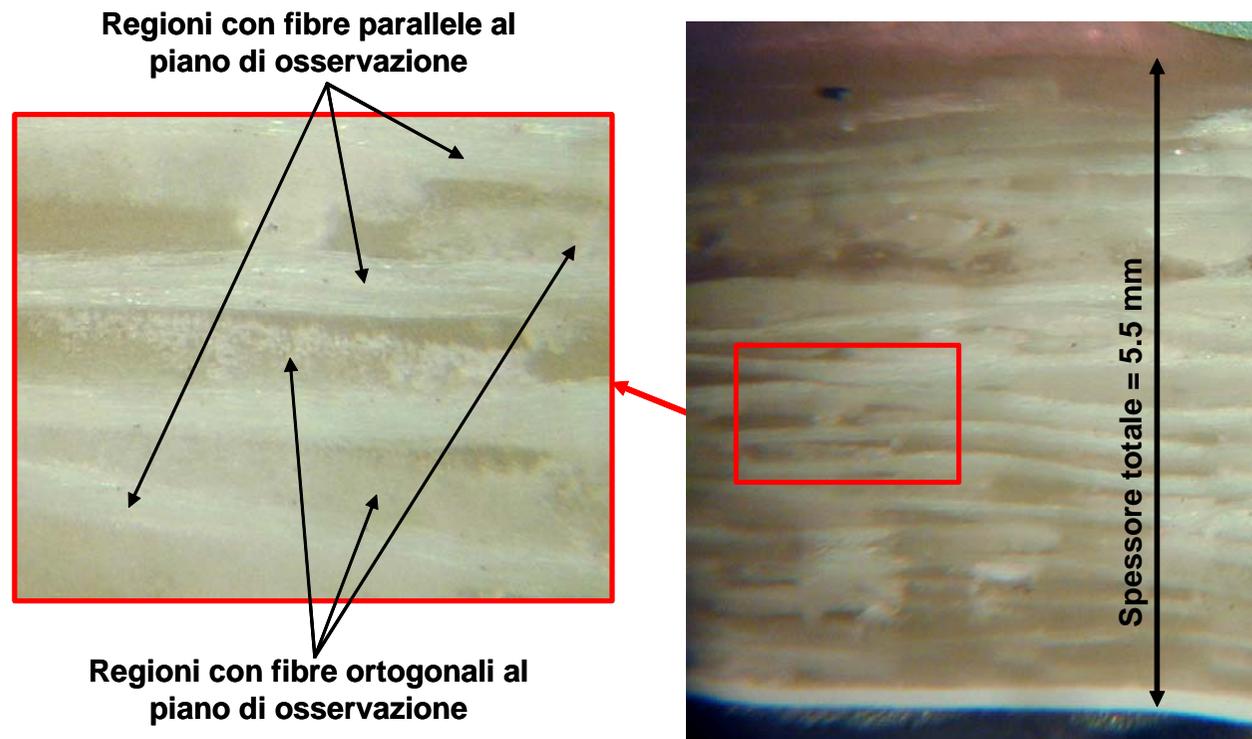
- RSYS, xxx

per selezionare il sistema di riferimento in cui rappresentare tensioni e deformazioni, allineandolo eventualmente con quello principale della singola lamina



## ESEMPIO DI CONFRONTO FEM DATI SPERIMENTALI

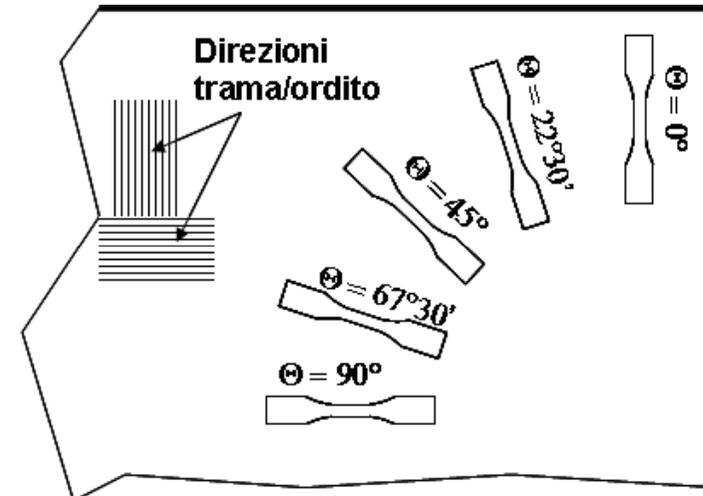
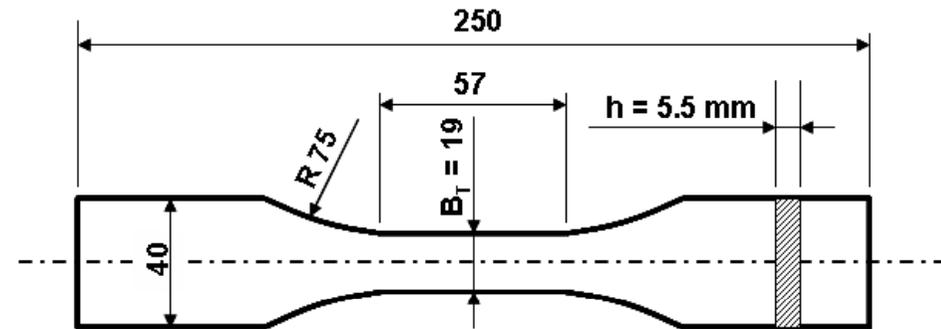
Lastra in tessuto a fibre ortogonali





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

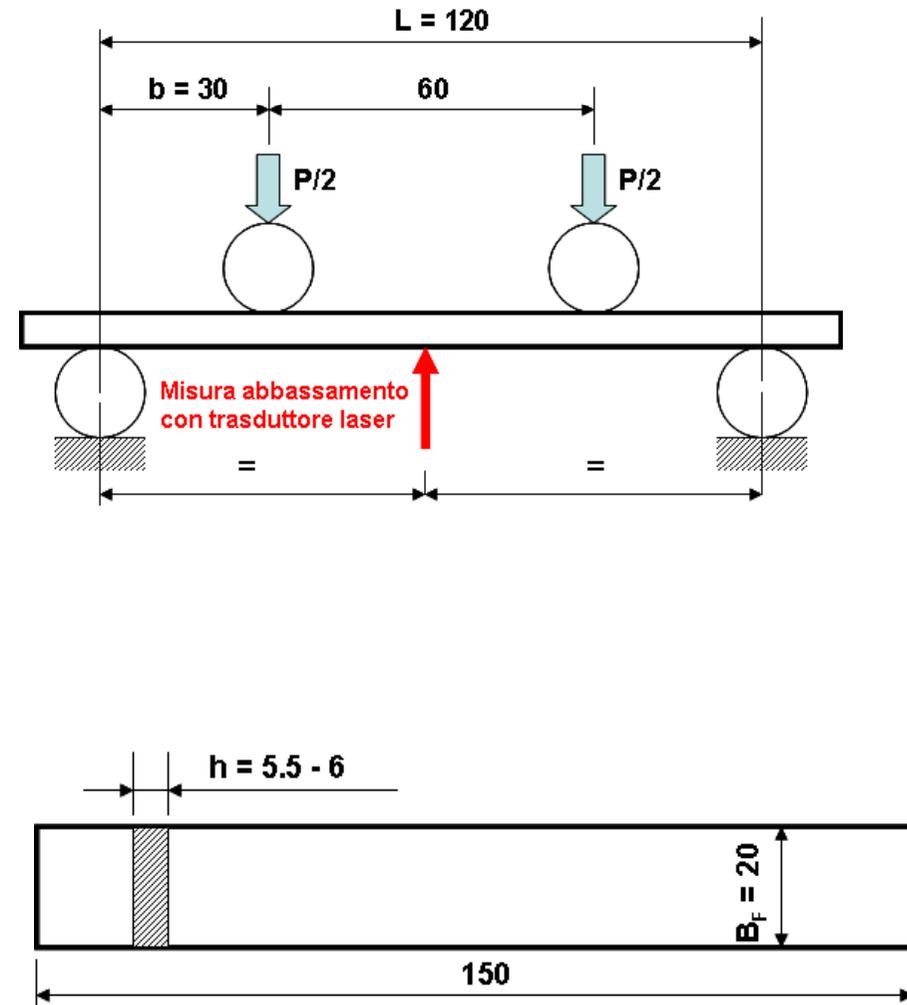
## PROVA DI TRAZIONE





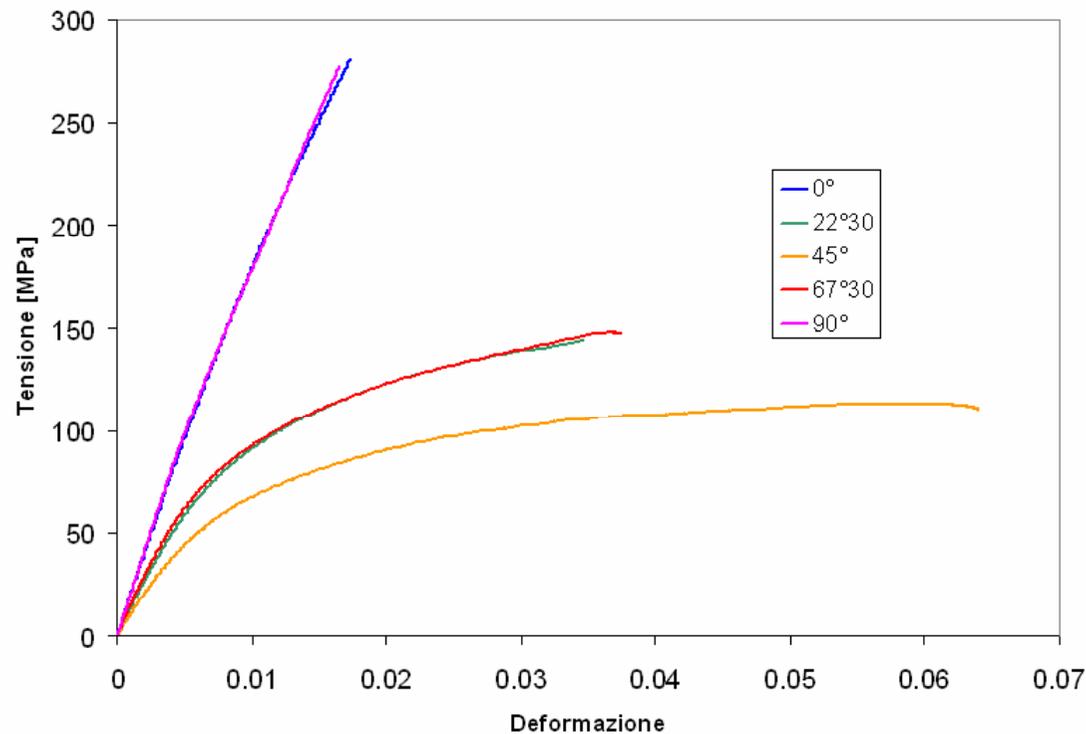
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## PROVA DI FLESSIONE



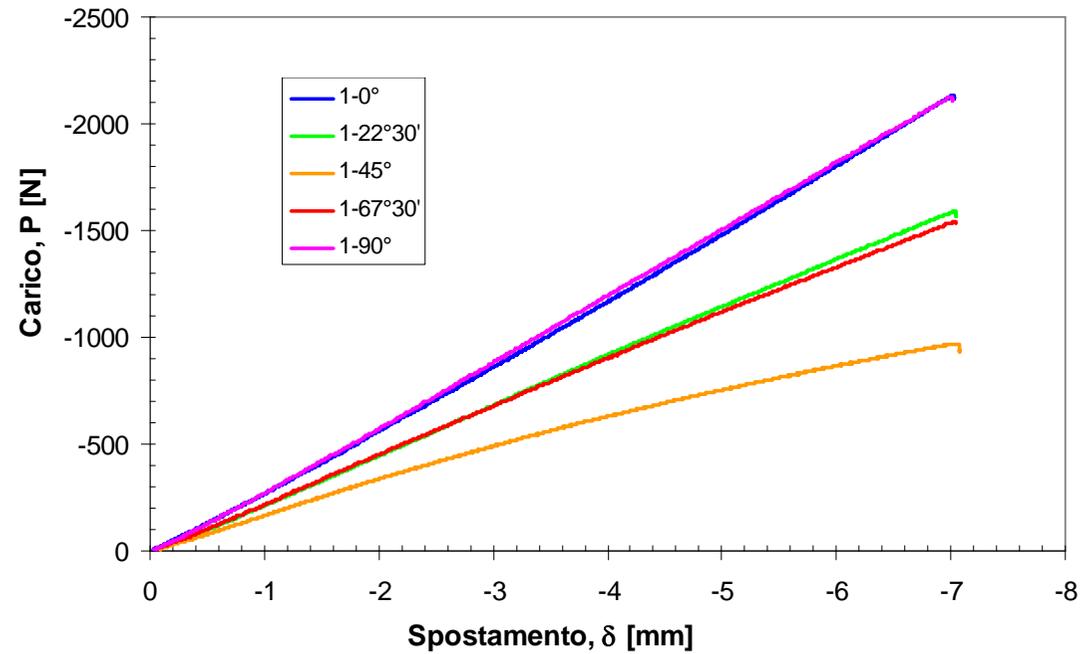


## RISULTATI PROVE DI TRAZIONE



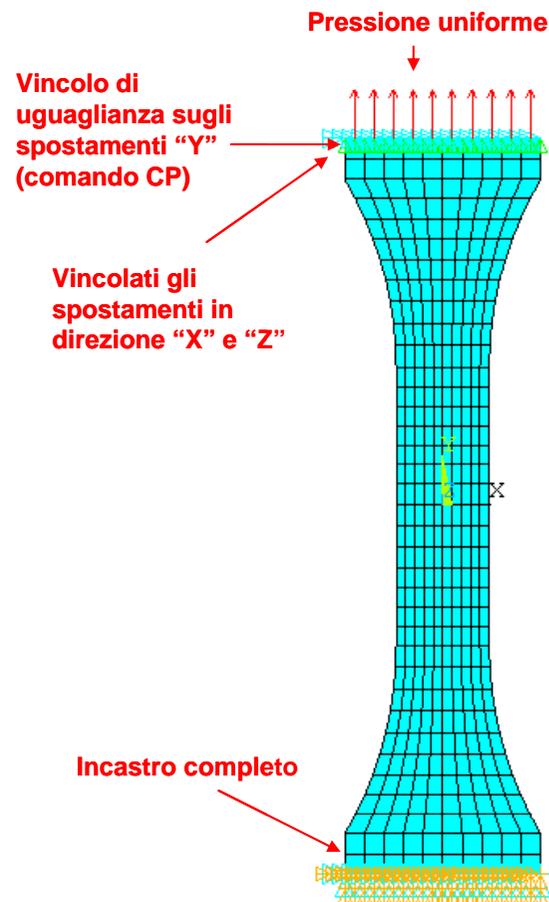


## RISULTATI PROVE DI FLESSIONE





## MODELLO FEM PROVA DI TRAZIONE





## CRITERIO DI ROTTURA (TSAI-WU)

C\*\*\*

C\*\*\* Tensioni di rottura lamina

C\*\*\*

SR1=300

SR2=280

SR3=110

SR12=55

SR23=55

SR31=55

**Definizione dei parametri contenenti i valori delle Tensioni di rottura a trazione e taglio secondo le direzioni principali del materiale**

====

/POST1

C\*\*\*

C\*\*\* CRITERIO DI ROTTURA

C\*\*\*

FC,1,S,XTEN,SR1

FC,1,S,YTEN,SR2

FC,1,S,ZTEN,SR3

FC,1,S,XY,SR12

FC,1,S,YZ,SR23

FC,1,S,XZ,SR31

**Tensioni di rottura a trazione nelle 3 direzioni principali del materiale**

**Tensioni di rottura a taglio nelle 3 direzioni principali del materiale**

C\*\*\*

C\*\*\* RAPPRESENTAZIONE RISULTATI

C\*\*\*

PLESOL,S,TWSI

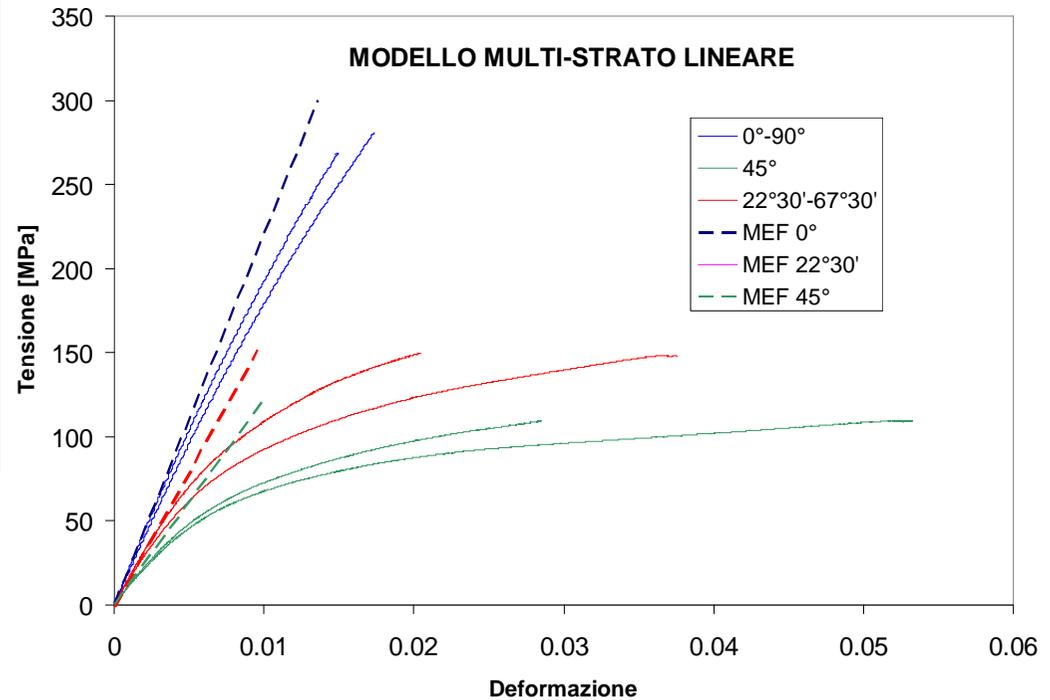
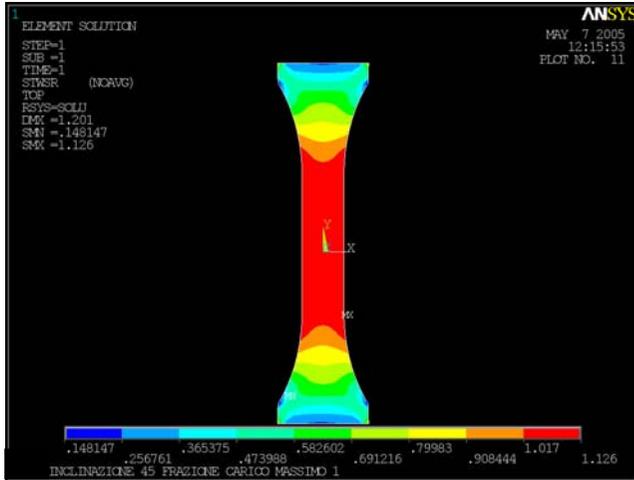
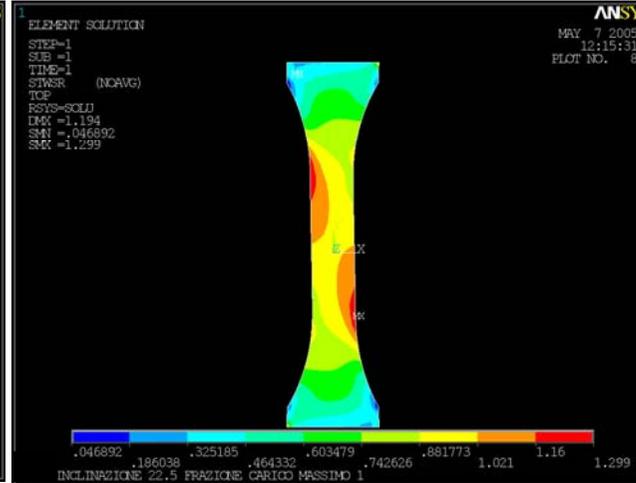
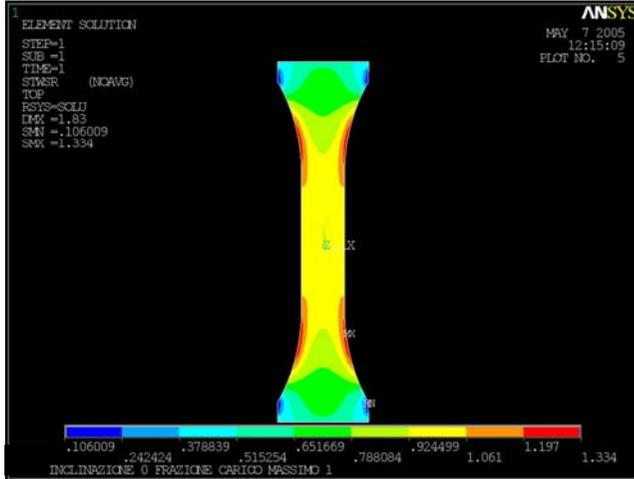
PLESOL,S,TWSR

**Rappresentazione grafica dell'andamento dei due parametri di Tsai-Wu**



# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MODELLO FEM MULTI-STRATO LINEARE



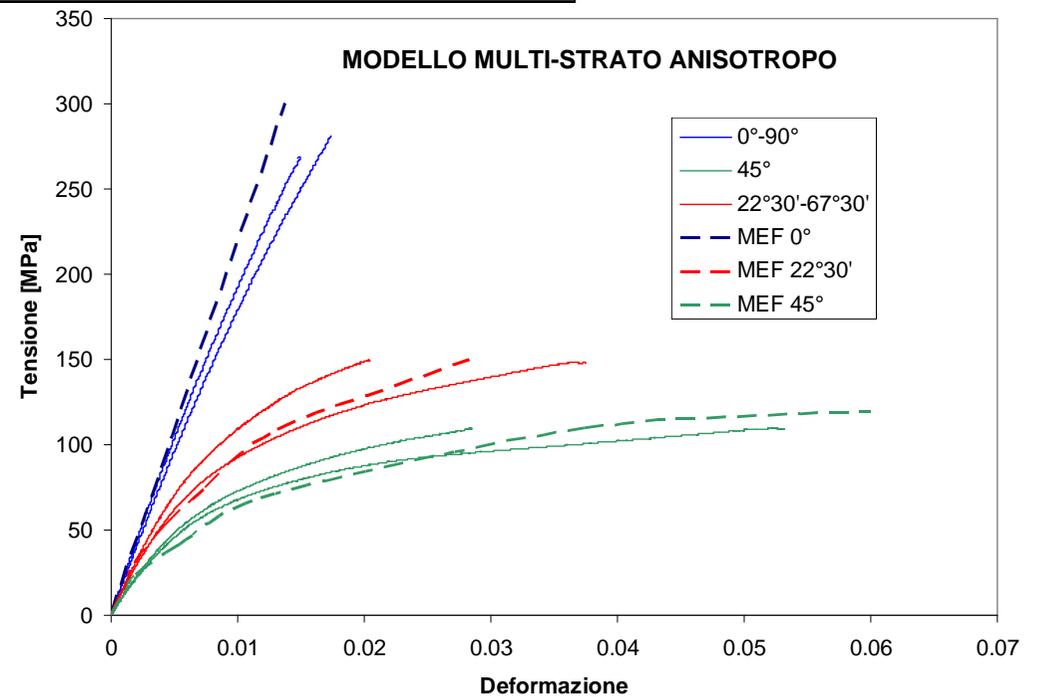
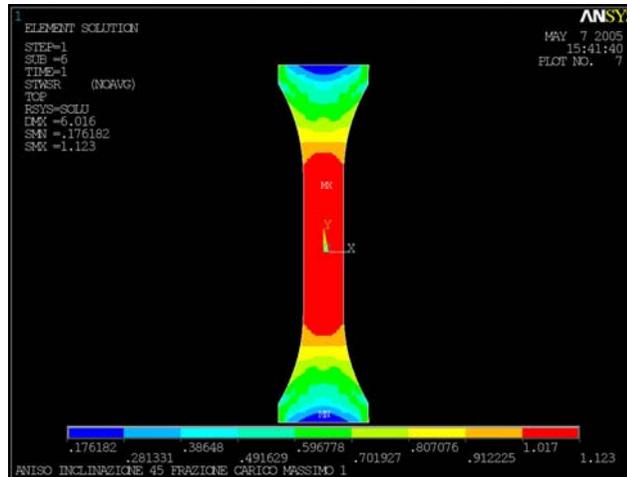
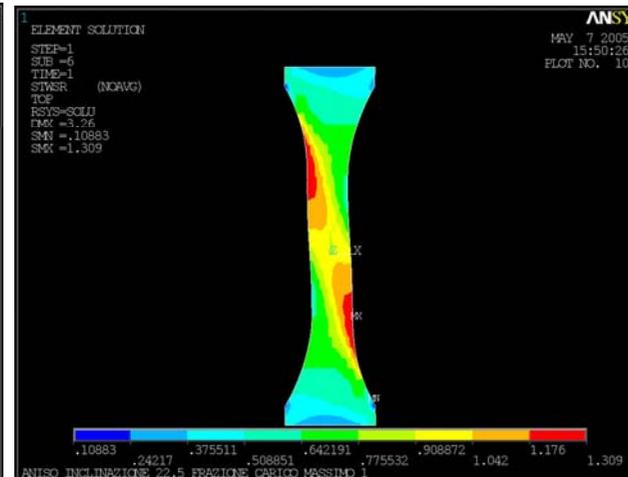
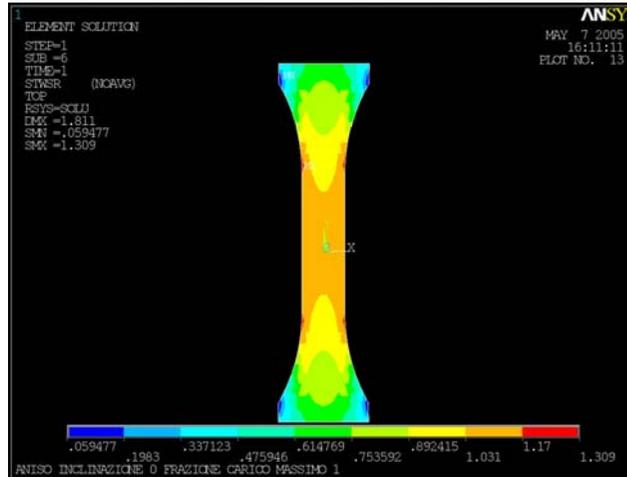




# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

## MODELLO FEM MULTI-STRATO PLASTICITA' ANISOTROPA

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6





## MODELLO DI PLASTICITA' SECONDO HILL

### Scelta rappresentazione multilineare per la curva $\sigma$ - $\varepsilon$ di riferimento

C\*\*\* Materiale  
C\*\*\* DEFINIZIONE CURVA DI SNERVAMENTO A 45°  
C\*\*\* N° punti curva  $\sigma$ - $\varepsilon$   
TB,MISO,1,1,7  
TBPT,,0.00225,27  
TBPT,,0.01,67  
TBPT,,0.02,88  
TBPT,,0.03,98  
TBPT,,0.04,106  
TBPT,,0.05,110  
TBPT,,0.06,112

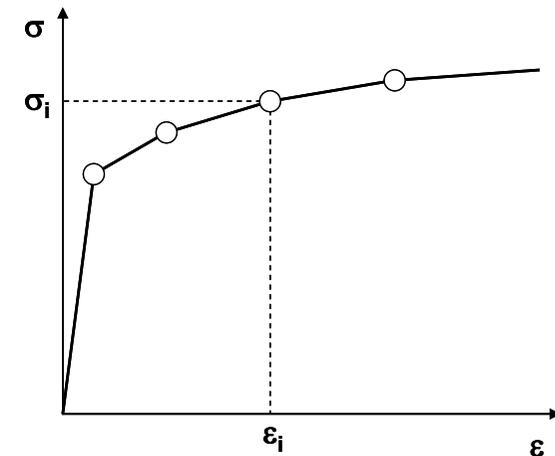
Definizione curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  di riferimento per punti

### Scelta modello plasticità

C\*\*\*  
C\*\*\* DEFINIZIONE SNERVAMENTO ANISOTROPO SECONDO HILL  
C\*\*\*  
TB,HILL,1  
TBDATA,1,10.0,10.0,10.0,0.93,0.93,0.93

Rapporto tra la Tensione di snerv. a taglio e la Tens. snerv. della curva riferimento per le 3 dir. materiale

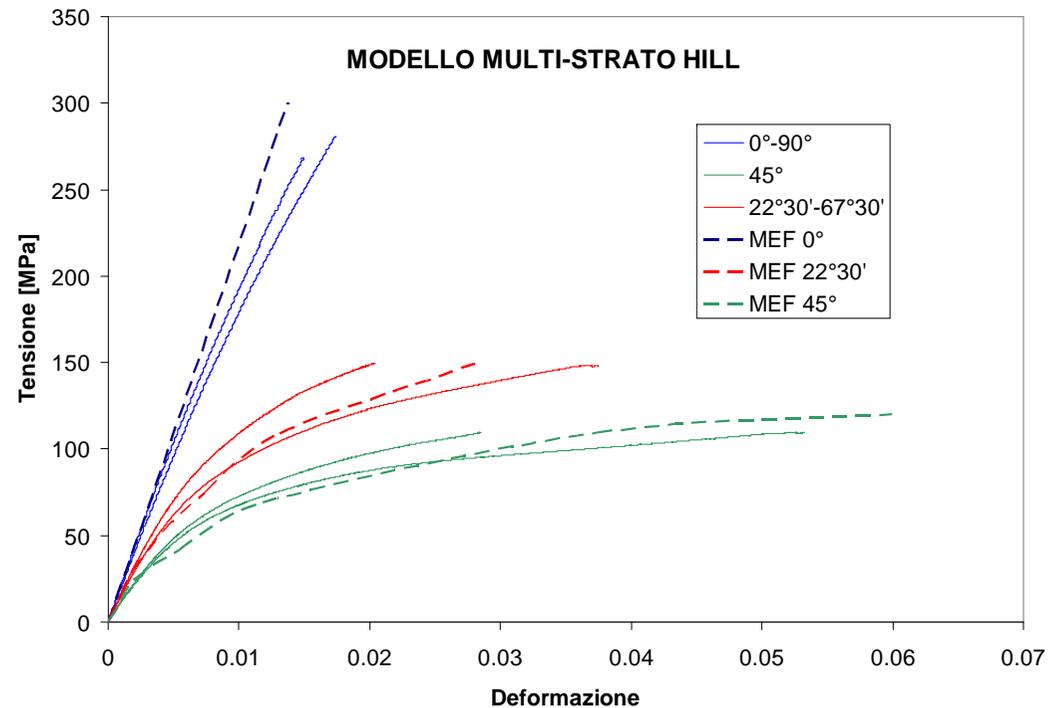
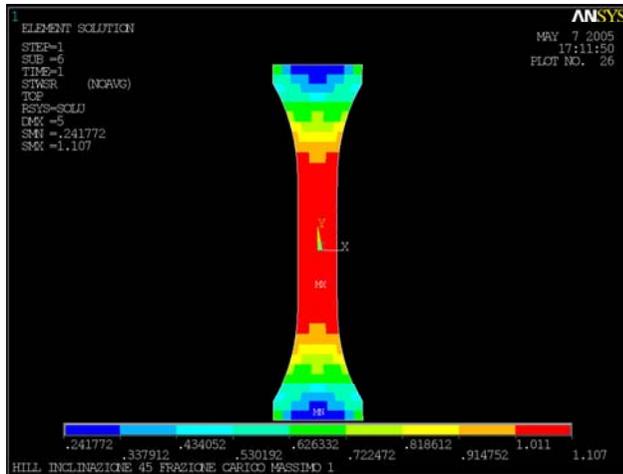
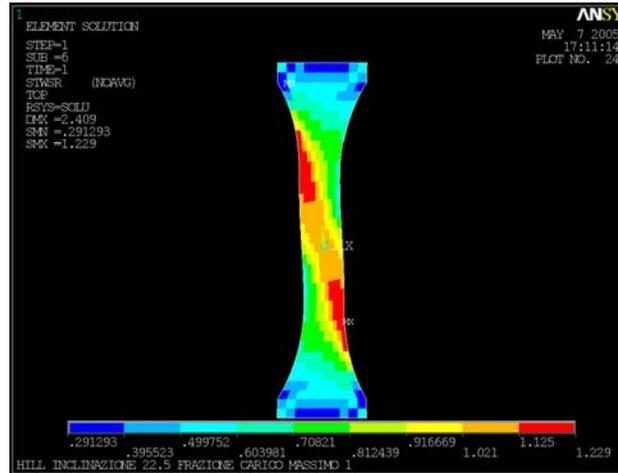
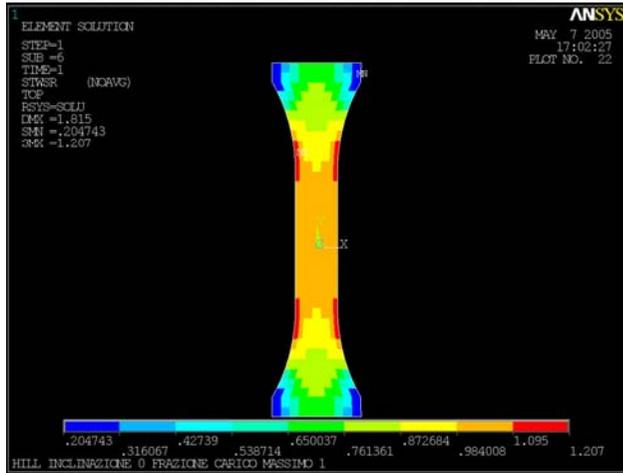
Rapporto tra la Tensione di snerv. a trazione e la Tens. snerv. della curva riferimento per le 3 dir. princ. materiale





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

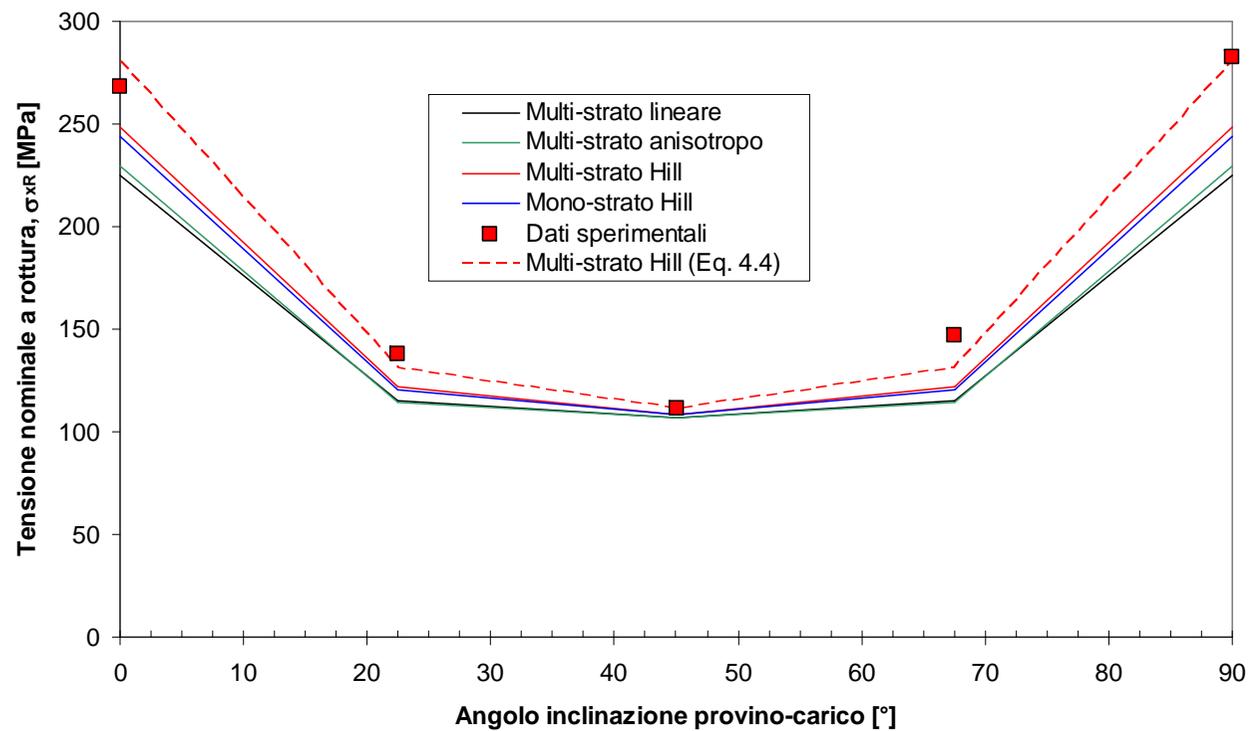
## MODELLO FEM MULTI-STRATO PLASTICITA' ANISOTROPA





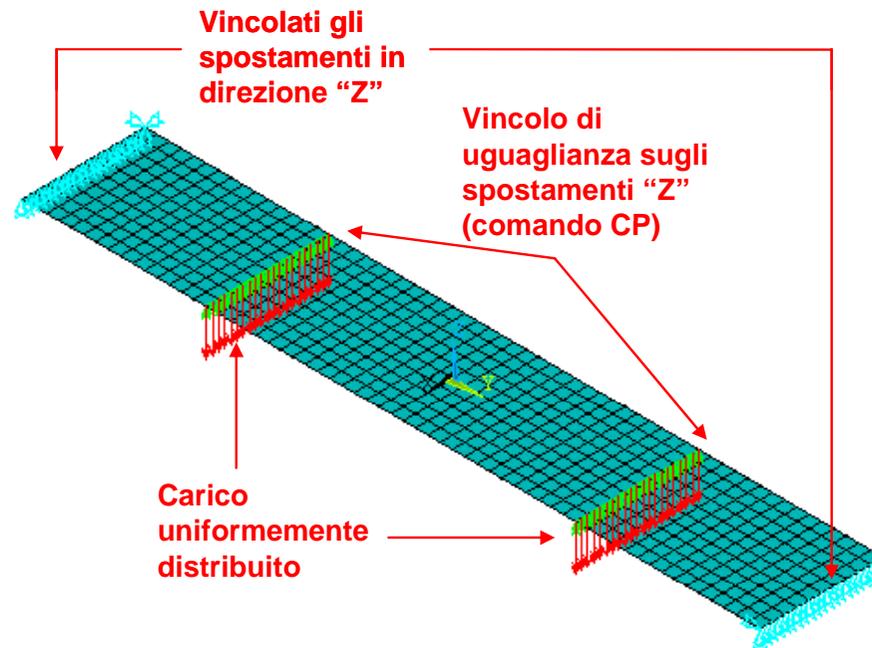
# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6



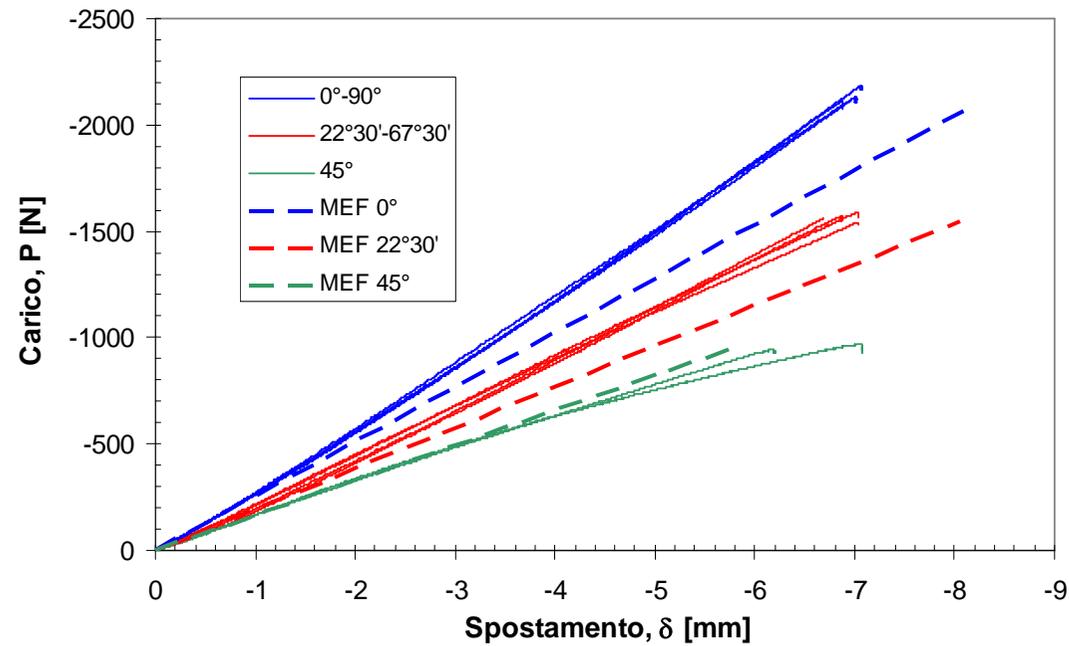


## MODELLO FEM PROVA DI FLESSIONE





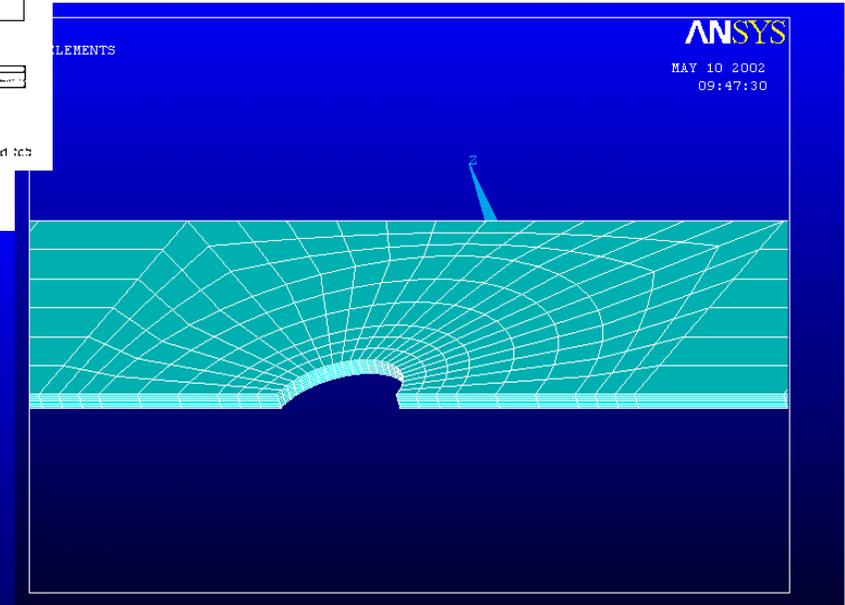
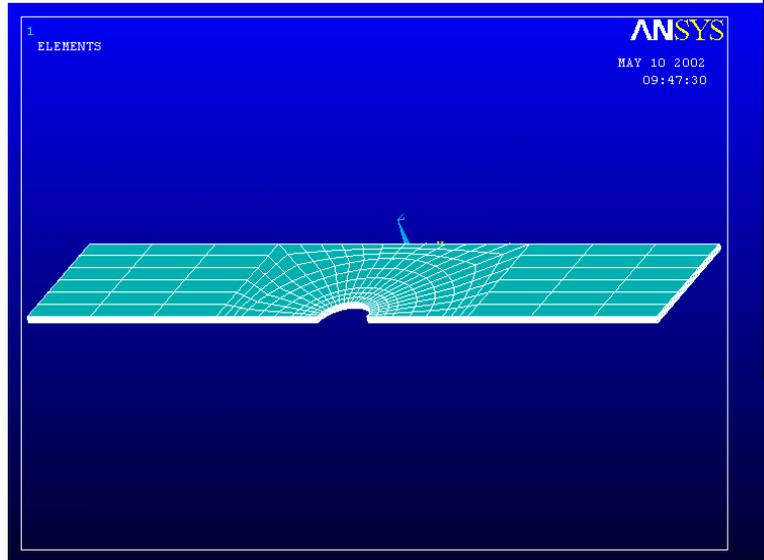
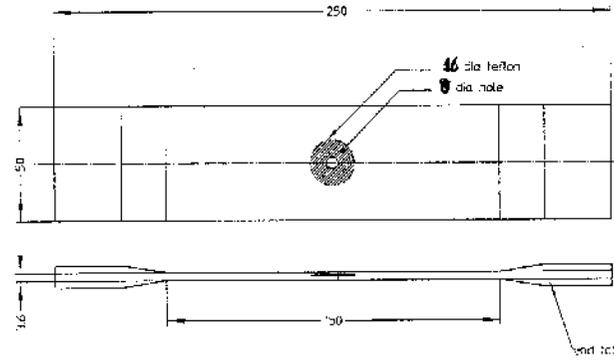
## MODELLO FEM MULTI-STRATO LINEARE





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

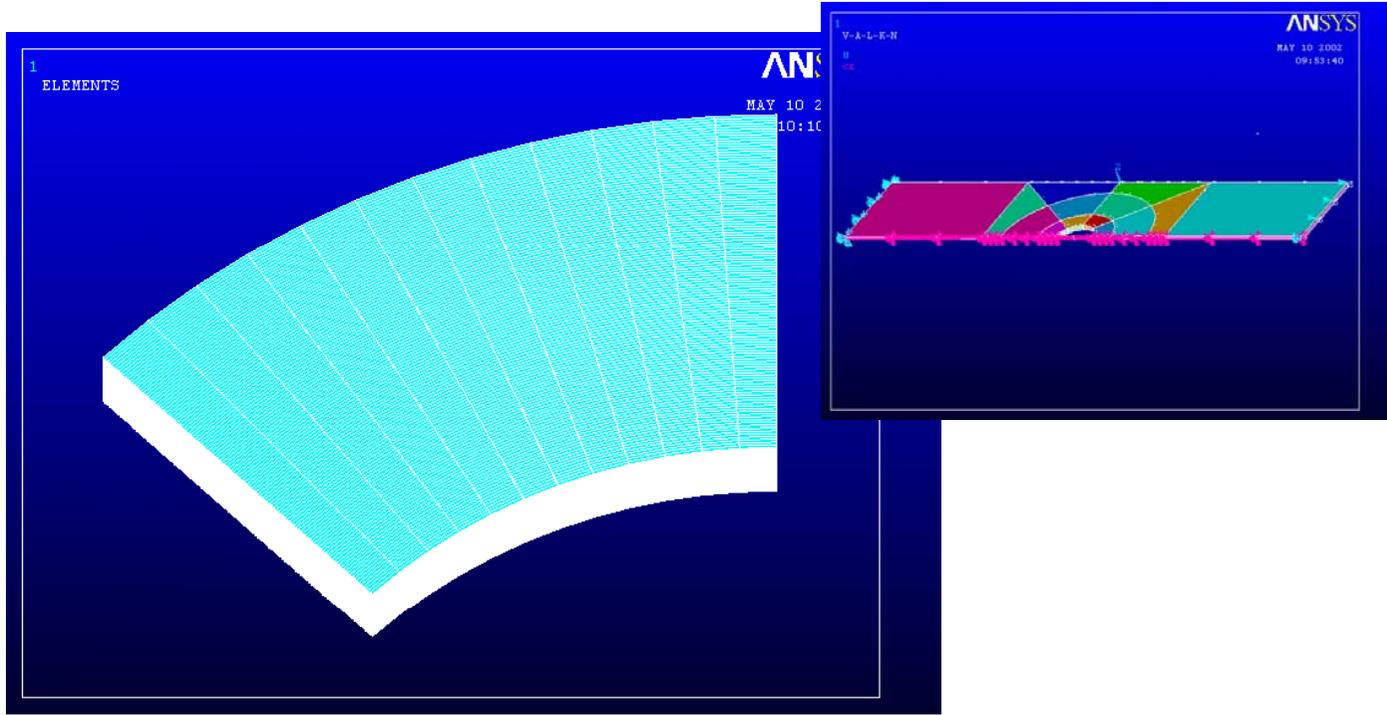
Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

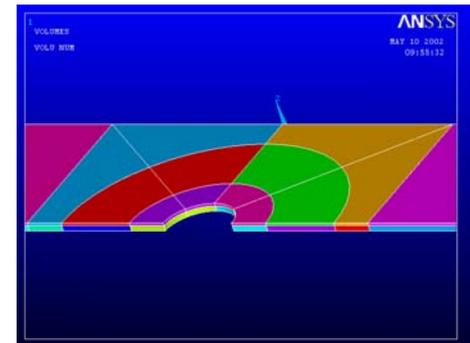
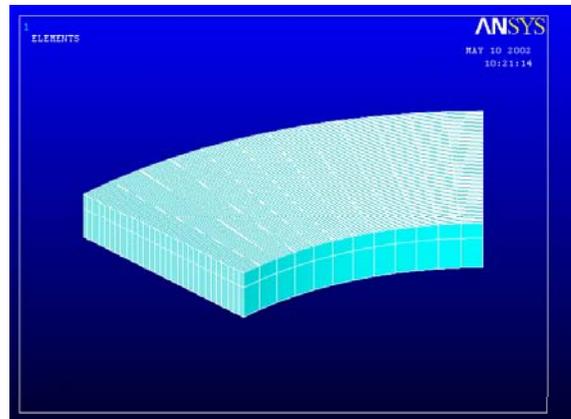
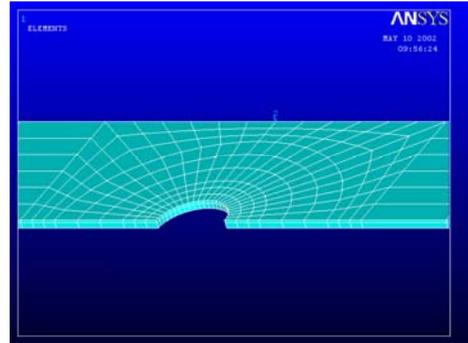
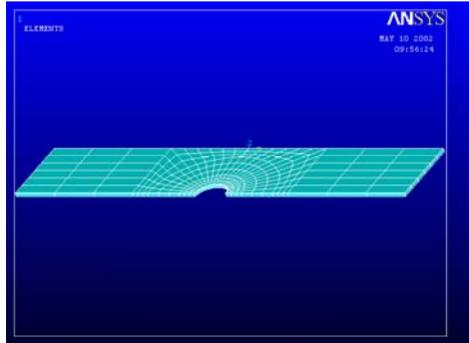
Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6





# Lezioni sull'analisi FEM di strutture in materiale composito

Corso di "Progettazione Assistita delle Strutture Meccaniche II"  
Anno accademico 2005-6

