Pendolo "Storto"

Massimo Guiggiani

4 aprile 2022

Sommario

Dove si approfondisce il concetto di linearizzazione per piccole oscillazioni.

1 Pendolo con molla di torsione

Sono noti (Fig. 1):

- la massa puntiforme m;
- la rigidezza torsionale k;
- la lunghezza b;
- l'accelerazione di gravità g;
- la posizione di molla scarica α_0.

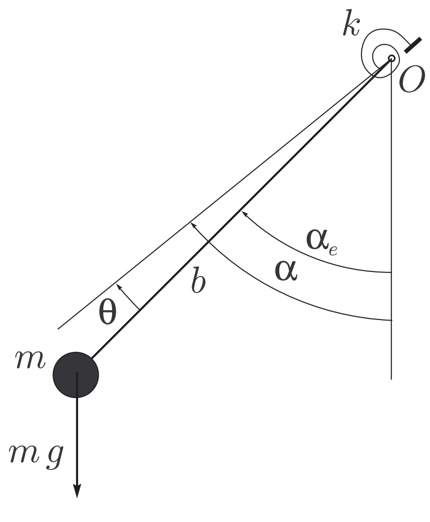

Figura 1: Pendolo con molla di torsione

Si vuole ottenere l'equazione del moto di questo sistema vibrante a un grado di libertà.

1.1 Equilibrio statico

All'equilibrio molla e peso si devono bilanciare

$$0 = -mgb\sin(\alpha_e) - k(\alpha_e - \alpha_0) \tag{1}$$

da cui si ricava la posizione di equilibrio α_e.

1.2 Equazione del moto

Equilibrio dinamico alla rotazione intorno a O

$$mb^2\ddot{\alpha} = -mgb\sin(\alpha) - k(\alpha - \alpha_0) \tag{2}$$

Si introduce una nuova coordinata angolare $\theta = \alpha - \alpha_e$

$$mb^2\ddot{\theta} = -mgb\sin(\theta + \alpha_e) - k(\theta + \alpha_e - \alpha_0) \tag{3}$$

Se si considera la (1), si ottiene

$$mb^2\ddot{\theta} = -mgb\sin(\theta + \alpha_e) + mgb\sin(\alpha_e) - k\theta \tag{4}$$

Dalla trigonometria

$$\sin(\theta + \alpha_e) = \sin(\alpha_e)\cos(\theta) + \cos(\alpha_e)\sin(\theta) \tag{5}$$

da cui

$$mb^2\ddot{\theta} = -mgb[\sin(\alpha_e)(\cos(\theta) - 1) + \cos(\alpha_e)\sin(\theta)] - k\theta \tag{6}$$

Se piccole oscillazioni, si può linearizzare la (4) rispetto a θ (l'unica piccola)

$$\sin(\theta + \alpha_e) = \sin(\alpha_e) + \cos(\alpha_e)\theta + O(\theta^2) \tag{7}$$

da cui l'equazione del moto linearizzata

$$mb^2\ddot{\theta} = -[mgb\cos(\alpha_e) + k]\theta \tag{8}$$

1.3 Casi particolari

Tre casi particolari di posizione di equilibrio statico sono riportati in Fig. 2. Si scriva, in particolare, l'equazione del moto linearizzata se $\alpha_e = \pi/2$. Cosa accade alla forza peso?

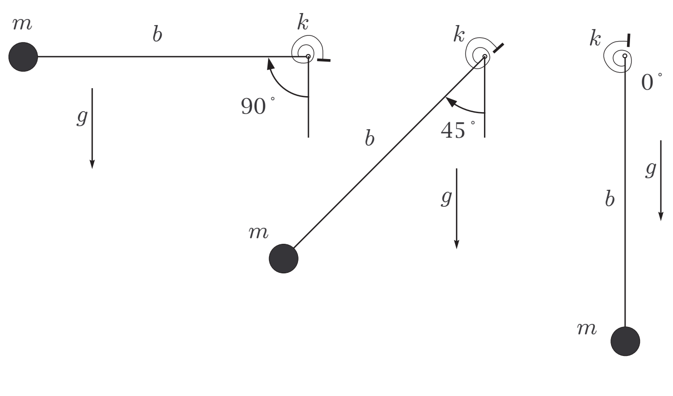

Figura 2: Casi particolari di equilibrio statico