Frizione a Corona Circolare

Massimo Guiggiani

5 marzo 2024

Sommario

Un semplice problema con attrito che richiede l'ipotesi di Reye (Reye–Archard–Khrushchov wear law).

Frizione a corona circolare

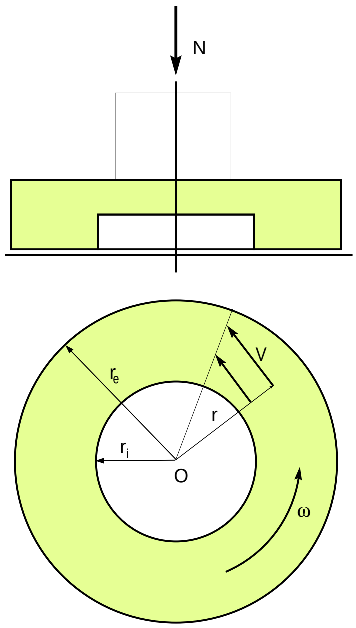

Figura 1: Schema di una frizione a corona circolare

Sono noti (Fig. 1):

- raggio interno r_i e raggio esterno r_e;
- coefficiente di attrito f;
- velocità angolare ω;
- forza di accostamento N;
- coefficiente di usura c.

Si vuole calcolare il momento M_O trasmesso dalla frizione.

Svolgimento

Sia $p(r)$ la pressione di contatto (dopo il rodaggio), per ora incognita. La velocità di strisciamento $V(r) = \omega r$ è diretta circonferenzialmente e così sarà quindi anche l'azione locale di attrito $fp(r)$, con f costante (ipotesi di Coulomb).

Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} N &= 2\pi \int_{r_i}^{r_e} p(r) r dr \\ M_O &= 2\pi \int_{r_i}^{r_e} f p(r) r^2 dr \end{aligned} \tag{1}$$

Per fare gli integrali occorre conoscere l'andamento di $p(r)$.

In generale, è ragionevole supporre che il tasso di usura $h'(t)$ sia proporzionale alla pressione di contatto p, alla velocità di strisciamento V e al coefficiente di attrito f

$$h' = cfpV \tag{2}$$

Questa formula è nota come ipotesi di Reye (Reye–Archard–Khrushchov wear law). Il coefficiente di usura c dipende dal materiale. Materiali duri hanno c basso.

Per ottenere l'andamento di $p(r)$ è quindi necessario sapere come si usura la frizione. Supponendo che solo il controdisco si usuri, si ha che l'usura $h(t)$ è uniforme su tutta la frizione (h' non dipende da r)

$$h' = cfp\omega r \tag{3}$$

da cui, in una frizione a corona circolare

$$p = \frac{h'}{cf\omega r} = \frac{q}{r} \tag{4}$$

con q costante. In una frizione automobilistica $c \simeq 0.02$ mm^3/(kJ) e $f \simeq 0.4$. Si noti che il prodotto $c\,p$ è un numero puro.

La (4) ci dice che se il raggio interno è troppo piccolo si avranno pressioni troppo elevate. Di solito $p_{\max} \simeq 0.5$ N/mm^2. Ma pressioni troppo elevate si hanno anche se il raggio interno è troppo grande, come sarà discusso in seguito.

Inserendo la (4) in (1), si ha

$$\begin{aligned} N &= 2\pi \int_{r_i}^{r_e} q dr = 2\pi q (r_e - r_i) \\ M_O &= 2\pi \int_{r_i}^{r_e} f q r dr = 2\pi f q \left(\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

da cui

$$M_O = fN \left(\frac{r_i + r_e}{2} \right) \tag{6}$$

Una formula semplice da ricordare.

Interessante anche calcolare il tasso di usura h'

$$h' = cf\omega q = cf\omega \frac{N}{2\pi(r_e - r_i)} \tag{7}$$

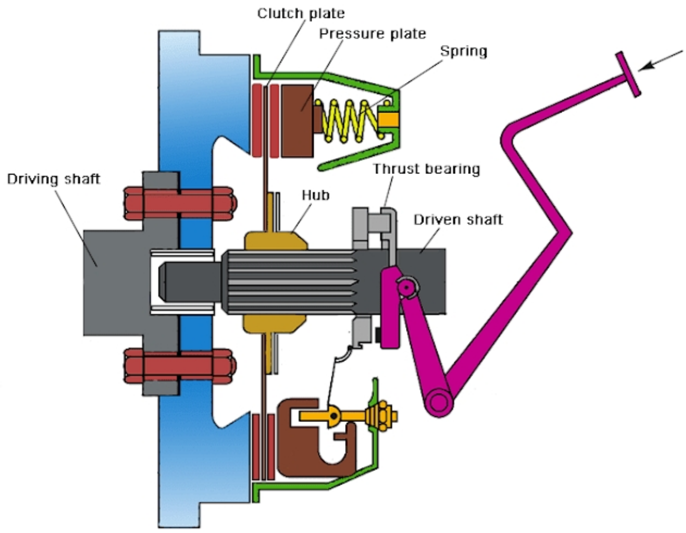

Figura 2: Esempio di frizione a corona circolare

Il lettore è invitato a fare una ricerca web per verificare che i numeri proposti siano corretti. Inoltre può provare a fare un dimensionamento di massima per una frizione in grado di trasmettere la coppia massima di un motore automobilistico (con adeguati coefficienti di sicurezza). Se ne ha voglia, può anche valutare la quantità di calore prodotta in una partenza in salita.

Ulteriori spunti di lavoro:

1. in una frizione nuova la pressione è (quasi) uniforme. Valutare M_O;
2. durante il rodaggio il tasso di usura non è uniforme. Studiare il transitorio.

Ottimizzazione

Qual è il rapporto ottimale $\alpha = r_i/r_e$? Più precisamente, a parità di momento trasmesso M_O, di raggio esterno r_e e di coefficiente di attrito f, per quale valore di α la massima pressione è minima? Ovviamente $p_{\max} = p(r_i)$.

Sulla base dei risultati ottenuti in precedenza, si ha che

$$p_{\max} = \frac{q}{r_i} = \frac{q}{\alpha r_e} = \frac{M_O}{\pi f r_e^3 \alpha (1-\alpha^2)} \tag{8}$$

Per trovare il minimo basta derivare rispetto a α e uguagliare a zero. Il risultato è

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 \tag{9}$$

Quindi è bene che il raggio interno sia il 50–60% del raggio esterno.