

Glifo Oscillante

Alessio Artoni

Massimo Guiggiani

13 febbraio 2023

Sommario

Si studia un meccanismo piano con coppia prismatica mobile.

1 Introduzione

Come noto, la velocità assoluta \mathbf{v}_P di un punto P può sempre essere scomposta nella somma vettoriale di velocità relativa \mathbf{v}_P^r e velocità di trascinamento \mathbf{v}_P^t

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^r + \mathbf{v}_P^t \quad (1)$$

Si tratta di una formula bella e pericolosa. Bella perché vale sempre. Pericolosa perché vale sempre. Infatti diventa utile solo quando, grazie alla scelta di un opportuno sistema di riferimento in moto, entrambe \mathbf{v}_P^r e \mathbf{v}_P^t diventano semplici, mentre \mathbf{v}_P può essere difficile.

Nello studio dei meccanismi con coppie prismatiche mobili la (1) è di importanza fondamentale. Quindi va saputa utilizzare bene e senza incertezze.

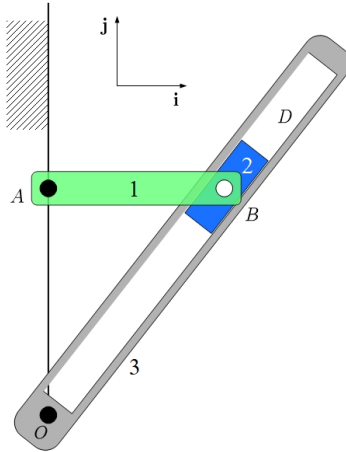


Figura 1: Glifo oscillante: meccanismo con coppia prismatica

Un meccanismo ad un grado di libertà con coppia prismatica è il *glifo oscillante*, schematicamente rappresentato in Fig. 1. Il corpo 1 ruota intorno alla cerniera fissa A . Il corpo 3 ruota intorno alla cerniera fissa O . Il corpo 2 ha

un moto più generale: ruota rispetto a 1 intorno alla cerniera mobile B e trasla rispetto a 3 lungo la coppia prismatica mobile D .

Un passo fondamentale nell'analisi cinematica dei meccanismi è l'individuazione dei *punti notevoli*, cioè di punti con moto particolarmente semplice. Nel caso di Fig. 1 sono notevoli i punti A e O (banali), il punto B (ovvio) e un altro punto meno ovvio: il punto \tilde{O} del piano mobile di 2 che in quell'istante è sovrapposto a O . Più precisamente, sono notevoli per le velocità i punti di cui si conosce la *direzione della velocità assoluta*.

2 Velocità

Si prenda in esame il punto notevole B . In quanto punto di 1, ha traiettoria circolare centrata in A . Quindi (Fig. 2)

$$\mathbf{v}_B = \dot{\alpha} \mathbf{k} \times AB \quad (2)$$

dove $\dot{\alpha}$ è la velocità angolare assoluta di 1.

Per ottenere un'altra espressione di \mathbf{v}_B è conveniente prendere un riferimento solidale a 3. Infatti, si ha che la velocità relativa \mathbf{v}_B^r è facile, in quanto diretta come la coppia prismatica

$$\mathbf{v}_B^r = \dot{s} \mathbf{q} \quad (3)$$

con il versore \mathbf{q} diretto come OB . Facile è anche la velocità di trascinamento \mathbf{v}_B^t , essendo quella del punto di 3 che coincide in quell'istante con B

$$\mathbf{v}_B^t = \dot{\beta} \mathbf{k} \times OB \quad (4)$$

L'equazione risolutiva della cinematica è quindi (Fig. 2)

$$\dot{\alpha} \mathbf{k} \times AB = \dot{s} \mathbf{q} + \dot{\beta} \mathbf{k} \times OB \quad (5)$$

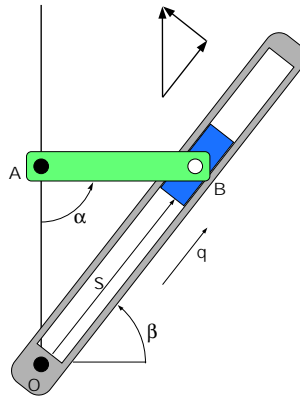


Figura 2: Glifo oscillante: triangolo delle velocità per il punto B

I tre vettori che compaiono nella (5) sono indicati in Fig. 2. Si lascia al lettore il semplice compito di dare a ciascuno il proprio nome. Nelle applicazioni, un vettore è noto completamente, mentre gli altri due sono noti in direzione.

Le *velocità* e le *accelerazioni* sono *vettori liberi*. Quindi non hanno una retta di applicazione. Infatti, in Fig. 2 i vettori velocità sono stati tracciati in un posto a caso. Sono invece *vettori applicati* le *forze* e le *quantità di moto*: un vettore libero moltiplicato per una massa diventa un vettore applicato. Un'osservazione semplice, ma fondamentale.

Dopo aver risolto la (5) si può ottenere la velocità \mathbf{v}_P di qualunque punto P del corpo 2

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \dot{\alpha} \mathbf{k} \times AB + \dot{\beta} \mathbf{k} \times BP \\ &= \dot{s} \mathbf{q} + \dot{\beta} \mathbf{k} \times OP\end{aligned}\quad (6)$$

Le due espressioni sono equivalenti.

3 Centro delle Velocità

I corpi 1 e 3 hanno banalmente il centro delle velocità sulla cerniera fissa. Più interessante è trovare il centro delle velocità C del corpo 2, cioè quel punto di 2 che ha velocità nulla. Come illustrato in Fig. 3, si considerano i due punti notevoli B e \tilde{O} , cui si è già fatto cenno. La conoscenza della direzione della loro velocità assoluta permette di individuare C . Basta trovare l'intersezione fra due rette passanti per i due punti e ortogonali alle velocità assolute.

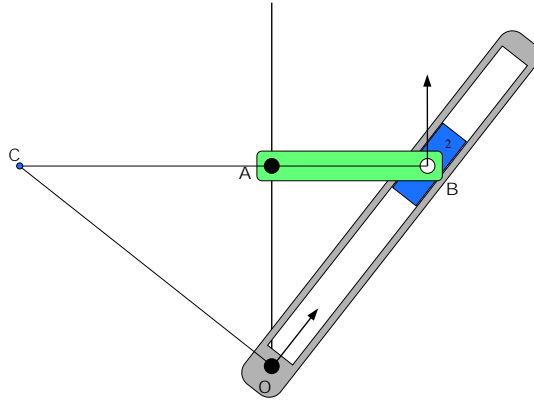


Figura 3: Determinazione di C , centro delle velocità del corpo 2

Dalla (6), in formule abbiamo che per azzerare la velocità di C si deve avere

$$\dot{\alpha} \mathbf{k} \times AB = \dot{\beta} \mathbf{k} \times CB \quad (7)$$

$$\dot{s} \mathbf{q} = \dot{\beta} \mathbf{k} \times CO \quad (8)$$

Attenzione! Queste sono equazioni, cioè uguaglianze fra numeri, non fra funzioni, un po' come l'equazione $x = 1$. Ovviamente non hanno la stessa derivata. Cosa diversa sono le identità come, ad es., $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Quindi il simbolo $=$ può avere significati diversi.

Nei meccanismi piani a un grado di libertà, la posizione di C dipende solo dalla configurazione geometrica. Cioè, non è influenzata dalla velocità con cui il meccanismo si muove.

Una volta noto C , tutti i punti del corpo 2 diventano notevoli per le velocità (ma non per le accelerazioni).

4 Accelerazioni

L'analogia della (1) per l'accelerazione è la seguente

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_P^r + \mathbf{a}_P^t + \mathbf{a}_P^c \quad (9)$$

Come noto, oltre a relativa e trascinalento, c'è anche l'accelerazione complementare (o di Coriolis)

$$\mathbf{a}_P^c = 2\omega^t \mathbf{k} \times \mathbf{v}_P^r \quad (10)$$

dove $\omega^t \mathbf{k}$ è la velocità angolare di trascinalento.

Affinché un punto P sia notevole anche per l'accelerazione occorre conoscere anche il *raggio di curvatura* R_P della sua traiettoria. Infatti, nota che sia la sua velocità v_P , si può subito ottenere la componente normale dell'accelerazione $a_{P_n} = v_P^2/R_P$, lasciando libero solo il valore della componente tangenziale a_{P_t} , che è diretta, per definizione, come \mathbf{v}_P .

Nel caso del glifo, il punto B ha traiettoria circolare di raggio $R_B = |AB|$, e quindi è notevole anche per l'accelerazione. Si utilizza questo fatto nel primo membro della (11). A secondo membro, in base alla (9), impiegando ancora un riferimento solidale al corpo 3 si ha

$$-\dot{\alpha}^2 AB + \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times AB = \ddot{s} \mathbf{q} - \dot{\beta}^2 OB + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times OB + 2\dot{\beta} \mathbf{k} \times \dot{s} \mathbf{q} \quad (11)$$

Dove $\omega^t = \dot{\beta}$. Si consiglia di individuare in (11) i tre contributi di (9). Non sono ammesse incertezze al riguardo.

Una volta risolta la (11), si può ottenere l'accelerazione \mathbf{a}_P di qualunque punto P di 2

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= -\dot{\alpha}^2 AB + \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times AB - \dot{\beta}^2 BP + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times BP \\ &= \ddot{s} \mathbf{q} - \dot{\beta}^2 OP + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times OP + 2\dot{\beta} \mathbf{k} \times \dot{s} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (12)$$

Essendo il moto relativo fra 2 e 3 di pura traslazione, l'accelerazione relativa e l'accelerazione di Coriolis sono le stesse per tutti i punti di 2.

Come evidente dalla Fig. 3, $|CB|$ non è il raggio di curvatura della traiettoria di B . Infatti il punto C ha velocità zero, ma accelerazione non nulla

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= -\dot{\alpha}^2 AB + \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times AB - \dot{\beta}^2 BC + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times BC \\ &= \ddot{s} \mathbf{q} - \dot{\beta}^2 OB + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times OB + 2\dot{\beta} \mathbf{k} \times \dot{s} \mathbf{q} - \dot{\beta}^2 BC + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times BC \\ &= \ddot{s} \mathbf{q} - \dot{\beta}^2 OC + \ddot{\beta} \mathbf{k} \times OC + 2\dot{\beta} \mathbf{k} \times \dot{s} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (13)$$

4.1 Esempio Numerico

Mettiamoci dei numeri (Fig. 1): $|AB| = 0.4$ m, $|OA| = 0.52$ m, $\dot{\alpha} = 5.5$ rad/s, $\ddot{\alpha} = 1.2$ rad/s². Il lettore è invitato a trovare il risultato prima di guardare la soluzione.

Dalla (5) si ottiene: $v_B = 2.2$ m/s, $v_B^t = 1.34$ m/s, $v_B^r = \dot{s} = 1.744$ m/s, $\dot{\beta} = 2.04$ rad/s.

Per quanto riguarda le accelerazioni si ottiene: $\dot{s} = -4.254 \text{ m/s}^2$, $\ddot{\beta} = 4.196 \text{ rad/s}^2$, da cui (poligonale in Fig. 5):

$$\mathbf{a}_B^r = -2.594 \mathbf{i} - 3.372 \mathbf{j} \text{ (blu)}$$

$$\mathbf{a}_B^t = -3.854 \mathbf{i} - 0.495 \mathbf{j} \text{ (verde)}$$

$$\mathbf{a}_B^c = -5.652 \mathbf{i} + 4.348 \mathbf{j} \text{ (rosso)}$$

che sommate vettorialmente, come illustrato in Fig. 5, danno

$$\mathbf{a}_B = -12.1 \mathbf{i} + 0.48 \mathbf{j} \text{ m/s}^2 \text{ (nero)}.$$

Le *poligonali* sono legittime solo per sommare i vettori liberi. Per sommare i vettori applicati (ad es., le forze), che quindi hanno una retta di applicazione, si può solo usare la regola del *parallelogramma* (Fig. 4).

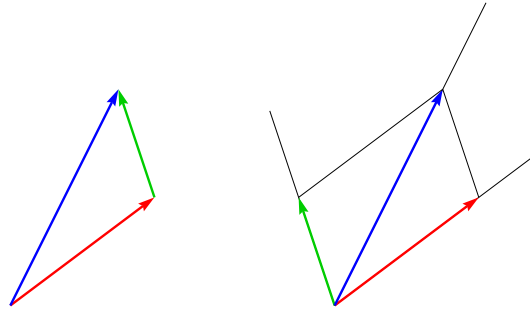


Figura 4: Somma di vettori con la poligonale e con il parallelogramma

Indipendentemente da $\dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$, per il centro delle velocità C di 2 si ottiene $|CB| = 1.076 \text{ m}$ e $|CO| = 0.852 \text{ m}$ (Fig. 3).

Il centro delle velocità C ha accelerazione $\mathbf{a}_C = -7.602 \mathbf{i} - 4.035 \mathbf{j} \text{ m/s}^2$ (Fig. 5). Come noto, \mathbf{a}_C non dipende da $\ddot{\beta}$, ed è lineare in $(\dot{\beta})^2$. La traiettoria di C ha raggio di curvatura zero. Quindi, il punto C sta sulla circonferenza dei flessi, ma non ne fa parte.

Il punto \tilde{O} di 2, sovrapposto a O , non ha traiettoria rettilinea (come si potrebbe erroneamente pensare). Infatti, se si applica la (12) si ottiene una accelerazione $-8.246 \mathbf{i} + 0.975 \mathbf{j}$. Con qualche ulteriore calcolo si trova che il punto \tilde{O} ha accelerazione normale $-5.652 \mathbf{i} + 4.348 \mathbf{j}$, di modulo 7.131 m/s^2 . Nota la velocità \dot{s} , si ottiene un raggio di curvatura della traiettoria pari a 0.426 m . Infatti $1.7437^2 / 0.4264 = 7.131$. Il punto Q in Fig. 5, con $|QO| = 0.426 \text{ m}$, è il centro di curvatura della traiettoria di \tilde{O} .

In Fig. 5 è stata anche tracciata la circonferenza dei flessi. Si ricorda che valgono relazioni come

$$|BC|^2 = |BA||BF_B| \quad (14)$$

con A e F_B dalla stessa parte rispetto a B . Non a caso B è sempre al primo posto in (14).

L'accelerazione \mathbf{a}_C punta sempre il centro della circonferenza dei flessi.

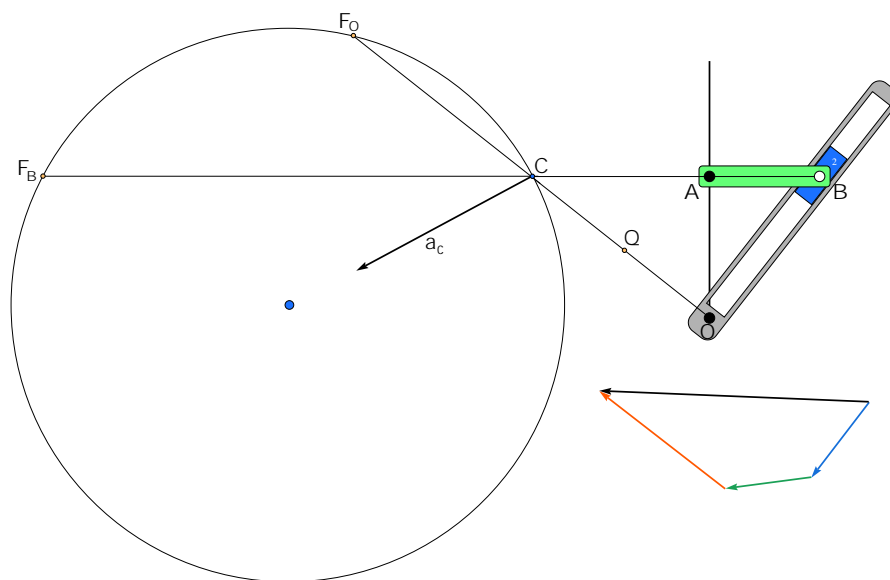


Figura 5: Circonferenza dei flessi e accelerazione di C