

# Equazioni Cardinali della Dinamica

Massimo Guiggiani

24 gennaio 2023

## Sommario

Si esplora il fantastico mondo delle equazioni cardinali.

## 1 Introduzione

Come ben noto, due sono le equazioni cardinali della dinamica. La prima è "facile", la seconda è più "difficile".

Si considera un sistema composto da un numero finito  $n$  di punti materiali  $P_i$ , di massa  $m_i$ , individuati dai vettori posizione  $OP_i$ . Si indicano con  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{a}_i$ , rispettivamente, la velocità e l'accelerazione della massa  $m_i$ . Ciascun punto materiale è soggetto alla forza esterna  $\mathbf{F}_i$  e alla forza interna  $\mathbf{S}_i$ .

Dato che sono tutti punti materiali, è obbligatorio che la retta di applicazione della forza  $\mathbf{F}_i$  passi per il punto  $P_i$ . Più precisamente, la dinamica del singolo punto materiale obbedisce alle regole

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad \text{e} \quad P_i Q_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (1)$$

dove  $Q_i$  è un punto qualsiasi sulla retta di applicazione di  $\mathbf{F}_i$ .

Per il principio di azione e reazione  $\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i = \mathbf{0}$ .

## 2 Baricentro

Si definisce la massa totale  $m$

$$m = \sum_{j=1}^n m_j \quad (2)$$

e il baricentro  $G$  di coordinate  $OG$

$$OG = \frac{\sum_{i=1}^n m_i OP_i}{m} \quad (3)$$

A rigore,  $G$  è il centro di massa. Chiamarlo baricentro è un'approssimazione, peraltro lecita in ingegneria meccanica.

Seguono subito

$$m \mathbf{v}_G = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (4)$$

e

$$m \mathbf{a}_G = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (5)$$

### 3 Prima cardinale

Si sommano i termini in (1), ottenendo

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_G \quad (6)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la risultante delle forze esterne al sistema.

### 4 Seconda cardinale con polo in $A$

Come sopra, ma moltiplicando vettorialmente per  $AP_i$

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^n AP_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{a}_i \quad (7)$$

dove il punto  $A$  può essere mobile.

Per il principio di azione e reazione  $\sum_{i=1}^n AP_i \times \mathbf{S}_i = \mathbf{0}$ .

La (7) è la definizione della seconda cardinale, con  $A$  come polo. Si vedrà che spesso (sempre?) si preferisce usare definizioni alternative, anche se, ovviamente, del tutto equivalenti. Si definiscono, pertanto, i momenti della quantità di moto.

#### 4.1 Momenti della quantità di moto

Per definizione

$$\mathbf{K}_A = \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (8)$$

Sempre per definizione, la versione relativa è

$$\mathbf{K}_A^r = \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_A) \quad (9)$$

Questo il legame

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_A^r + m \mathbf{A}G \times \mathbf{v}_A \quad (10)$$

#### 4.2 Derivate dei momenti della quantità di moto

Questa la derivata di  $\mathbf{K}_A$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_A &= \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_A) \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_A \times m \mathbf{v}_G \end{aligned} \quad (11)$$

Questa invece la derivata della versione relativa  $\mathbf{K}_A^r$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_A^r &= \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_A) \\ &= \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{A}G \times m \mathbf{a}_A \end{aligned} \quad (12)$$

Questo il legame fra le due versioni

$$\dot{\mathbf{K}}_A = \dot{\mathbf{K}}_A^r + AG \times m\mathbf{a}_A - \mathbf{v}_A \times m\mathbf{v}_G \quad (13)$$

La definizione di  $\dot{\mathbf{K}}_A^r$  è intuitiva e facile da applicare ai corpi rigidi. Al contrario, la definizione di  $\dot{\mathbf{K}}_A$  spesso non lo è.

### 4.3 Versioni della seconda cardinale

Si possono dare varie versioni della seconda cardinale. Ovviamente sono tutte equivalenti nella sostanza, ma la diversa formulazione le rende non equivalenti dal punto di vista della facilità di utilizzo.

In breve l'obiettivo è inserire i risultati (11) e (12) nella (7).

La prima versione è

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{K}}_A + \mathbf{v}_A \times m\mathbf{v}_G \quad (14)$$

La seconda versione è

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{K}}_A^r + AG \times m\mathbf{a}_A \quad (15)$$

Ma c'è anche (almeno) una terza versione, molto utile nelle applicazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum_{i=1}^n AP_i \times m_i \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (AG + GP_i) \times m_i \mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^n GP_i \times m_i \mathbf{a}_i + mAG \times \mathbf{a}_G \\ &= \dot{\mathbf{K}}_G^r + AG \times m\mathbf{a}_G \end{aligned} \quad (16)$$

Si noti che la (16) non è un caso particolare della (15). Entrambe sono uguali a  $\mathbf{M}_A$ , ma esprimono i termini inerziali per vie diverse.

Se  $A = G$  si ottiene l'importante risultato

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{K}}_G = \dot{\mathbf{K}}_G^r = \sum_{i=1}^n GP_i \times m_i \mathbf{a}_i \quad (17)$$

Quindi, velocità e/o accelerazione di  $G$  non cambiano il valore di  $\mathbf{M}_G$ .

## 5 Cinematica del corpo rigido

Come noto, in un corpo rigido, con il punto  $B$  appartenente al corpo stesso (o al suo volume mobile)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times BP_i \quad (18)$$

e

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times BP_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times BP_i) \quad (19)$$

Da ora in avanti, con  $B$  si indica un punto del corpo rigido, mentre  $A$  è un punto generico. Con  $O$  si indica un punto fisso.

La cinematica di un corpo rigido dipende da un piccolo numero di parametri. Ciò rende le due equazioni cardinali sufficienti per lo studio della dinamica dei corpi rigidi.

## 5.1 Derivate dei momenti della quantità di moto per corpi rigidi

Si prenda in  $B$  una terna di assi ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) solidali al corpo rigido che sia anche una terna principale d'inerzia. Il tensore d'inerzia sia

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (20)$$

La velocità angolare sia  $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ . Interessante è anche osservare che si ha semplicemente  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}$ .

La formula di Eulero fornisce

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_B^r &= \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \\ &= [J_x\dot{p} - (J_y - J_z)qr]\mathbf{i} \\ &\quad + [J_y\dot{q} - (J_z - J_x)rp]\mathbf{j} \\ &\quad + [J_z\dot{r} - (J_x - J_y)pq]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (21)$$

Dato che gli assi sono solidali al corpo rigido, ne consegue che i momenti d'inerzia sono costanti nel tempo, comunque si muova il corpo. Questa è una proprietà di importanza fondamentale.

In base alla (15), con  $B$  appartenente al corpo rigido

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + BG \times m\mathbf{a}_B \quad (22)$$

## 6 Due corpi

Si consideri un sistema composto da due corpi rigidi (o più in generale, da due sistemi). Siano  $G_1$  e  $G_2$  i baricentri dei singoli corpi, mentre  $G$  sia il baricentro globale.

Si vuole trovare l'espressione del  $\dot{\mathbf{K}}_G^r$  di tutto il sistema. Ovviamente si hanno due contributi distinti

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_G^r &= \dot{\mathbf{K}}_G^{r(1)} + \dot{\mathbf{K}}_G^{r(2)} \\ &= \sum_i GP_i \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_j GP_j \times m_j \mathbf{a}_j \\ &= \sum_i (GG_1 + G_1P_i) \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_j (GG_2 + G_2P_j) \times m_j \mathbf{a}_j \\ &= GG_1 \times m_1 \mathbf{a}_{G_1} + \sum_i G_1P_i \times m_i \mathbf{a}_i + GG_2 \times m_2 \mathbf{a}_{G_2} + \sum_j G_2P_j \times m_j \mathbf{a}_j \\ &= GG_1 \times m_1 \mathbf{a}_{G_1} + \dot{\mathbf{K}}_{G_1}^{r(1)} + GG_2 \times m_2 \mathbf{a}_{G_2} + \dot{\mathbf{K}}_{G_2}^{r(2)} \end{aligned} \quad (23)$$

Un po' di spiegazioni sono dovute.

Primo rigo:  $\dot{\mathbf{K}}_G^{r(1)}$  indica il contributo del corpo 1 al  $\dot{\mathbf{K}}_G^r$  globale. Idem per l'altro corpo.

Secondo rigo: si applica a ciascun corpo la definizione (12).

Terzo rigo: si scrivono i  $GP_i$  come  $(GG_1 + G_1P_i)$ .

Quarto e quinto rigo: si applicano le solite formule, già viste in precedenza. A ben vedere, il risultato finale altro non è che una generalizzazione della (16), estesa mediante sommatoria ai 2 (o agli  $N$ ) corpi, e in cui il punto  $A$  è diventato il baricentro  $G$  dell'intero sistema.

Si veda l'esercizio sul veicolo per un'applicazione di questo risultato.

## 7 Un semplice esempio

Si consideri il meccanismo di Fig. 1. Sono assegnati  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ . Il disco ha massa  $m$  e momento d'inerzia  $J_G$ . Le sbarrette  $AB$  e  $BG$  hanno massa nulla. Si vogliono determinare in  $A$  e  $B$  le forze che sollecitano le cerniere e i momenti applicati dai motori per avere la legge di moto imposta.

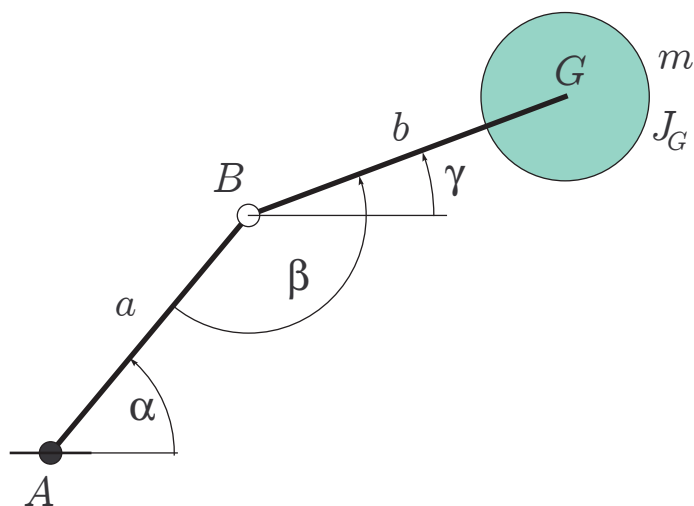


Figura 1: Braccio robotico

### 7.1 Posizioni

Per prima cosa si osserva che, in Fig. 1

$$\gamma = \alpha + \beta - \pi \quad (24)$$

Pertanto si ha

$$AB = a \cos(\alpha) \mathbf{i} + a \sin(\alpha) \mathbf{j} \quad \text{e} \quad BG = b \cos(\gamma) \mathbf{i} + b \sin(\gamma) \mathbf{j} \quad (25)$$

### 7.2 Accelerazioni

Applicando il teorema di Rivals

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times AB - \dot{\alpha}^2 AB \quad (26)$$

e poi

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_G &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{GB} \\
&= \mathbf{a}_B + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \times BG - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 BG \\
&= \ddot{\alpha} \mathbf{k} \times AB - \dot{\alpha}^2 AB + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} \times BG - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 BG
\end{aligned} \tag{27}$$

### 7.3 Prima cardinale

In accordo con la prima cardinale, la forza  $\mathbf{R}$  che il mondo esterno deve applicare al disco vale

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G \tag{28}$$

Questa è la forza gravante sulla cerniera  $B$  e anche sulla cerniera  $A$ . Questi sono infatti i due punti di contatto con il mondo esterno dei due sistemi composti, rispettivamente, da una sbarretta e da due sbarrette.

### 7.4 Seconda cardinale

La seconda cardinale può essere scritta rispetto a qualunque punto. Nel caso in esame sono "interessanti" i punti  $G$ ,  $B$  e  $A$ .

Il baricentro  $G$  è il punto più facile

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_G &= \dot{\mathbf{K}}_G^r \\
&= J_G(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{29}$$

Il momento interno che deve essere esercitato dal motore in  $B$  si può calcolare con la (16)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B &= \dot{\mathbf{K}}_G^r + BG \times m\mathbf{a}_G \\
&= \dot{\mathbf{K}}_G^r + BG \times \mathbf{R} \\
&= J_G(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} + BG \times m(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{BG}) \\
&= J_G(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} + BG \times m\mathbf{a}_{BG} + BG \times m\mathbf{a}_B \\
&= (J_G + mb^2)(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} + BG \times m\mathbf{a}_B
\end{aligned} \tag{30}$$

oppure con la (15)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_B &= \dot{\mathbf{K}}_B^r + BG \times m\mathbf{a}_B \\
&= (J_G + mb^2)(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \mathbf{k} + BG \times m\mathbf{a}_B
\end{aligned} \tag{31}$$

Ovviamente i due risultati coincidono. In entrambi i casi il polo appartiene al corpo rigido (o a una sua estensione rigida) e quindi i momenti d'inerzia sono costanti.

Invece il punto  $A$  non appartiene al corpo rigido. L'applicazione della (16) sembra la via più semplice per ottenere  $\mathbf{M}_A$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_A &= \dot{\mathbf{K}}_G^r + AG \times m\mathbf{a}_G \\
&= \dot{\mathbf{K}}_G^r + BG \times m\mathbf{a}_G + AB \times m\mathbf{a}_G \\
&= \mathbf{M}_B + AB \times m\mathbf{a}_G \\
&= \dot{\mathbf{K}}_A^r
\end{aligned} \tag{32}$$

Questa formula sarebbe corretta anche se  $A$  non fosse fisso.

Si rifletta sul significato fisico di ciascun termine.

## 8 Un esempio più difficile

Si consideri il corpo a forma di semicerchio di Fig. 2. Se si ha rotolamento senza strisciamento, in ogni istante si individuano il centro delle velocità  $C_v$  e il centro di istantanea rotazione  $C$ . Occupano la stessa posizione  $(-r\theta, 0)$ , ma sono profondamente diversi. Infatti,  $C_v$  appartiene al corpo rigido, mentre  $C$  è un punto geometrico che si muove lungo la strada. Più precisamente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_v} &= \mathbf{0} & \mathbf{a}_{C_v} &= r\dot{\theta}^2 \mathbf{j} \\ \mathbf{v}_C &= -r\dot{\theta} \mathbf{i} & \mathbf{a}_C &= -r\ddot{\theta} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (33)$$

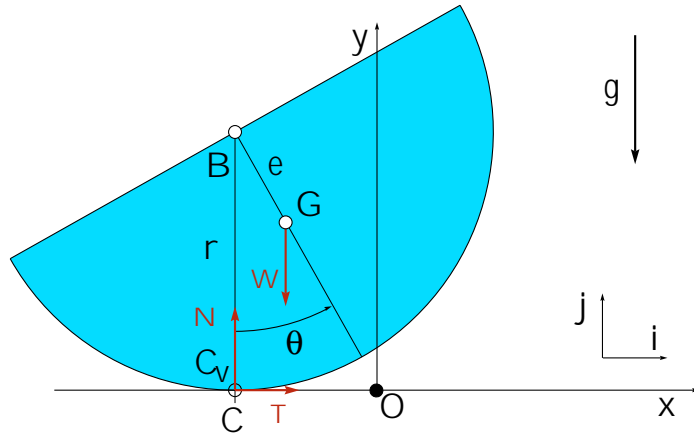


Figura 2: Semicerchio oscillante

Posto  $|BG| = e$ , si ha che

$$J_C(\theta) = J_G + m(e^2 + r^2 - 2er \cos(\theta)) \neq \text{cost.} \quad (34)$$

In ogni istante  $J_C(\theta) = J_{C_v}$ , con  $J_{C_v} = \text{cost.}$ , perché  $C_v$  appartiene al corpo (è un'uguaglianza fra numeri, non fra funzioni).

In un semicerchio omogeneo, si ha  $e = 4r/(3\pi) \simeq 0.424r$ .

Le coordinate del baricentro  $G$  sono

$$x_G = -r\theta + e \sin(\theta) \quad y_G = r - e \cos(\theta) \quad (35)$$

da cui discendono le componenti dell'accelerazione di  $G$

$$\mathbf{a}_G = \left[ \ddot{\theta}(e \cos(\theta) - r) - e\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right] \mathbf{i} + e \left[ \ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \right] \mathbf{j} \quad (36)$$

### 8.1 Momenti della quantità di moto

Si scrivono i momenti della quantità di moto rispetto al punto  $C$  e rispetto al punto  $C_v$ .

Si ha

$$\mathbf{K}_C = \sum_i CP_i \times m_i \mathbf{v}_i = J_C(\theta) \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (37)$$

e

$$\mathbf{K}_{C_v}^r = \sum_i C_v P_i \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{C_v}) = J_{C_v} \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (38)$$

dove  $\mathbf{v}_{C_v} = \mathbf{0}$ .

## 8.2 Derivate dei momenti della quantità di moto

Si ha

$$\dot{\mathbf{K}}_C = \left[ J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{dJ_C}{d\theta} \dot{\theta}^2 \right] \mathbf{k} \quad (39)$$

e

$$\dot{\mathbf{K}}_{C_v}^r = J_{C_v} \ddot{\theta} \mathbf{k} \quad (40)$$

La cosa interessante è che in ogni istante  $J_C(\theta) = J_{C_v}$ , ma la prima è una funzione, mentre il secondo è un numero. Questo fatto si riflette nelle derivate, che non sono uguali. Si noti, appunto, la differenza quando si fa la derivata.

## 8.3 Seconda cardinale

Dalla definizione

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_{C_v} = \sum C P_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum C_v P_i \times m_i \mathbf{a}_i \quad (41)$$

Conta solo la posizione di  $C$  e  $C_v$ , non il loro moto. C'è però una sottile, ma cruciale differenza:  $C_v$  appartiene al corpo, mentre  $C$  non appartiene al corpo. Quindi conviene usare formule diverse per ottenere lo stesso risultato. Per  $C$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C &= \dot{\mathbf{K}}_C + \mathbf{v}_C \times m \mathbf{v}_G \\ &= \left[ J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{dJ_C}{d\theta} \dot{\theta}^2 \right] \mathbf{k} + \mathbf{v}_C \times m \mathbf{v}_G \end{aligned} \quad (42)$$

mentre per  $C_v$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C_v} &= \dot{\mathbf{K}}_{C_v}^r + C_v G \times m \mathbf{a}_{C_v} \\ &= J_{C_v}(\theta) \ddot{\theta} \mathbf{k} + C_v G \times m \mathbf{a}_{C_v} \end{aligned} \quad (43)$$

È possibile anche utilizzare la (16), che non distingue fra  $C$  e  $C_v$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_{C_v} &= \dot{\mathbf{K}}_G^r + C_v G \times m \mathbf{a}_G \\ &= J_G \ddot{\theta} \mathbf{k} + C_v G \times m \mathbf{a}_G \end{aligned} \quad (44)$$

In tutti i casi si ottiene (ovviamente) lo stesso risultato per il termine inerziale della seconda cardinale

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_{C_v} &= (J_G + m[e^2 + r^2 - 2er \cos(\theta)]) \ddot{\theta} + emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \\ &= J_C(\theta) \ddot{\theta} + emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (45)$$



## 8.4 Equazione del moto

Come equazione del moto può convenire scrivere un'equazione di momento rispetto al punto  $C$ , in modo da evitare di dover considerare la reazione con il terreno, di componenti  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{T}$  (Fig. 2, dove  $\mathbf{W} = -mg\mathbf{j}$  è la forza peso). Riprendendo la (45), si ha

$$(J_G + m[e^2 + r^2 - 2er \cos(\theta)])\ddot{\theta} + emr \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = -mge \sin(\theta) \quad (46)$$

Una volta ottenuta  $\theta(t)$ , si può usare la (36) e la prima cardinale per determinare le reazioni vincolari  $\mathbf{N} = N\mathbf{j}$  e  $\mathbf{T} = T\mathbf{i}$

$$\begin{aligned} N &= mg + me \left[ \ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \right] \\ T &= m \left[ \ddot{\theta}(e \cos(\theta) - r) - e\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Se  $f$  è il coefficiente d'attrito fra semicerchio e strada, per non avere strisciamento deve risultare  $|T| \leq fN$ .

### 8.4.1 Equazione del moto linearizzata

Per piccole oscillazioni, la (46) può essere linearizzata in  $\theta$  nell'intorno di  $\theta = 0$

$$[J_G + m(r - e)^2]\ddot{\theta} = -mge\theta \quad (48)$$

Anche le forze vincolari possono essere linearizzate

$$\begin{aligned} N &= mg \\ T &= m(e - r)\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (49)$$

## 8.5 Suggerimento

Si consiglia di ottenere gli stessi risultati usando  $G$  come polo.

## 9 Veicolo (tre corpi)

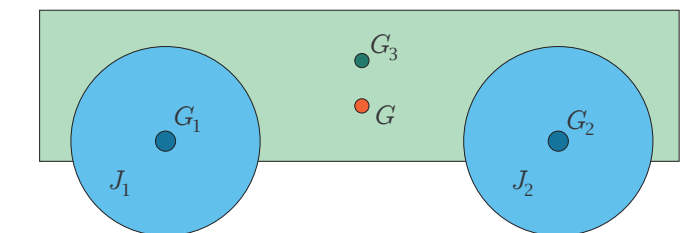


Figura 3: Schema di un autoveicolo

Si consideri il sistema di Fig. 3, composto da due ruote rigide collegate ad un terzo corpo rigido traslante. Indicati sono anche i baricentri  $G_i$  dei singoli corpi, oltre al baricentro globale  $G$ .

Per trovare l'espressione del  $\dot{\mathbf{K}}_G^r$  di tutto il sistema si può utilizzare la (23)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{K}}_G^r &= \dot{\mathbf{K}}_G^{r(1)} + \dot{\mathbf{K}}_G^{r(2)} + \dot{\mathbf{K}}_G^{r(3)} \\
&= \sum_i GP_i \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_j GP_j \times m_j \mathbf{a}_j + \sum_k GP_k \times m_k \mathbf{a}_k \\
&= \sum_i (GG_1 + G_1 P_i) \times m_i \mathbf{a}_i \\
&\quad + \sum_j (GG_2 + G_2 P_j) \times m_j \mathbf{a}_j \\
&\quad + \sum_k (GG_3 + G_3 P_k) \times m_k \mathbf{a}_k \tag{50} \\
&= \sum_i G_1 P_i \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_j G_2 P_j \times m_j \mathbf{a}_j + \sum_k G_3 P_k \times m_k \mathbf{a}_k \\
&\quad + GG_1 \times m_1 \mathbf{a}_{G_1} + GG_2 \times m_2 \mathbf{a}_{G_2} + GG_3 \times m_3 \mathbf{a}_{G_3} \\
&= \sum_i G_1 P_i \times m_i \mathbf{a}_i + \sum_j G_2 P_j \times m_j \mathbf{a}_j \\
&= \dot{\mathbf{K}}_{G_1}^{r(1)} + \dot{\mathbf{K}}_{G_2}^{r(2)}
\end{aligned}$$

Le semplificazioni sono dovute a due caratteristiche del sistema:

1. il corpo 3 trasla;
2. i baricentri dei tre corpi hanno tutti la stessa accelerazione.

## Ringraziamenti

Si ringraziano Michele Barsanti e Alessio Artoni per i loro commenti e suggerimenti.