Grado di Irregolarità

Massimo Guiggiani

22 aprile 2023

Sommario

Un semplice esempio per chiarire la teoria.

1 Definizione di regimi assoluto e periodico

Si consideri un albero rotante. Se la sua velocità angolare Ω è rigorosamente costante si dice che è in condizioni di *regime assoluto*. Se invece la sua velocità angolare è una funzione periodica si parla di *regime periodico*.

Ad esempio, in un'automobile con motore a combustione interna, che viaggi a velocità costante, l'albero motore non è in condizioni di regime assoluto. Ogni pistone eroga coppia in maniera molto variabile e bielle e pistoni non hanno un moto rotatorio. Quindi, anche se a prima vista può sembrare strano, l'albero motore è in condizioni di regime periodico. Invece in un'automobile con motore elettrico tutto è più regolare e si può avere regime assoluto.

Si lascia al lettore stabilire qual è il periodo in un motore a quattro tempi e se il periodo dipende o no dal numero di cilindri e dalla loro disposizione.

2 Definizione di grado di irregolarità

Il *grado di irregolarità* δ è una misura oggettiva di quanto la velocità angolare Ω di un albero in condizioni di regime periodico non sia rigorosamente costante. La definizione è ovvia

$$\delta = \frac{\Omega_{\text{max}} - \Omega_{\text{min}}}{\Omega_{\text{med}}} \tag{1}$$

Se si approssima la velocità angolare media Ω_{med} con

$$\Omega_{\text{med}} \simeq \frac{\Omega_{\text{max}} + \Omega_{\text{min}}}{2} \tag{2}$$

si ottiene

$$\delta \simeq \frac{\Omega_{\text{max}}^2 - \Omega_{\text{min}}^2}{2\Omega_{\text{med}}^2} \tag{3}$$

che, come si vedrà, può essere utile in certi casi.

Nella pratica (cioè δ piccolo), il valore di δ cambia molto poco se si assegna a Ω_{med} un qualunque valore fra Ω_{max} e Ω_{min}.

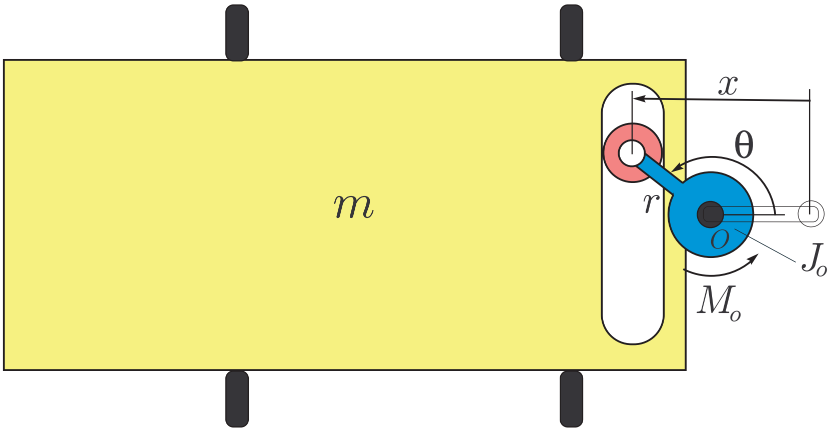

Figura 1: Moto alternato

3 Energia cinetica

Per fissare le idee, si prenda in esame il sistema rappresentato in Fig. 1. Un albero rotante, con momento di inerzia J_o rispetto al suo asse di rotazione, fa traslare di moto alternato, con un eccentrico di raggio r, una massa m. Si assume la totale assenza di attrito.

Il legame fra le coordinate θ e x è il seguente

$$\begin{aligned} x &= r[1 - \cos(\theta)] \\ &\text{da cui} \\ \dot{x} &= r\sin(\theta)\dot{\theta} \\ \ddot{x} &= r[\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + \sin(\theta)\ddot{\theta}] \end{aligned} \tag{4}$$

L'energia cinetica è facile da scrivere

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}[J_o + mr^2\sin^2(\theta)]\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}[J_o + J_a(\theta)]\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}J(\theta)\Omega^2 \end{aligned} \tag{5}$$

dove $J_a(\theta) = mr^2\sin^2(\theta)$ e $\dot{\theta} = \Omega$. A causa della massa in moto alterno, il sistema si comporta come se avesse un momento d'inerzia $J(\theta) = J_o + J_a(\theta)$ dipendente da θ. Questo fatto ha notevole rilevanza perché contribuisce a rendere non costante la velocità angolare.

Nel caso in esame (Fig. 1) l'inerzia ha periodo $\rho_J = \pi$, dovuto al termine $\sin^2(\theta)$. L'energia potenziale E_p è costantemente nulla. Pertanto, in *assenza di azioni esterne*, l'energia cinetica è *costante*.

4 Azioni esterne

Nel caso più generale, all'albero può essere applicato un momento $M_o(\theta)$ a valor medio nullo su un certo periodo ρ_M (regime periodico). Infatti, per avere regime periodico è necessario che il lavoro di M_o sia nullo nel periodo

$$\int_0^{\rho_M} M_o(\theta) d\theta = 0 \tag{6}$$

Il periodo ρ della macchina sarà il minimo comune multiplo intero di ρ_J e ρ_M.

5 Equazione del moto

Si può usare il metodo di Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{d\dot{\theta}} &= [J_o + J_a(\theta)]\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\theta}}\right) &= [J_o + J_a(\theta)]\ddot{\theta} + \frac{dJ_a}{d\theta}\dot{\theta}^2 \\ \frac{dE_c}{d\theta} &= \frac{1}{2}\frac{dJ_a}{d\theta}\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

da cui si ottiene l'importante equazione del moto

$$[J_o + J_a(\theta)]\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{dJ_a}{d\theta}\dot{\theta}^2 = M_o(\theta) \tag{8}$$

con le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = \Omega_0$. Si noti il duplice contributo di $J_a(\theta)$.

Nel caso del sistema di Fig. 1, $J_a(\theta) = mr^2 \sin^2(\theta)$ e quindi l'equazione del moto (8) diventa

$$[J_o + mr^2 \sin^2(\theta)]\ddot{\theta} + mr^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta}^2 = M_o(\theta) \tag{9}$$

6 Calcolo del grado di irregolarità δ

Si prendono in esame vari metodi, più o meno approssimati, per il calcolo di δ. Questi risultati non sono influenzati dalla scelta arbitraria di dove fissare $\theta = 0$.

6.1 Inerzia costante

Nel caso particolare di $J_a = 0$, si può calcolare il massimo e il minimo del lavoro $\mathcal{L}$ fatto da $M_o(\theta)$ nel ciclo

$$\mathcal{L}(\theta) = \int_0^{\theta} M_o(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \tag{10}$$

Dato che $J_o = \text{const.}$, per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_o\left(\Omega_{\max}^2 - \Omega_0^2\right) &= \mathcal{L}_{\max} \\ \frac{1}{2}J_o\left(\Omega_{\min}^2 - \Omega_0^2\right) &= \mathcal{L}_{\min} \end{aligned} \tag{11}$$

Questi risultati possono essere inseriti nella (3), più comoda della (1), ottenendo

$$\delta \simeq \frac{\mathcal{L}_{\max} - \mathcal{L}_{\min}}{J_o \Omega^2_{\text{med}}} \tag{12}$$

che mostra come un aumento di J_o porti a una riduzione di δ (e a un aumento di peso e anche a una riduzione della massima accelerazione...). È l'*effetto volano*[1], valido in generale.

6.2 Momenti esterni nulli

Caso duale rispetto al precedente è quando $M_o = 0$. In tal caso l'energia cinetica (5) è costante e quindi

$$J_{\min}\Omega^2_{\max} = J_{\max}\Omega^2_{\min} = J(0)\Omega^2_0 \tag{13}$$

da cui

$$\begin{aligned} \Omega^2_{\max} &= \frac{J(0)\Omega^2_0}{J_{\min}} \\ \Omega^2_{\min} &= \frac{J(0)\Omega^2_0}{J_{\max}} \end{aligned} \tag{14}$$

Nel caso di Fig. 1 si ha $J_{\min} = J_o = J(0)$ e $J_{\max} = J_o + mr^2$, da cui

$$\begin{aligned} \Omega^2_{\max} &= \Omega^2_0 \\ \Omega^2_{\min} &= \frac{J_o\Omega^2_0}{J_o + mr^2} \end{aligned} \tag{15}$$

e quindi, usando la (3)

$$\delta \simeq \frac{\Omega^2_0}{2\Omega^2_{\text{med}}}\left(1 - \frac{J_o}{J_o + mr^2}\right) = \frac{\Omega^2_0}{2\Omega^2_{\text{med}}}\frac{mr^2}{J_o + mr^2} \tag{16}$$

Se poi δ è piccolo, e quindi $mr^2 \ll J_o$ e $\Omega_0 \simeq \Omega_{\text{med}}$

$$\delta \simeq \frac{mr^2}{2(J_o + mr^2)} \simeq \frac{mr^2}{2J_o} \tag{17}$$

che indica chiaramente l'effetto su δ della massa alterna m e del momento d'inerzia J_o del volano.

Ovviamente, si ottiene lo stesso risultato approssimato se si usa la (1). Il lettore (giustamente) scettico può verificarlo.

6.3 Rigoroso, ma numerico

Nel caso generale ($J_a(\theta)$ e $M_o(\theta)$ entrambi non nulli) l'equazione differenziale probabilmente non è integrabile analiticamente. Però, si può sempre ricorrere ad una soluzione numerica per valutare l'andamento di Ω, trovare $\Omega_{\max}$, $\Omega_{\min}$ e anche Ω_{med}, e quindi valutare il grado di irregolarità δ. È un metodo (quasi) esatto, ma poco informativo sul fenomeno.

[1] Nel linguaggio comune la parola volano viene spesso usata in maniera impropria. Comunque ben peggiore è la frase "minimo comun denominatore", totalmente priva di senso. Del resto anche vedere in tv un cartello con MW/h per megawattora fa percepire quale sia il livello culturale scientifico anche di persone laureate.

6.4 Analitico, ma approssimato

Per avere una soluzione analitica si può ricorrere all'approssimazione di Tredgold. L'idea è semplice: ricondurre il caso generale al caso di inerzia costante, tenendo conto di $J_a(\theta)$ in modo approssimato.

L'equazione rigorosa, già ottenuta in (8)

$$[J_o + J_a(\theta)]\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{dJ_a(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2 = M_o(\theta) \tag{18}$$

viene approssimata così

$$(J_o + \widetilde{J}_a)\ddot{\theta} = M_o(\theta) - \frac{1}{2}\frac{dJ_a(\theta)}{d\theta}\Omega^2_{\text{med}} \tag{19}$$

dove

$$\widetilde{J}_a = \frac{1}{2}\frac{\int_0^\rho J_a(\theta)d\theta}{\rho} \tag{20}$$

è la metà del valor medio. Infatti si è visto empiricamente che si ottengono risultati migliori rispetto sia a prendere tutto il valor medio, sia a porre $\widetilde{J}_a = 0$.

Posti $\widetilde{J}_o = J_o + \widetilde{J}_a$ e $\widetilde{M}_o(\theta) = M_o(\theta) - \frac{1}{2}\frac{dJ_a(\theta)}{d\theta}\Omega^2_{\text{med}}$, si ha un'equazione del moto (apparentemente) con inerzia costante e azioni esterne funzioni di θ

$$\widetilde{J}_o\ddot{\theta} = \widetilde{M}_o(\theta) \tag{21}$$

Nel caso in esame $\widetilde{J}_a = 0.5(mr^2/2)$ e $\widetilde{M}_o(\theta) = M_o(\theta) - mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\Omega^2_{\text{med}}$. Si può quindi procedere esattamente come nel paragrafo 6.1.

Nel caso particolare in cui sia $M_o = 0$, si ottiene

$$\mathcal{L}(\theta) = -mr^2\Omega^2_{\text{med}}\int_0^\theta \sin(\hat{\theta})\cos(\hat{\theta})d\hat{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\Omega^2_{\text{med}}[\cos^2(\theta) - 1] \tag{22}$$

da cui $\mathcal{L}_{\max} = 0$ e $\mathcal{L}_{\min} = -mr^2\Omega^2_{\text{med}}/2$, che forniscono ancora, in base alla (12)

$$\delta \simeq \frac{mr^2}{2(J_o + mr^2)} \simeq \frac{mr^2}{2J_o} \tag{23}$$

Si ribadisce che la definizione della posizione angolare per cui $\theta = 0$ influenza il valore di $\mathcal{L}_{\max}$ e il valore di $\mathcal{L}_{\min}$, ma non la loro differenza.

In definitiva, il contributo delle masse alterne viene conteggiato come uno squilibrio della coppia applicata. Si ribadisce che ciò è lecito se il grado di irregolarità è basso. Valori tipici sono $\delta = 1/200$ in motori automobilistici a combustione, $\delta = 1/100$ nelle dinamo e $\delta = 1/70$ nelle macchine per cartiere.

Ad esempio, con $\Omega = 5000$ rpm, $J_o = 0.15$ kg m^2, $mr^2 = 0.003$ kg m^2 e $M_o = 0$, si ottiene $\delta = 1/100$ con tutte le procedure esposte in precedenza.