

Vibrazioni: confronto metodi

Massimo Guiggiani

30 marzo 2022

Sommario

Un esercizio risolto in tre modi diversi, con un'appendice sui vincoli dipendenti dal tempo.

1 Sistema vibrante a due g.l.

Sono noti (Fig. 1):

- le masse m_1 e m_2 ;
- l'angolo α ;
- le rigidezze k_1 e k_2 delle molle (lineari);

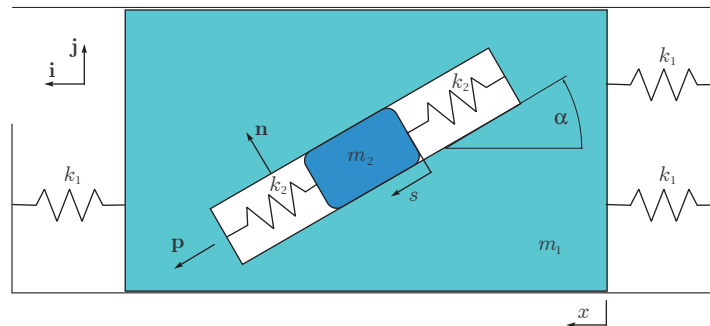


Figura 1: Sistema vibrante a due gradi di libertà

Si vogliono ottenere le equazioni del moto. Ma prima si definiscono la coordinata assoluta x e la coordinata relativa s (Fig. 1).

2 Lagrange

Con i versori definiti in Fig. 1, si hanno le seguenti velocità assolute

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 2\dot{x} \mathbf{i} \\ \mathbf{V}_2 &= \dot{x} \mathbf{i} + \dot{s} \mathbf{p} \end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Energia cinetica

Secondo la definizione, l'energia cinetica T vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2}m_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos(\alpha)) \end{aligned} \quad (2)$$

dato che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{p} = \cos(\alpha)$. Si noti la forma dell'energia cinetica.

2.2 Energia potenziale

Si hanno tre molle k_1 in parallelo fra loro, e due molle k_2 in parallelo fra loro

$$U = \frac{1}{2}3k_1x^2 + \frac{1}{2}2k_2s^2 \quad (3)$$

Dato che le coordinate partono dalla posizione di equilibrio statico, non c'è il contributo gravitazionale.

2.3 Equazioni del moto con Lagrange

Definita $L = T - U$, se si indica con q_i una generica coordinata lagrangiana, si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (4)$$

Applicandola al sistema in esame si ottengono le equazioni del moto

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ddot{s}\cos(\alpha) + 3k_1x &= 0 \\ m_2\ddot{s} + m_2\ddot{x}\cos(\alpha) + 2k_2s &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Matrice di massa simmetrica, matrice di rigidità diagonale.

3 Newton

In accordo con $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, si scrivono in forma vettoriale le equazioni cardinali alla traslazione, una per ciascun corpo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}\mathbf{i} &= -3k_1x\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 2k_2s\mathbf{p} + N\mathbf{n} \\ m_2(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{s}\mathbf{p}) &= -2k_2s\mathbf{p} - N\mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

in cui compaiono le reazioni vincolari $Q\mathbf{j}$ e $N\mathbf{n}$.

Si possono combinare, ottenendo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}\mathbf{i} &= -3k_1x\mathbf{i} + Q\mathbf{j} - m_2(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{s}\mathbf{p}) \\ m_2(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{s}\mathbf{p}) &= -2k_2s\mathbf{p} - N\mathbf{n} \end{aligned} \quad (7)$$

3.1 Equazioni del moto con Newton

Per ottenere le equazioni del moto basta moltiplicare scalarmente la prima per \mathbf{i} e la seconda per \mathbf{p} , così da far "sparire" le reazioni vincolari

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} + m_2[\ddot{x} + \ddot{s}\cos(\alpha)] + 3k_1x &= 0 \\ m_2[\ddot{s} + \ddot{x}\cos(\alpha)] + 2k_2s &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Il risultato è uguale a (5).

Una volta risolte le equazioni differenziali, si possono ottenere le reazioni vincolari per via algebrica.

4 Principio dei lavori virtuali (PLV)

La partenza è come con Newton. Si scrivono in forma vettoriale le equazioni cardinali alla traslazione, una per ciascun corpo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}\mathbf{i} &= -3k_1x\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 2k_2s\mathbf{p} + N\mathbf{n} \\ m_2(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{s}\mathbf{p}) &= -2k_2s\mathbf{p} - N\mathbf{n} \end{aligned} \quad (9)$$

in cui compare la reazione vincolare esterna $Q\mathbf{j}$.

Si definiscono gli spostamenti virtuali: $\delta x\mathbf{i}$ per la scatola di massa m_1 e $\delta x\mathbf{i} + \delta s\mathbf{p}$ per la massa m_2 . Si noti la differenza sostanziale fra i due spostamenti virtuali. Interessante è anche osservare che il vincolo fra m_1 e m_2 *non* è un vincolo dipendente dal tempo. Infatti se la coordinata x è "ferma", lo è anche il vincolo.

Si procede a moltiplicare scalarmente ciascuna equazione per il corrispondente spostamento virtuale

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}\mathbf{i} \cdot \delta x\mathbf{i} &= (-3k_1x\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 2k_2s\mathbf{p} + N\mathbf{n}) \cdot \delta x\mathbf{i} \\ m_2(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{s}\mathbf{p}) \cdot (\delta x\mathbf{i} + \delta s\mathbf{p}) &= (-2k_2s\mathbf{p} - N\mathbf{n}) \cdot (\delta x\mathbf{i} + \delta s\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (10)$$

da cui

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}\delta x &= [-3k_1x + 2k_2s\cos(\alpha) + N\sin(\alpha)]\delta x \\ m_2[\ddot{x} + \ddot{s}\cos(\alpha)]\delta x + m_2[\ddot{x}\cos(\alpha) + \ddot{s}]\delta s &= [-2k_2s\cos(\alpha) - N\sin(\alpha)]\delta x - 2k_2s\delta s \end{aligned} \quad (11)$$

Con questo passaggio si è eliminata la reazione vincolare $Q\mathbf{j}$.

A questo punto si sommano le due equazioni, in modo da far sparire le forze interne

$$\{m_1\ddot{x} + m_2[\ddot{x} + \ddot{s}\cos(\alpha)]\}\delta x + m_2[\ddot{x}\cos(\alpha) + \ddot{s}]\delta s = -3k_1x\delta x - 2k_2s\delta s \quad (12)$$

Infine, tenuto conto che δx e δs sono indipendenti, si ottengono esattamente le equazioni del moto (5) e (8).

Il Principio dei Lavori Virtuali NON è un principio energetico. Piuttosto è il principio del prodotto scalare per vincoli lisci.

4.1 PLV generalizzato

Ma chi l'ha detto che δx debba essere lo stesso per m_1 e m_2 ? Se si usano δx_1 e δx_2 diversi si ottengono le seguenti equazioni algebrico-differenziali (DAE)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -3k_1 x + 2k_2 s \cos(\alpha) + N \sin(\alpha) \\ m_2 [\ddot{x} + \ddot{s} \cos(\alpha)] &= -2k_2 s \cos(\alpha) - N \sin(\alpha) \\ m_2 [\ddot{x} \cos(\alpha) + \ddot{s}] &= -2k_2 s \end{aligned} \quad (13)$$

in cui compare anche la forza interna N .

5 Vincolo dipendente dal tempo

Si consideri il sistema di Fig. 2, simile a quello di Fig. 1, ma con un'importante differenza: $x(t)$ è imposto e quindi il sistema passa da due a un solo grado di libertà. Ma forse la differenza più interessante è che adesso la scanalatura inclinata dell'angolo α è un vincolo dipendente dal tempo (reonomo).

5.1 Lagrange

La velocità assoluta \mathbf{V}_2 di m_2 è ancora come in (1). Pertanto l'energia cinetica vale

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos(\alpha)) \end{aligned} \quad (14)$$

L'energia potenziale U vale

$$U = \frac{1}{2} 2k_2 s^2 \quad (15)$$

L'equazione del moto è

$$m_2 \ddot{s} + 2k_2 s = -m_2 \cos(\alpha) \ddot{x} \quad (16)$$

formalmente identica alla seconda equazione in (5), ma diversa nella sostanza. Infatti adesso il termine con \ddot{x} è una forzante assegnata.

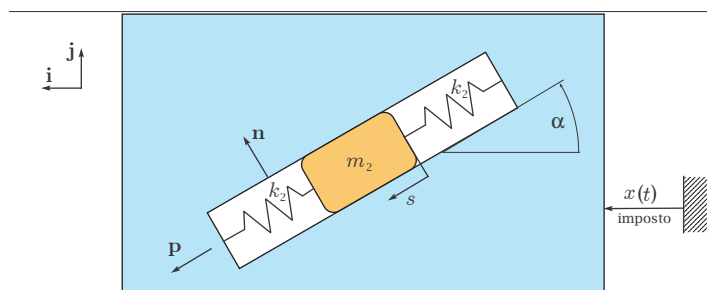


Figura 2: Sistema vibrante ad un grado di libertà con vincolo reonomo

5.2 Newton

Esattamente come nella seconda equazione in (6)

$$m_2(\ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{s} \mathbf{p}) = -2k_2 s \mathbf{p} - N \mathbf{n} \quad (17)$$

in cui compare la reazione vincolare $N \mathbf{n}$.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{p} , si ottiene

$$m_2 \ddot{s} + 2k_2 s = -m_2 \cos(\alpha) \ddot{x} \quad (18)$$

Il risultato è uguale a (16).

5.3 PLV

Lo spostamento virtuale va preso con i vincoli "congelati". Quindi vale $\delta s \mathbf{p}$. I passaggi sono gli stessi fatti per ottenere (18). Si vede che quello che conta è la direzione della reazione vincolare $N \mathbf{n}$, che non viene influenzata dall'essere il vincolo dipendente dal tempo. Questo è il motivo del "congelamento".

Ovviamente il risultato finale è lo stesso di (16) e (18).