Introduzione all'Interpretazione Astratta

18 Settembre 2009

Giuseppe Lettieri

`g.lettieri@iet.unipi.it`

Riepilogo

Operatore sui vettori di contesti

Dato un programma $P\colon Addr \longrightarrow Instr$ abbiamo definito $F\colon \wp(Env)^N \longrightarrow \wp(Env)^N$ dato da

$$C_1 = F_1(\underline{C}) = \{\rho_0\} \cup \bigcup_{m \in prec(1)} F_{m \to 1}(C_m),$$

$$C_n = F_n(\underline{C}) = \bigcup_{m \in prec(n)} F_{m \to n}(C_m) \qquad (n > 1).$$

Riepilogo

Operatori sui contesti

Le funzioni $F_{m \to n} \colon \wp(Env) \longrightarrow \wp(Env)$ sono di tre tipi:

$$Assign_{x=e}(R) = \{\, \rho[v/x] \mid \rho \in R \text{ e } v = Aval_e(\rho) \,\}$$

$$tBranch_b(R) = \{\, \rho \in R \mid Bval_b(\rho) \,\}$$

$$fBranch_b(R) = \{\, \rho \in R \mid !Bval_b(\rho) \,\}.$$

Riepilogo

AI non relazionale

Fissiamo una astrazione per le proprietà dei valori delle variabili

$$\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle \xleftarrow[\alpha]{\gamma} \langle \mathcal{A}; \sqsubseteq \rangle .$$

Usiamo la corrispondente astrazioni cartesiana per i contesti

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \xleftarrow[\dot{\alpha}]{\dot{\gamma}} \langle \mathit{Var} \rightarrow \mathcal{A}; \sqsubseteq \rangle$$

e quella per componenti per i vettori di contesti

$$\langle \wp(Env)^N; \subseteq \rangle \xleftarrow[\underline{\alpha}]{\underline{\gamma}} \langle (\mathit{Var} \rightarrow \mathcal{A})^N; \sqsubseteq \rangle .$$

Riepilogo

Astrazione dei contesti

Avremo

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\dot{\alpha}}{\overset{\dot{\gamma}}{\leftrightarrows}} \langle Var \to \mathcal{A}; \sqsubseteq \rangle$$

con

$$\dot{\alpha}(P)(x) = \alpha(\{\, \rho(x) \mid \rho \in P \,\}) \qquad \text{(per ogni } x \in Var\text{)}$$

$$\dot{\gamma}(r) = \{\, \rho \mid \forall x \in Var,\ \rho(x) \in \gamma(r(x)) \,\}.$$

Se $\gamma(\perp) = \varnothing$, tutte le funzioni $r \in (Var \to \mathcal{A})$ con $r(x) = \perp$ per qualche $x \in Var$ sono identificate tra loro.

Riepilogo

Astrazione dei vettori di contesti

Avremo

$$\langle \wp(Env)^N; \subseteq \rangle \underset{\underline{\alpha}}{\overset{\underline{\gamma}}{\leftrightarrows}} \langle (Var \rightarrow \mathcal{A})^N; \sqsubseteq \rangle.$$

con

$$\underline{\alpha}(C_1, \ldots, C_N) = (\dot{\alpha}(C_1), \ldots, \dot{\alpha}(C_N)),$$
$$\underline{\gamma}(A_1, \ldots, A_N) = (\dot{\gamma}(A_1), \ldots, \dot{\gamma}(A_N)).$$

AI non relazionale

Troviamo la migliore astrazione

$$F^b \colon (\mathit{Var} \to \mathcal{A})^N \to (\mathit{Var} \to \mathcal{A})^N$$

dell'operatore F sui vettori di contesti. Posto

$$F(\underline{C}) = (F_1(\underline{C}), \ldots, F_N(\underline{C}))$$

avremo

$$\begin{aligned} F^b(\underline{A}) &= \underline{\alpha}(F(\underline{\gamma}(\underline{A}))) \\ &= \underline{\alpha}(F_1(\underline{\gamma}(\underline{A})), \ldots, F_N(\underline{\gamma}(\underline{A}))) \\ &= (\dot{\alpha}(F_1(\underline{\gamma}(\underline{A})), \ldots, \dot{\alpha}(F_N(\underline{\gamma}(\underline{A}))))). \end{aligned}$$

AI non relazionale

Per il primo componente dell'operatore F^b avremo

$$\begin{aligned}
F_1^b(\underline{A}) &= \dot{\alpha}(F_1(\underline{\gamma}(\underline{A}))) \\
&= \dot{\alpha}(F_1(\dot{\gamma}(A_1), \ldots, \dot{\gamma}(A_N))) \\
&= \dot{\alpha}(\{\rho_0\} \cup \bigcup_{m \in prec(1)} F_{m \to 1}(\dot{\gamma}(A_m))) \\
&= \dot{\alpha}(\{\rho_0\}) \mathbin{\dot{\sqcup}} \dot{\bigsqcup_{m \in prec(1)}} \dot{\alpha}(F_{m \to 1}(\dot{\gamma}(A_m)))
\end{aligned}$$

e analogamente, per $n > 1$,

$$F_n^b(\underline{A}) = \dot{\bigsqcup_{m \in prec(n)}} \dot{\alpha}(F_{m \to n}(\dot{\gamma}(A_m))).$$

AI non relazionale

Ricordiamo che ρ_0 è l'ambiente concreto tale che $\rho_0(x) = 0$ per ogni $x \in Var$. Avremo, per $x \in Var$,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(\{\rho_0\})(x) &= \alpha(\{\rho(x) \mid \rho \in \{\rho_0\}\}) \\ &= \alpha(\{\rho_0(x)\}) \\ &= \alpha(\{0\}).\end{aligned}$$

Chiamiamo $\rho_0^\sharp$ l'ambiente astratto tale che $\rho_0^\sharp(x) = \alpha(\{0\})$ per ogni $x \in Var$. Poniamo quindi

$$\dot{\alpha}(\{\rho_0\}) = \rho_0^\sharp.$$

AI non relazionale

Il calcolo della migliore interpretazione astratta di F ci chiede di trovare la migliore interpretazione astratta

$$F^b_{m\to n} \colon (Var \to \mathcal{A}) \to (Var \to \mathcal{A}).$$

delle funzioni

$$F_{m\to n} \colon \wp(Env) \to \wp(Env).$$

La migliore approssimazione è

$$F^b(r) = \dot{\alpha}(F_{m\to n}(\dot{\gamma}(r))).$$

Procediamo per casi.

AI non relazionale

Consideriamo $Assign_{x=e} \colon \wp(Env) \to \wp(Env)$.
Prendiamo $r \in (Var \to \mathcal{A})$ e $z \in Var$. Avremo

$$\begin{aligned}(Assign^{b}_{x=e}(r))(z) &= \dot{\alpha}(Assign_{x=e}(\dot{\gamma}(r)))(z) \\ &= \alpha(\{\, \rho(z) \mid \rho \in Assign_{x=e}(\dot{\gamma}(r)) \,\}) \\ &= \alpha(\{\, \rho[v/x](z) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r) \text{ e } v = Aval_e(\rho) \,\}).\end{aligned}$$

La condizione $\rho \in \dot{\gamma}(r)$ si espande in

$$\forall w \in Var,\ \rho(w) \in \gamma(r(w)).$$

AI non relazionale

Consideriamo l'insieme

$$P = \{\, \rho[v/x](z) \mid \forall w \in Var,\ \rho(w) \in \gamma(r(w)) \text{ e } v = Aval_e(\rho) \,\}$$

Se $\gamma(r(w)) = \varnothing$ per qualche $w \in Var$ la condizione su ρ non può essere soddisfatta. L'insieme è vuoto e otteniamo

$$Assign^b_{x=e}(r)(z) = \alpha(\varnothing) = \bot$$

Per ogni $z \in Var$.

Notiamo che se (α, γ) è una iniezione di Galois allora $\gamma(r(w)) = \varnothing$ se e solo se $r(w) = \bot$ e $\gamma(\bot) = \varnothing$. Inoltre, se $(\dot{\alpha}, \dot{\gamma})$ è una inieazione di Galois, allora $r(w) = \bot$ per qualche $w \in Var$ se e solo se $r = \dot{\bot}$.

AI non relazionale

Torniamo all'insieme

$$P = \{\, \rho[v/x](z) \mid \forall w \in \mathit{Var},\ \rho(w) \in \gamma(r(w)) \text{ e } v = \mathit{Aval}_e(\rho) \,\}$$

e consideriamo il caso $r \neq \dot{\perp}$ oppure $\gamma(\perp) \neq \varnothing$.
Se $z \neq x$ abbiamo $\rho[v/x](z) = \rho(z)$. La seconda condizione non dipende da z, quindi otteniamo

$$\begin{aligned} P &= \{\, \rho(z) \mid \forall w \in \mathit{Var},\ \rho(w) \in \gamma(r(w)) \,\} \\ &= \{\, u \mid \exists \rho : \forall w \in \mathit{Var},\ \rho(w) \in \gamma(r(w)) \text{ e } u = \rho(z) \,\}. \end{aligned}$$

Ma è sempre possibile soddisfare la prima condizione su ρ, qualunque sia $u \in \gamma(r(z))$, quindi

$$P = \{\, u \mid u \in \gamma(r(z)) \,\} = \gamma(r(z)).$$

AI non relazionale

Quindi per $z \neq x$ (nel caso $\dot{\gamma}(r) \neq \varnothing$) otteniamo

$$Assign^b_{x=e}(r)(z) = \alpha(P) = \alpha(\gamma(r(z))) = r(z)$$

qualunque sia l'espressione $e \in Aexpr$.

AI non relazionale

Torniamo ancora all'insieme

$$P = \{\, \rho[v/x](z) \mid \forall w \in Var,\ \rho(w) \in \gamma(r(w)) \text{ e } v = Aval_e(\rho) \,\}$$

restando nel caso $r \neq \dot{\bot}$ oppure $\gamma(\bot) \neq \varnothing$.
Ci resta da considerare $z = x$. Avremo $\rho[v/x](z) = v$ e

$$\begin{aligned} P &= \{\, v \mid \exists \rho \in \dot{\gamma}(r) \text{ e } v = Aval_e(\rho) \,\} \\ &= \{\, Aval_e(\rho) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r) \,\} \\ &= Aval_e(\dot{\gamma}(r)) \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione denota l'immagine dell'insieme $\dot{\gamma}(r)$ tramite la funzione $Aval_e \colon Env \to \mathbb{Z}$.

AI non relazionale

Otteniamo dunque

$$Assign^b_{x=e}(r)(x) = \alpha(Aval_e(\dot{\gamma}(r)))$$

che possiamo interpretare come la migliore approssimazione

$$Aval^b_e \colon (Var \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

della funzione

$$Aval_e \colon \wp(Env) \to \wp(\mathbb{Z}),$$

che è l’estensione agli insiemi della funzione $Aval_e \colon Env \to \mathbb{Z}$.

AI non relazionale

In conclusione avremo

$$Assign^b_{x=e}(r) = \dot{\perp}$$

se $r(w) = \perp$ per qualche $w \in Var$ e $\gamma(\perp) = \varnothing$. Altrimenti $Assign^b_{x=e}(r) = r'$ con

$$r'(z) = \begin{cases} r(z) & \text{se } z \neq x, \\ Aval^b_e(r) & \text{se } z = x, \end{cases}$$

ovvero

$$Assign^b_{x=e}(r) = r[Aval^b_e(r(x))/x].$$

AI non relazionale

Possiamo espandere $Aval_e^b$ per casi in base alla forma di e. (Consideriamo sempre il caso $r \neq \dot{\perp}$ oppure $\gamma(\perp) \neq \varnothing$).

$$\begin{aligned}
Aval_c^b(r) &= \alpha(Aval_c(\dot{\gamma}(r))) \\
&= \alpha(\{Aval_c(\rho) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r)\}) \\
&= \alpha(\{c\}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Aval_x^b(r) &= \alpha(Aval_x(\dot{\gamma}(r))) \\
&= \alpha(\{Aval_x(\rho) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r)\}) \\
&= \alpha(\{\rho(x) \mid \rho(x) \in \gamma(r(x))\}) \\
&= \alpha(\gamma(r(x))) = r(x).
\end{aligned}$$

AI non relazionale

$$
\begin{aligned}
Aval^b_{-x}(r) &= \alpha(Aval_{-x}(\dot{\gamma}(r))) \\
&= \alpha(\{ Aval_{-x}(\rho) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r) \}) \\
&= \alpha(\{ -\rho(x) \mid \rho \in \dot{\gamma}(r) \} \\
&= \alpha(\{ -v \mid v \in \gamma(r(x)) \}) \\
&= \alpha(minus(\gamma(r(x)))) \\
&= minus^b(r(x)).
\end{aligned}
$$

Qui abbiamo prima introdotto la funzione $minus\colon \wp(\mathbb{Z}) \to \wp(\mathbb{Z})$ tale che $minus(P) = \{ -v \mid v \in P \}$, quindi la sua migliore approssimazione $minus^b\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

AI non relazionale

$$\begin{aligned}
Aval^b_{x+y}(r) &= \alpha(Aval_{x+y}(\dot\gamma(r))) \\
&= \alpha(\{ Aval_{x+y}(\rho) \mid \rho \in \dot\gamma(r) \}) \\
&= \alpha(\{ \rho(x) + \rho(y) \mid \rho \in \dot\gamma(r) \} \\
&= \alpha(\{ u + v \mid u \in \gamma(r(x)) \text{ e } v \in \gamma(r(y)) \}) \\
&= \alpha(sum(\gamma(r(x)), \gamma(r(y)))) \\
&= sum^b(r(x), r(y)).
\end{aligned}$$

Qui abbiamo prima introdotto la funzione $sum \colon (\wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z})) \to \wp(\mathbb{Z})$ tale che $sum(P, Q) = \{ u + v \mid u \in P \text{ e } v \in Q \}$, quindi la sua migliore approssimazione $sum^b \colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

AI non relazionale

Analogamente

$$Aval^b_{x*y}(r) = prod^b(r(x), r(y)).$$

Dove

$$prod^b \colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

è la migliore approssimazione della funzione

$$prod \colon (\wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z})) \to \wp(\mathbb{Z})$$

data da

$$prod(P, Q) = \{\, uv \mid u \in P \text{ e } v \in Q \,\}.$$

AI non relazionale

Consideriamo $tBranch_b \colon \wp(Env) \rightarrow \wp(Env)$.
Avremo

$$\dot{\alpha}(tBranch_b(\dot{\gamma}(r))) = \dot{\alpha}(\{\, \rho \in \dot{\gamma}(r) \mid Bval_b(\rho) \,\}).$$

Adotteremo una approssimazione grossolana, ma che semplifica molto i calcoli:

$$tBranch_b^{\sharp}(r) = \begin{cases} r & \text{se esiste } \rho \in \dot{\gamma}(r) \text{ tale che } Bval_b(\rho), \\ \dot{\perp} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

AI non relazionale

Avremo

$$tBranch^{\sharp}_{\textbf{true}}(r) = r,$$

$$tBranch^{\sharp}_{\textbf{false}}(r) = \dot{\bot},$$

$$tBranch^{\sharp}_{x=y}(r) = \begin{cases} r & \text{se } equal^{\sharp}(r(x), r(y)), \\ \dot{\bot} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$tBranch^{\sharp}_{x<y}(r) = \begin{cases} r & \text{se } less^{\sharp}(r(x), r(y)), \\ \dot{\bot} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

AI non relazionale

Dove

$$equal^\sharp\colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \{true, false\}$$

è definita da

$$equal^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u = v),$$

e

$$less^\sharp\colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \{true, false\}$$

è definita da

$$less^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u < v).$$

AI non relazionale

Infine, per $fBranch_b \colon \wp(Env) \to \wp(Env)$ avremo

$$fBranch^\sharp_{\textbf{true}}(r) = \dot{\bot},$$

$$fBranch^\sharp_{\textbf{false}}(r) = r,$$

$$fBranch^\sharp_{x=y}(r) = \begin{cases} r & \text{se } neq^\sharp(r(x), r(y)), \\ \dot{\bot} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$fBranch^\sharp_{x<y}(r) = \begin{cases} r & \text{se } ge^\sharp(r(x), r(y)), \\ \dot{\bot} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

AI non relazionale

Dove

$$neq^\sharp \colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \{true, false\}$$

è definita da

$$neq^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \neq v),$$

e

$$ge^\sharp \colon (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) \to \{true, false\}$$

è definita da

$$ge^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \geq v).$$

AI non relazionale

Quindi, per definire completamente una interpretazione astratta non relazionale del nostro linguaggio si deve scegliere una astrazione delle proprietà dei valori delle variabili

$$\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle \mathcal{A}; \sqsubseteq \rangle$$

e saper calcolare

- $\alpha(\{c\})$ per ogni $c \in \mathbb{Z}$.
- le funzioni $minus^b$, sum^b, $prod^b$, $equal^\sharp$, $less^\sharp$, $neq^\sharp$ e $ge^\sharp$ (o loro approssimazioni per eccesso).

AI: esempio

Scegliamo l'astrazione della parità.
Funzione di astrazione ($P \in \wp(\mathbb{Z})$):

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} & \text{se } x = p, \\ \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} & \text{se } x = d, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \alpha(P) = & \textbf{if } (P = \varnothing) & \bot; \\ & \textbf{else if } (\forall n \in P,\ n \text{ pari}) & p; \\ & \textbf{else if } (\forall n \in P,\ n \text{ dispari}) & d; \\ & \textbf{else} & \top. \end{array}$$

AI: esempio

Avremo

$$\alpha(\{c\}) = \begin{cases} p & \text{se } c \text{ è pari,} \\ d & \text{se } c \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare $\rho_0^\sharp$ è la funzione che mappa ogni $x \in Var$ in $p = \alpha(\{0\})$.

Abbiamo già calcolato sum^b:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$	p	d	$\bot$
d	$\top$	d	p	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: esempio

Calcoliamo $minus^b(a) = \alpha(\{\, -v \mid v \in \gamma(a)\, \})$.

a	$minus^b$
$\top$	$\top$
p	p
d	d
$\bot$	$\bot$

AI: esempio

Calcoliamo

$$prod^b(a_1, a_2) = \alpha(\{\, uv \mid u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) \,\}).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				

AI: esempio

Calcoliamo

$$prod^b(a_1, a_2) = \alpha(\{\, uv \mid u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) \,\}).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	p	$\top$	$\bot$
p	p	p	p	$\bot$
d	$\top$	p	d	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: esempio

Calcoliamo

$$equal^{\sharp}(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u = v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				

AI: esempio

Calcoliamo

$$equal^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u = v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$true$	$true$	$true$	$false$
p	$true$	$true$	$false$	$false$
d	$true$	$false$	$true$	$false$
$\bot$	$false$	$false$	$false$	$false$

AI: esempio

Calcoliamo

$$equal^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u = v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$true$	$true$	$true$	$false$
p	$true$	$true$	$false$	$false$
d	$true$	$false$	$true$	$false$
$\bot$	$false$	$false$	$false$	$false$

Abbiamo $equal^\sharp(a_1, a_2) = (\gamma(a_1 \sqcap a_2) \neq \varnothing)$.

AI: esempio

Calcoliamo

$$less^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u < v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				

AI: esempio

Calcoliamo

$$less^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u < v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$true$	$true$	$true$	$false$
p	$true$	$true$	$true$	$false$
d	$true$	$true$	$true$	$false$
$\bot$	$false$	$false$	$false$	$false$

AI: esempio

Calcoliamo

$$neq^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \neq v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				

AI: esempio

Calcoliamo

$$neq^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \neq v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$true$	$true$	$true$	$false$
p	$true$	$true$	$true$	$false$
d	$true$	$true$	$true$	$false$
$\bot$	$false$	$false$	$false$	$false$

AI: esempio

Calcoliamo

$$ge^\sharp(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \geq v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				

AI: esempio

Calcoliamo

$$ge^{\sharp}(a_1, a_2) = (\exists u \in \gamma(a_1), v \in \gamma(a_2) : u \geq v).$$

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$true$	$true$	$true$	$false$
p	$true$	$true$	$true$	$false$
d	$true$	$true$	$true$	$false$
$\bot$	$false$	$false$	$false$	$false$

AI: esempio

Torniamo al nostro programma di esempio. Le equazioni astratte saranno:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \rho_0^\sharp \\
r_2 &= Assign^b_{z=2}(r_1) \\
r_3 &= Assign^b_{y=100}(r_2) \\
r_4 &= Assign^b_{x=1}(r_3) \mathrel{\dot{\sqcup}} r_6 \\
r_5 &= fBranch^\sharp_{y<x}(r_4) \\
r_6 &= Assign^b_{x=x+z}(r_5) \\
r_7 &= tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).
\end{aligned}
$$

Le risolviamo iterativamente partendo da $\underline{\alpha}(\varnothing, \ldots, \varnothing) = (\dot{\bot}, \ldots, \dot{\bot})$.

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$r_1 = \rho_0^\sharp$$

$$r_2 = Assign^b_{z=2}(r_1)$$

$$r_3 = Assign^b_{y=100}(r_2)$$

$$r_4 = Assign^b_{x=1}(r_3) \,\dot\sqcup\, r_6$$

$$r_5 = fBranch^\sharp_{y<x}(r_4)$$

$$r_6 = Assign^b_{x=x+z}(r_5)$$

$$r_7 = tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).$$

k	0	1
r_1	$[\bot, \bot, \bot]$	$[p, p, p]$
r_2	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_3	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_4	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_5	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_6	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_7	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$r_1 = \rho_0^\sharp$$
$$r_2 = Assign^b_{z=2}(r_1)$$
$$r_3 = Assign^b_{y=100}(r_2)$$
$$r_4 = Assign^b_{x=1}(r_3) \dot{\sqcup} r_6$$
$$r_5 = fBranch^\sharp_{y<x}(r_4)$$
$$r_6 = Assign^b_{x=x+z}(r_5)$$
$$r_7 = tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).$$

k	1	2
r_1	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_2	$[\perp, \perp, \perp]$	$[p, p, p]$
r_3	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$
r_4	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$
r_5	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$
r_6	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$
r_7	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \rho_0^\sharp \\
r_2 &= Assign^b_{z=2}(r_1) \\
r_3 &= Assign^b_{y=100}(r_2) \\
r_4 &= Assign^b_{x=1}(r_3) \mathbin{\dot\sqcup} r_6 \\
r_5 &= fBranch^\sharp_{y<x}(r_4) \\
r_6 &= Assign^b_{x=x+z}(r_5) \\
r_7 &= tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).
\end{aligned}
$$

k	2	3
r_1	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_2	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_3	$[\bot, \bot, \bot]$	$[p, p, p]$
r_4	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_5	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_6	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_7	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \rho_0^\sharp \\
r_2 &= Assign^b_{z=2}(r_1) \\
r_3 &= Assign^b_{y=100}(r_2) \\
r_4 &= Assign^b_{x=1}(r_3) \,\dot{\sqcup}\, r_6 \\
r_5 &= fBranch^\sharp_{y<x}(r_4) \\
r_6 &= Assign^b_{x=x+z}(r_5) \\
r_7 &= tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).
\end{aligned}
$$

k	3	4
r_1	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_2	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_3	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_4	$[\bot, \bot, \bot]$	$[d, p, p]$
r_5	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_6	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$
r_7	$[\bot, \bot, \bot]$	$[\bot, \bot, \bot]$

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \rho_0^\sharp \\
r_2 &= Assign^b_{z=2}(r_1) \\
r_3 &= Assign^b_{y=100}(r_2) \\
r_4 &= Assign^b_{x=1}(r_3) \dot\sqcup r_6 \\
r_5 &= fBranch^\sharp_{y<x}(r_4) \\
r_6 &= Assign^b_{x=x+z}(r_5) \\
r_7 &= tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).
\end{aligned}
$$

k	4	5
r_1	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_2	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_3	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_4	$[d, p, p]$	$[d, p, p]$
r_5	$[\perp, \perp, \perp]$	$[d, p, p]$
r_6	$[\perp, \perp, \perp]$	$[\perp, \perp, \perp]$
r_7	$[\perp, \perp, \perp]$	$[d, p, p]$

AI: esempio

Esempio (scriviamo $[a, b, c]$ per denotare $[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \rho_0^\sharp \\
r_2 &= Assign^b_{z=2}(r_1) \\
r_3 &= Assign^b_{y=100}(r_2) \\
r_4 &= Assign^b_{x=1}(r_3) \mathbin{\dot\sqcup} r_6 \\
r_5 &= fBranch^\sharp_{y<x}(r_4) \\
r_6 &= Assign^b_{x=x+z}(r_5) \\
r_7 &= tBranch^\sharp_{y<x}(r_4).
\end{aligned}
$$

k	5	6
r_1	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_2	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_3	$[p, p, p]$	$[p, p, p]$
r_4	$[d, p, p]$	$[d, p, p]$
r_5	$[d, p, p]$	$[d, p, p]$
r_6	$[\perp, \perp, \perp]$	$[d, p, p]$
r_7	$[d, p, p]$	$[d, p, p]$

AI: esempio

La soluzione nel dominio concreto era:

$$\begin{array}{c|c}
C_1 & \{[0,0,0]\} \\
C_2 & \{[0,0,2]\} \\
C_3 & \{[0,100,2]\} \\
C_4 & \{[1,100,2],[3,100,2],[5,100,2],\ldots,[99,100,2],[101,100,2]\} \\
C_5 & \{[1,100,2],[3,100,2],[5,100,2],\ldots,[99,100,2]\} \\
C_6 & \{[3,100,2],[5,100,2],[7,100,2],\ldots,[101,100,2]\} \\
C_7 & \{[101,100,2]\}
\end{array}$$

AI: esempio

La sua astrazione cartesiana è

$$
\begin{array}{c|c}
A_1 & [\{0\},\{0\},\{0\}] \\
A_2 & [\{0\},\{0\},\{2\}] \\
A_3 & [\{0\},\{100\},\{2\}] \\
A_4 & [\{1,3,5,\ldots,99,101\},\{100\},\{2\}] \\
A_5 & [\{1,3,5,\ldots,99\},\{100\},\{2\}] \\
A_6 & [\{3,5,7,\ldots,101\},\{100\},\{2\}] \\
A_7 & [\{101\},\{100\},\{2\}]
\end{array}
$$

AI: esempio

L'astrazione secondo la parità è:

$$
\begin{array}{c|c}
\dot{\alpha}(C_1) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_2) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_3) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_4) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_5) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_6) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_7) & [d,p,p]
\end{array}
$$

AI: esempio

L'astrazione secondo la parità è:

$$\begin{array}{l|l}
\dot{\alpha}(C_1) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_2) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_3) & [p,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_4) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_5) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_6) & [d,p,p] \\
\dot{\alpha}(C_7) & [d,p,p]
\end{array}$$

In questo caso $\underline{\alpha}(\mu F) = \mu F^\sharp$.