Transitorio nella Frizione a Corona Circolare

Massimo Guiggiani

6 marzo 2024

Sommario

Si sviluppa un semplice modello (in verità un po' semplicistico) per studiare il rodaggio di una frizione a corona circolare.

1 Caratteristiche della frizione

Sono assegnate le seguenti quantità globali (Fig. 1):

- raggio interno r_i e raggio esterno r_e;
- coefficiente di attrito f;
- velocità angolare ω;
- coefficiente di usura c;
- rigidezza locale allo schiacciamento k;
- tasso di accostamento da/dt.

Si veda una precedente dispensa per l'analisi di una frizione rodata.

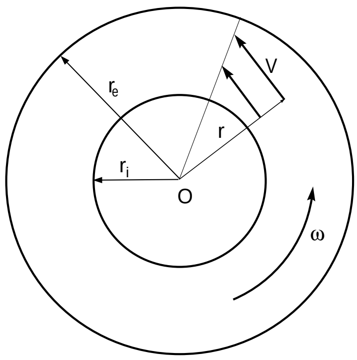

Figura 1: Schema di una frizione a corona circolare

2 Coulomb e Reye

Si assume che in ogni punto di contatto continuino a valere l'ipotesi di Coulomb (f indipendente da p e da V) e l'ipotesi di Reye, ovvero che il tasso di usura $h'(t)$ sia proporzionale al coefficiente di attrito f, alla pressione di contatto $p(r,t)$ e alla velocità di strisciamento $V(r,t) = ds/dt = \omega(t)r$

$$\frac{dh}{dt} = cfpV = cfp\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

con coefficiente di usura c dipendente dal materiale di frizione. Si vede immediatamente che $c\,p$ è un numero puro. La quantità $h(r,t)$ rappresenta lo spessore di materiale asportato per usura sul raggio r al tempo t.

La (1), ovvero l'ipotesi di Reye, può essere riformulata come

$$\frac{dh}{ds} = cfp(r,s) \tag{2}$$

dove $s = \alpha\, r$ è lo strisciamento dei punti sulla circonferenza di raggio r dopo α radianti di rotazione. In breve, conta quanto ha strisciato, non con quali valori di ω lo ha fatto.

L'uso del simbolo di derivata totale non deve sorprendere. Infatti, la variabile è s, mentre r è un parametro.

3 Schiacciamento locale, usura e accostamento

Si assume che solo su uno dei corpi a contatto si abbia usura h e schiacciamento elastico z. Pertanto, per studiare il rodaggio occorre conoscere anche la rigidezza locale k rispetto allo schiacciamento elastico $z(r,s)$

$$p = kz \tag{3}$$

Si deve osservare che questo semplice legame costitutivo è poco realistico. Infatti, lo schiacciamento in un punto non dipende solo dalla pressione nel punto stesso. Però è semplice e viene spesso usato nel calcolo delle fondazioni (suolo elastico alla Winkler).

Dato che uno dei due corpi rimane piatto, si ha che il mutuo accostamento $a(s)$ è lo stesso in tutti i punti, ma con contributi locali di diversa origine

$$a(s) = h(r,s) + z(r,s) \tag{4}$$

Si può ragionevolmente assumere che da nuova ($s = 0$) la frizione sia piatta e quindi $z(r,0) = z_0$, uguale in tutti i punti. Pertanto, da nuova anche la pressione è uniforme con $p(r,0) = p_0 = kz_0$. Dato che, per definizione, $h(r,0) = 0$, si ha $a(0) = z_0$.

4 Profilo durante il rodaggio

Inserendo la (4) e la (3) nella (2) si ha

$$\frac{dh}{ds} = \frac{da}{ds} - \frac{dz}{ds} = cfkz(r,s) \tag{5}$$

che riorganizzata diventa

$$\frac{dz}{ds} + cfkz(r,s) = \frac{da}{ds} \tag{6}$$

Tenendo conto che $s = r\alpha$, con α angolo di rotazione della frizione, si ottiene

$$\frac{dz}{d\alpha} + cfk\, z(r,\alpha) r = \frac{da}{d\alpha}, \qquad \text{con} \quad z(r,0) = z_0 \tag{7}$$

Questa è l'equazione differenziale che fornisce, durante il rodaggio, l'andamento di $z(r,\alpha)$, ossia della quota di avanzamento a dovuta allo schiacciamento elastico, come definita in (4).

Senza perdere in generalità, si può supporre costante $da/d\alpha = a'$, ottenendo la soluzione

$$z(r,\alpha) = \frac{a'\left(1 - e^{-cfkr\alpha}\right)}{cfkr} + z_0 e^{-cfkr\alpha} \tag{8}$$

che moltiplicata per k fornisce l'andamento della pressione

$$p(r,\alpha) = kz(r,\alpha) = k\left[\frac{a'\left(1 - e^{-cfkr\alpha}\right)}{cfkr} + z_0 e^{-cfkr\alpha}\right] \tag{9}$$

A rodaggio effettuato, ovvero per grandi valori di α, si ottiene

$$p(r,+\infty) = \frac{a'}{cfr} \tag{10}$$

come già sapevamo.

Valori (speriamo) ragionevoli delle quantità in gioco dovrebbero essere con questi ordini di grandezza:

- $f = 0.4$
- $c = 10^{-14}$ m^3/(N m)
- $k = 10^{10}$ Pa/m
- $a' = 3 \times 10^{-12}$ m/rad
- $z_0 = 10^{-5}$ m

5 Forza di accostamento

La forza assiale di accostamento N è data da

$$N(\alpha) = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} p(r,\alpha) r dr = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} kz(r,\alpha) r dr \tag{11}$$

Un tasso di avanzamento a' costante durante il rodaggio richiede una forza di accostamento $N(\alpha)$ decrescente, come illustrato in Fig. 2.

Se si impone una forza di accostamento costante e uguale a $N(0)$, si avrà un incremento di $a'(\alpha)$ pari circa a $N(0)/N(\alpha)$.

6 Andamento radiale della pressione

In Fig. 3 sono riportati alcuni andamenti radiali di pressione $p(r, \alpha)$ durante il rodaggio, come prescritto dalla (9). Si parte da pressione costante (rosso), per poi passare a regime all'andamento iperbolico (verde).

7 Variazione del profilo a frizione scarica

Il profilo radiale della frizione scarica, ovvero con carico assiale $N = 0$, varia come mostrato in Fig. 4. Durante il rodaggio la forma cambia dalla linea rossa a quella verde.

Più precisamente, la Fig. 4 riporta gli andamenti di $a' - z = h$. Si vede che, durante il rodaggio, lo spessore $h(r, \alpha)$ dell'usura varia rispetto a r. A regime, dh/ds non dipende più da r, ma solo da a' (ovvero la linea verde trasla verso l'alto).

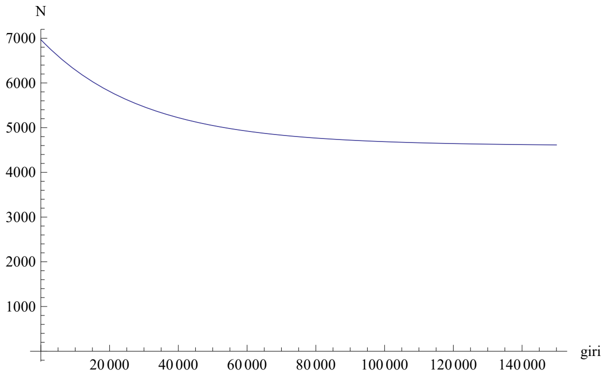

Figura 2: Forza N di accostamento per a' costante

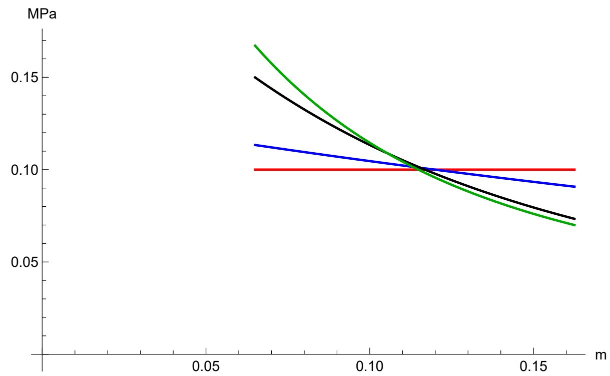

Figura 3: Variazioni dell'andamento radiale della pressione durante il rodaggio

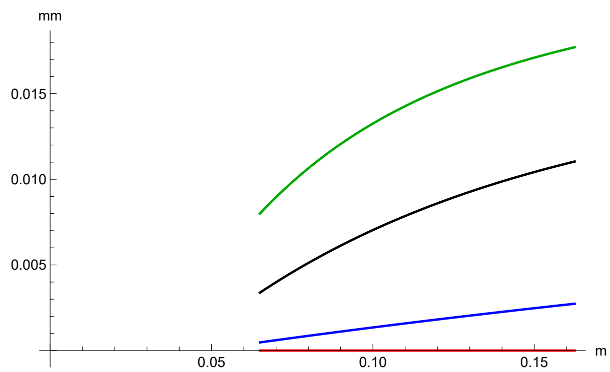

Figura 4: Variazione del profilo radiale della frizione durante il rodaggio