Introduzione all'Interpretazione Astratta

16 Settembre 2009

Giuseppe Lettieri

`g.lettieri@iet.unipi.it`

$\sup$ e $\inf$ puntuali

Abbiamo visto che se $\langle P_1; \leq_1 \rangle$ e $\langle P_2; \leq_2 \rangle$ sono due reticoli (completi), allora anche $\langle P_1 \times P_2; \leq \rangle$ è un reticolo (completo) se definiamo

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq_1 a_1 \text{ e } b_1 \leq_2 b_2$$

per ogni $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P_1 \times P_2$.

$\sup$ e $\inf$ in $\langle P_1 \times P_2; \leq \rangle$ si calcolano componente per componente:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee_1 a_2, b_1 \vee_2 b_2),$$
$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge_1 a_2, b_1 \wedge_2 b_2).$$

$\sup$ e $\inf$ puntuali

Abbiamo visto che se S è un insieme e $\langle P; \leq \rangle$ un reticolo (completo), allora anche $\langle S \to P; \leq \rangle$ è un reticolo (completo) se definiamo

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x)$$

per ogni $x \in S$.

$\sup$ e $\inf$ in $\langle S \to P; \leq \rangle$ si calcolano argomento per argomento:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x),$$
$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x).$$

$\sup$ **e** $\inf$ **puntuali: esempio**

Per esempio, prendiamo il reticolo $\langle \mathbb{N}; \leq \rangle$ (normale ordinamento tra naturali in cui $\bigvee = \max$ e $\bigwedge = \min$), e l'insieme $S = \{x, y, z\}$ e consideriamo $\langle S \to \mathbb{N}; \leq \rangle$ ordinato puntualmente.

Siano $f, g \in (S \to P)$ date da:

$$f = [x \mapsto 2, y \mapsto 5, z \mapsto 1],$$
$$g = [x \mapsto 10, y \mapsto 3, z \mapsto 4].$$

Allora

$$f \vee g = [x \mapsto 10, y \mapsto 5, z \mapsto 4],$$
$$f \wedge g = [x \mapsto 2, y \mapsto 3, z \mapsto 1].$$

sup **e** inf **puntuali: esempio**

Prendiamo il reticolo $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e l'insieme $S = \{x, y, z\}$ e consideriamo $\langle S \to \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$ ordinato puntualmente.

Siano $f, g \in (S \to P)$ date da:

$$f = [x \mapsto \{2,3\}, y \mapsto \{1\}, z \mapsto \{5,6\}],$$
$$g = [x \mapsto \{2\}, y \mapsto \{3\}, z \mapsto \{6,7\}].$$

Allora

$$f \vee g = [x \mapsto \{2,3\}, y \mapsto \{1,3\}, z \mapsto \{5,6,7\}],$$
$$f \wedge g = [x \mapsto \{2\}, y \mapsto \varnothing, z \mapsto \{6\}].$$

Connessione di Galois

Siano $\langle P; \leq \rangle$ e $\langle Q; \sqsubseteq \rangle$ due poset. Una coppia di funzioni $\alpha \colon P \to Q$ e $\gamma \colon Q \to P$ è una *connessione di Galois* se

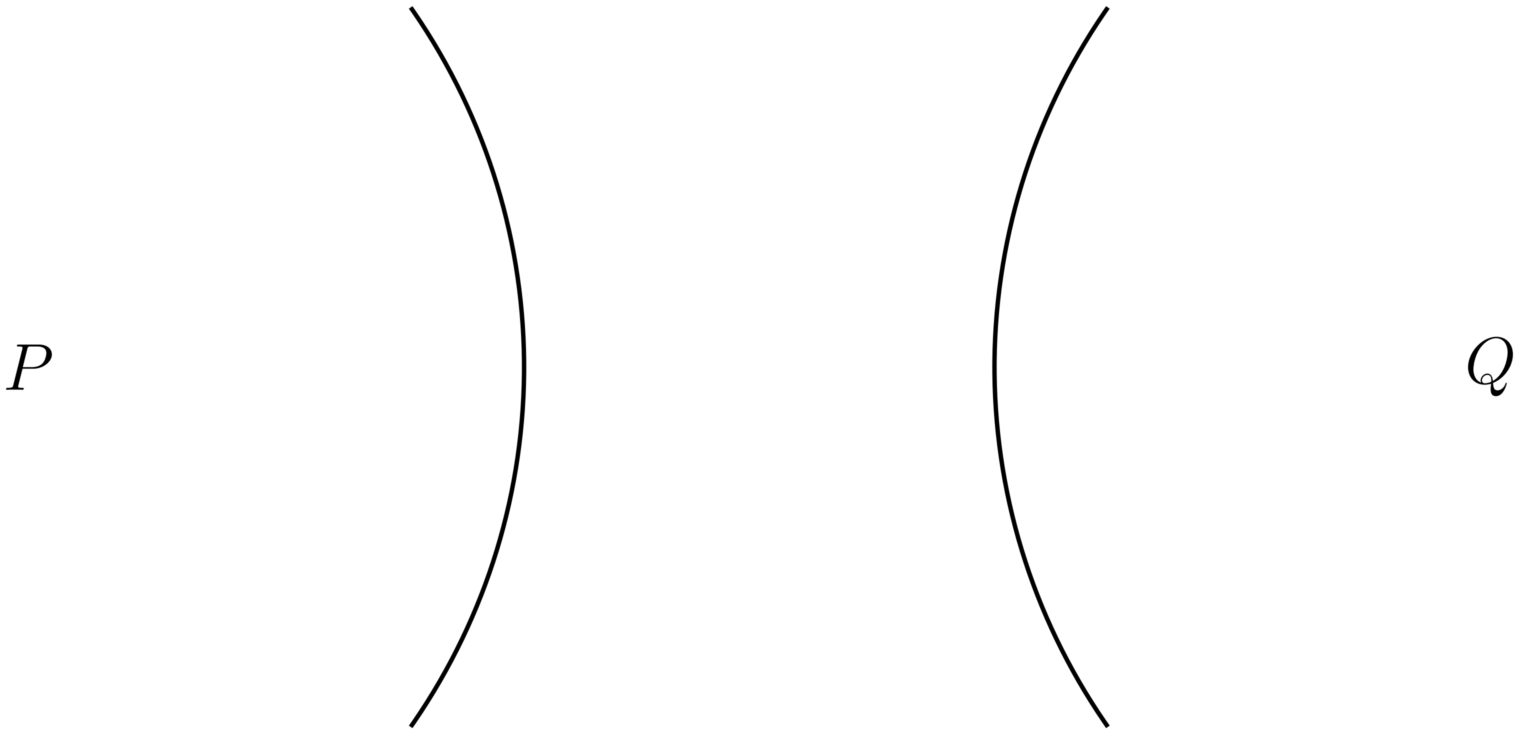
$$\alpha(x) \sqsubseteq y \iff x \leq \gamma(y)$$

comunque si prendano $x \in P$ e $y \in Q$.

Se (α, γ) è una connessione di Galois tra $\langle P; \leq \rangle$ e $\langle Q; \sqsubseteq \rangle$ scriveremo

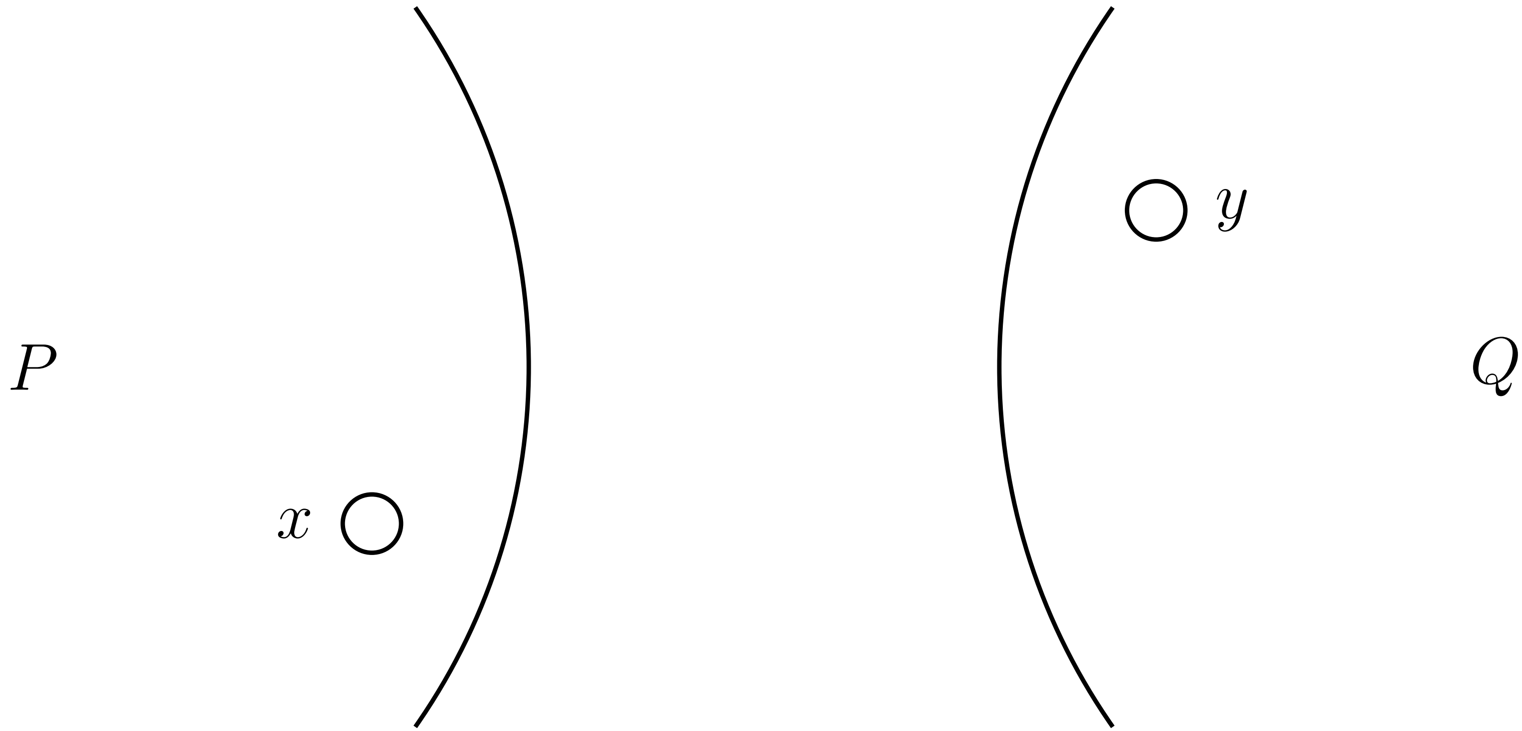
$$\langle P; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Q; \sqsubseteq \rangle.$$

Connessione di Galois



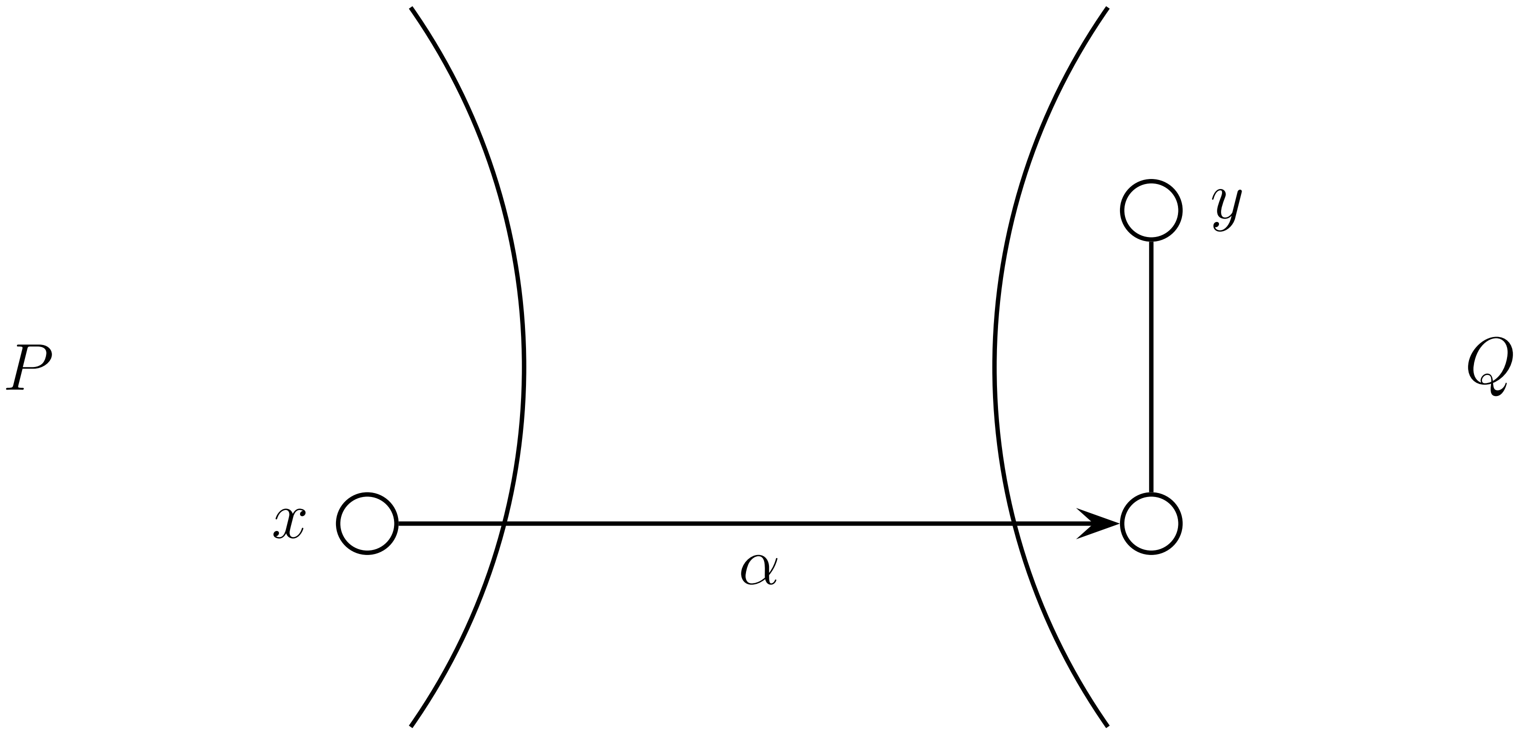
Prendiamo i due insiemi P e Q

Connessione di Galois



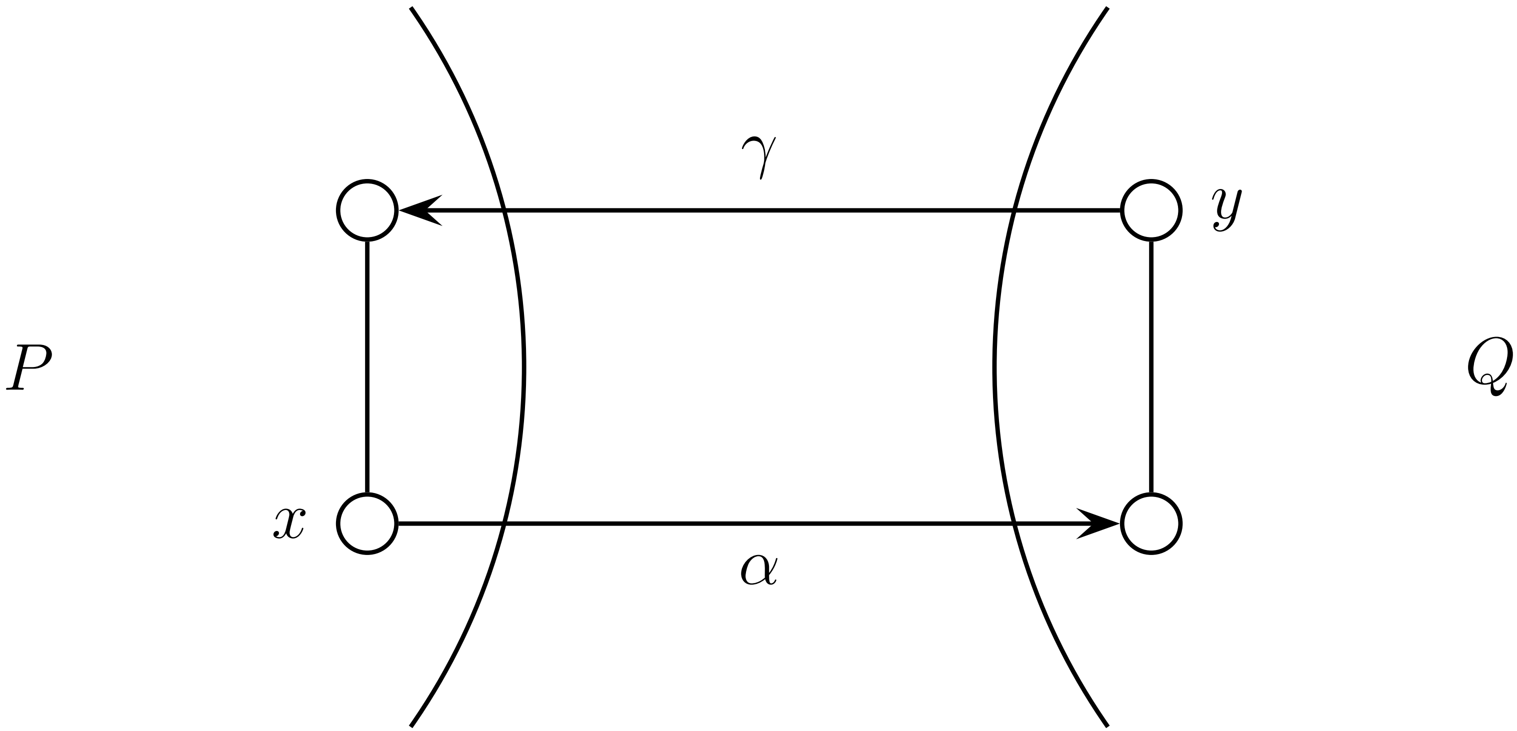
Prendiamo i due insiemi P e Q e due punti x e y qualsiasi.

Connessione di Galois



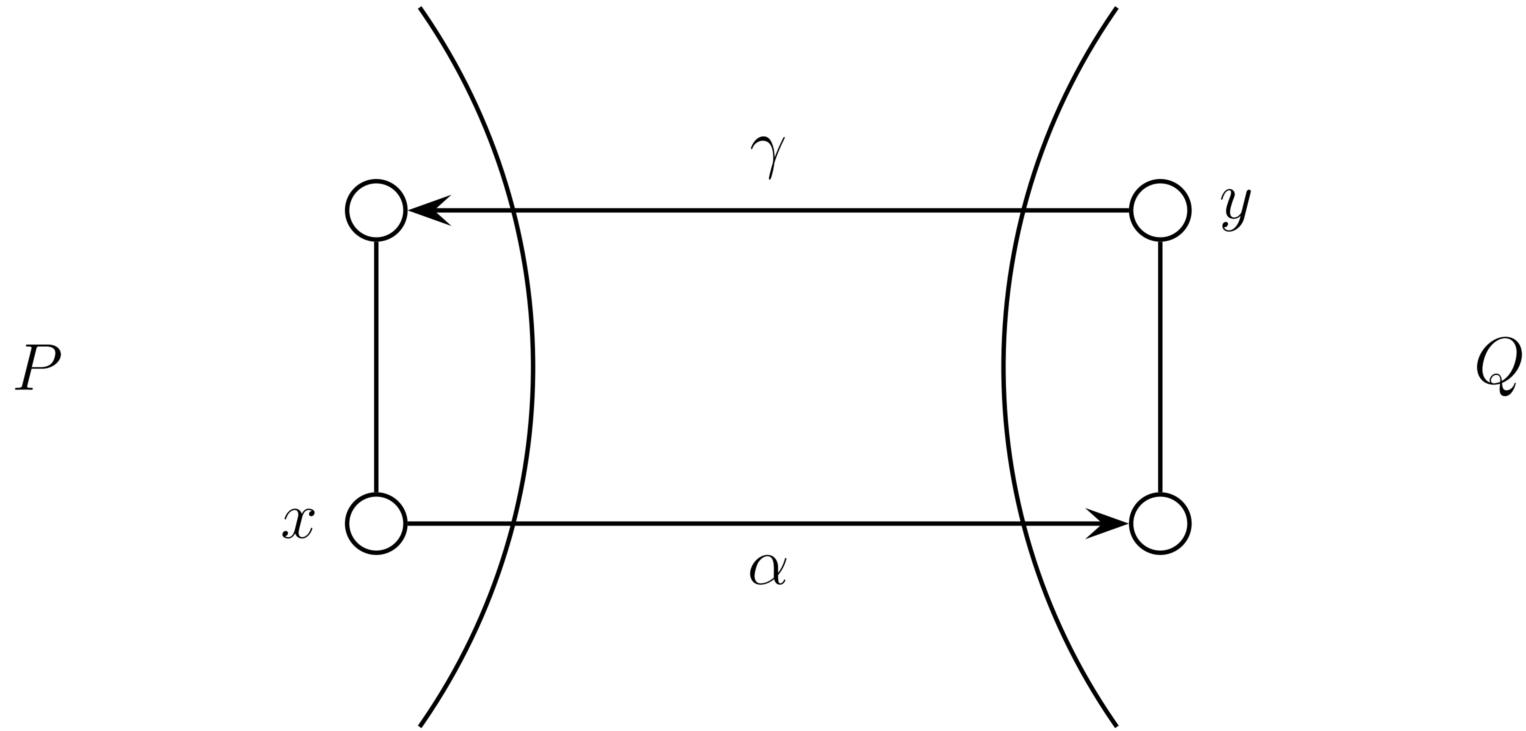
Prendiamo i due insiemi P e Q e due punti x e y qualsiasi. Ogni volta che troviamo la metà inferiore del rettangolo

Connessione di Galois



Prendiamo i due insiemi P e Q e due punti x e y qualsiasi. Ogni volta che troviamo la metà inferiore del rettangolo sappiamo che c'è anche la metà superiore.

Connessione di Galois



Prendiamo i due insiemi P e Q e due punti x e y qualsiasi. Ogni volta che troviamo la metà inferiore del rettangolo sappiamo che c'è anche la metà superiore. E viceversa.

Connessioni di Galois: proprietà

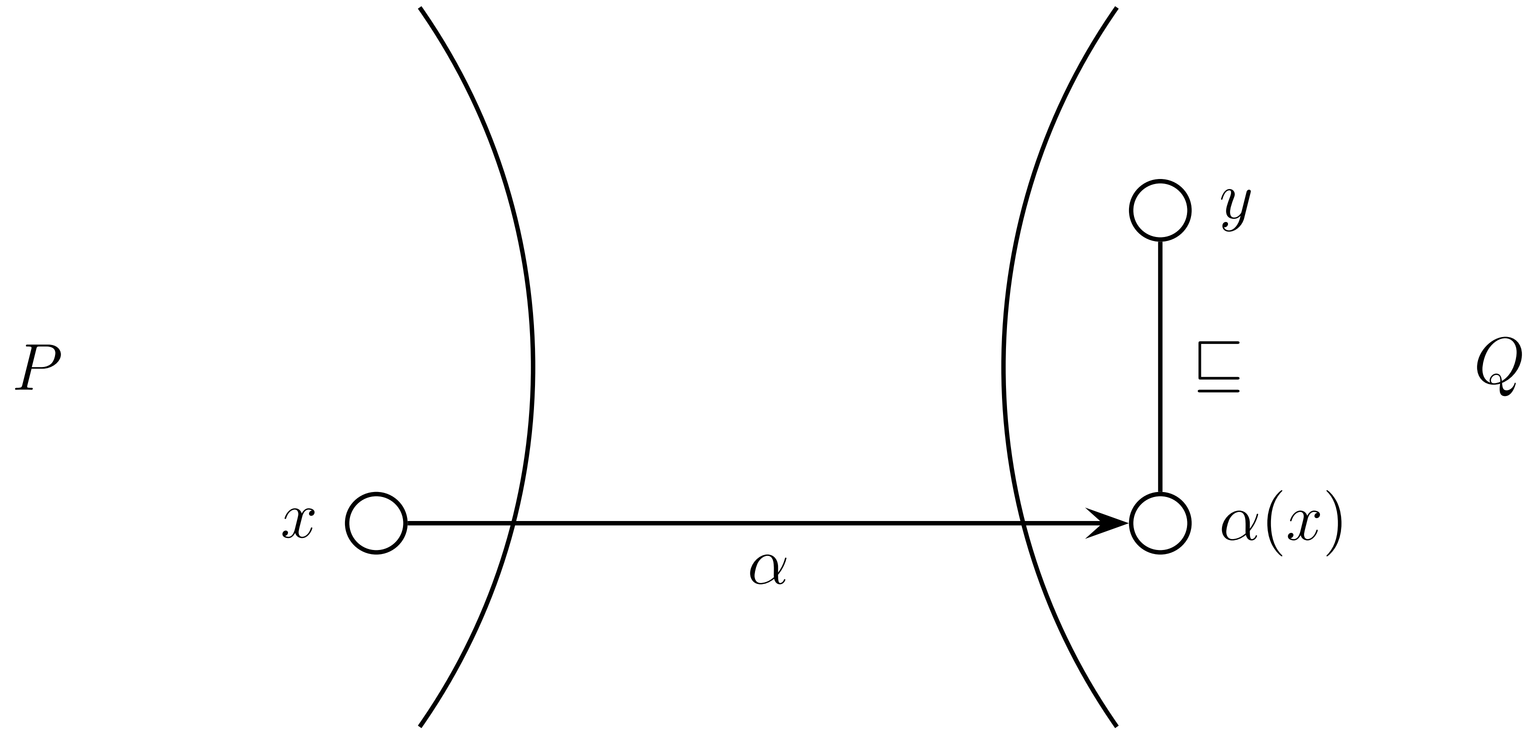
Se

$$\langle P; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Q; \sqsubseteq \rangle$$

allora

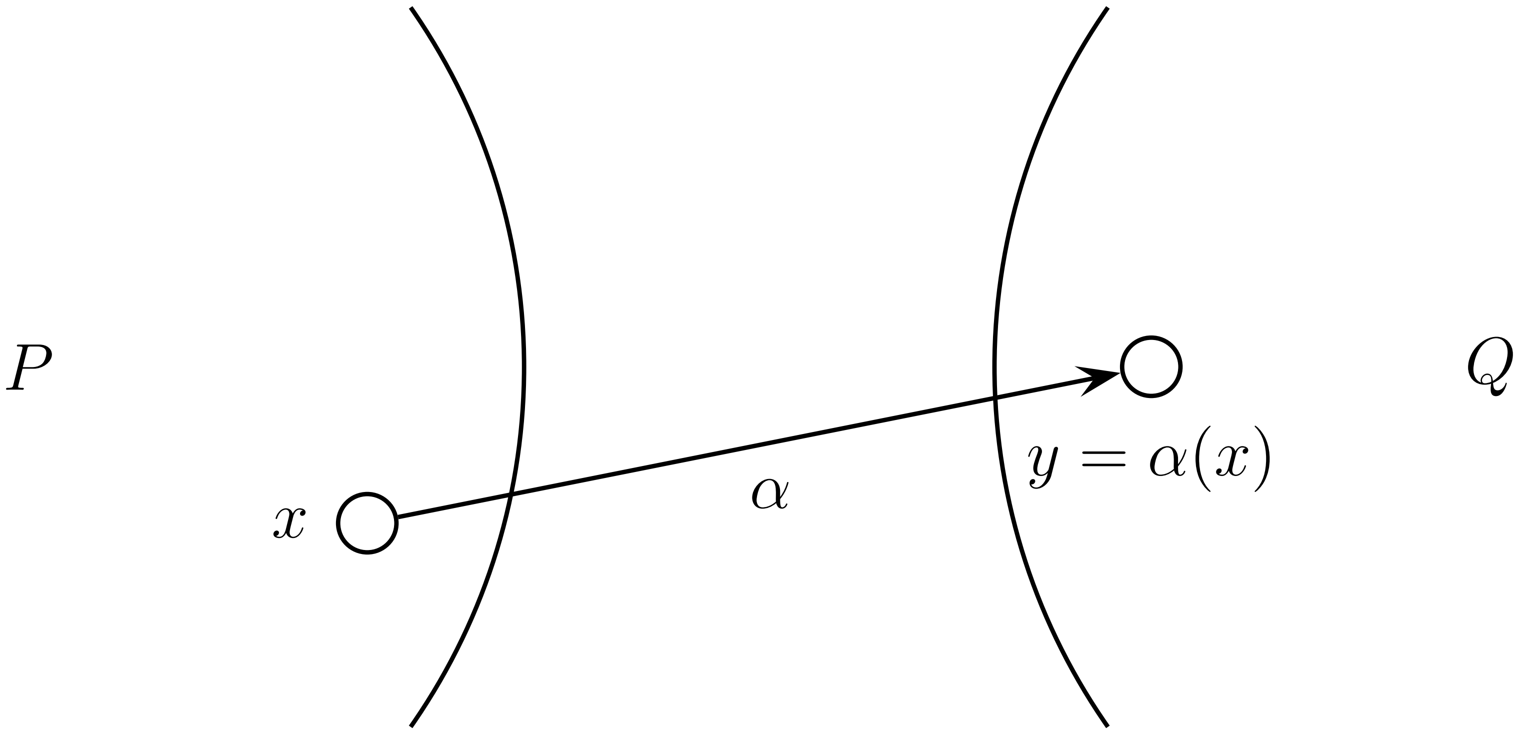
- $x \leq \gamma(\alpha(x))$ per ogni $x \in P$,
- $\alpha(\gamma(y)) \sqsubseteq y$ per ogni $y \in Q$,
- $\alpha\colon P \to Q$ è monotona,
- $\gamma\colon Q \to P$ è monotona.

Connessioni di Galois: proprietà



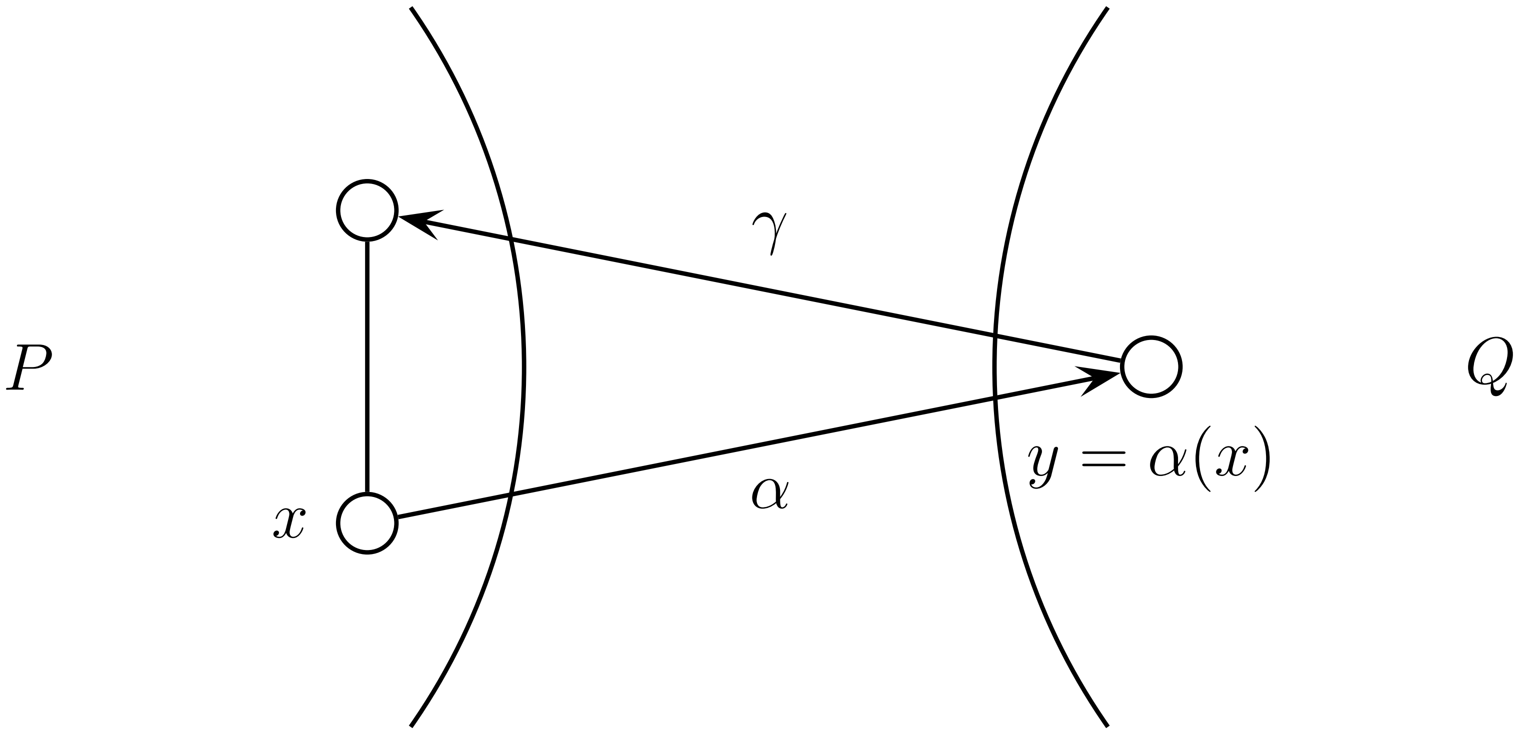
Nel rettangolo inferiore

Connessioni di Galois: proprietà



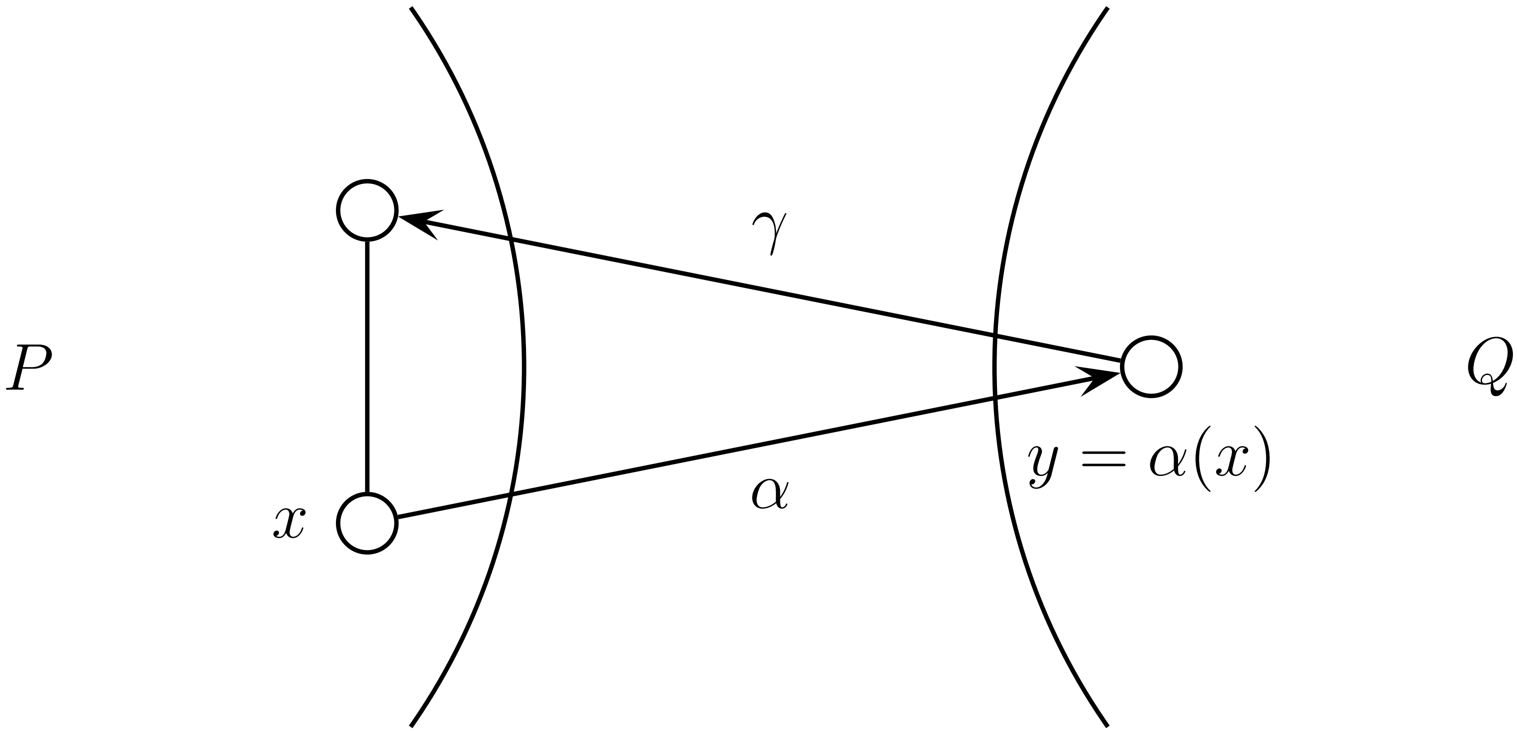
Nel rettangolo inferiore prendiamo come y proprio $\alpha(x)$

Connessioni di Galois: proprietà



Nel rettangolo inferiore prendiamo come y proprio $\alpha(x)$ e quindi completiamo.

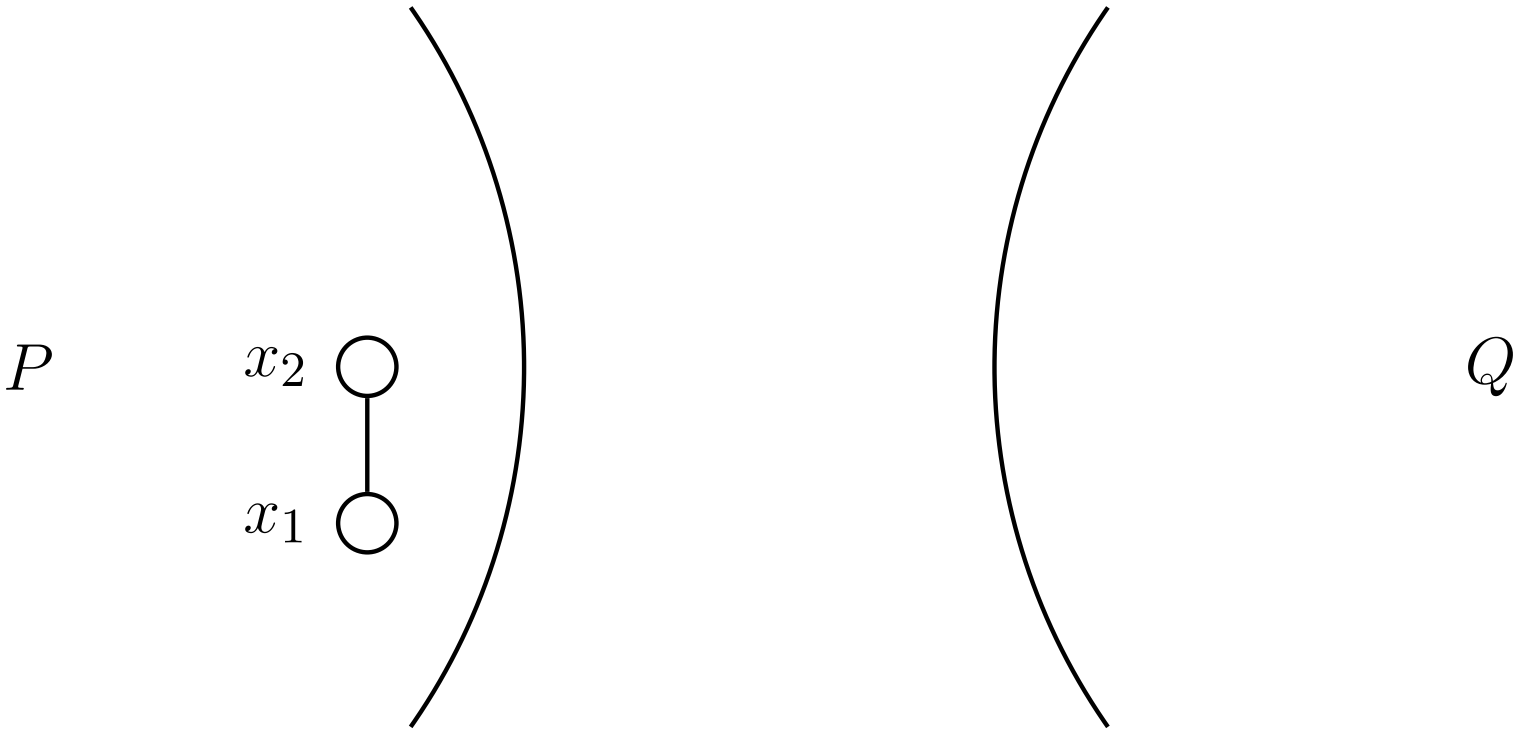
Connessioni di Galois: proprietà



Nel rettangolo inferiore prendiamo come y proprio $\alpha(x)$ e quindi completiamo. Dunque, per ogni $x \in P$, vale

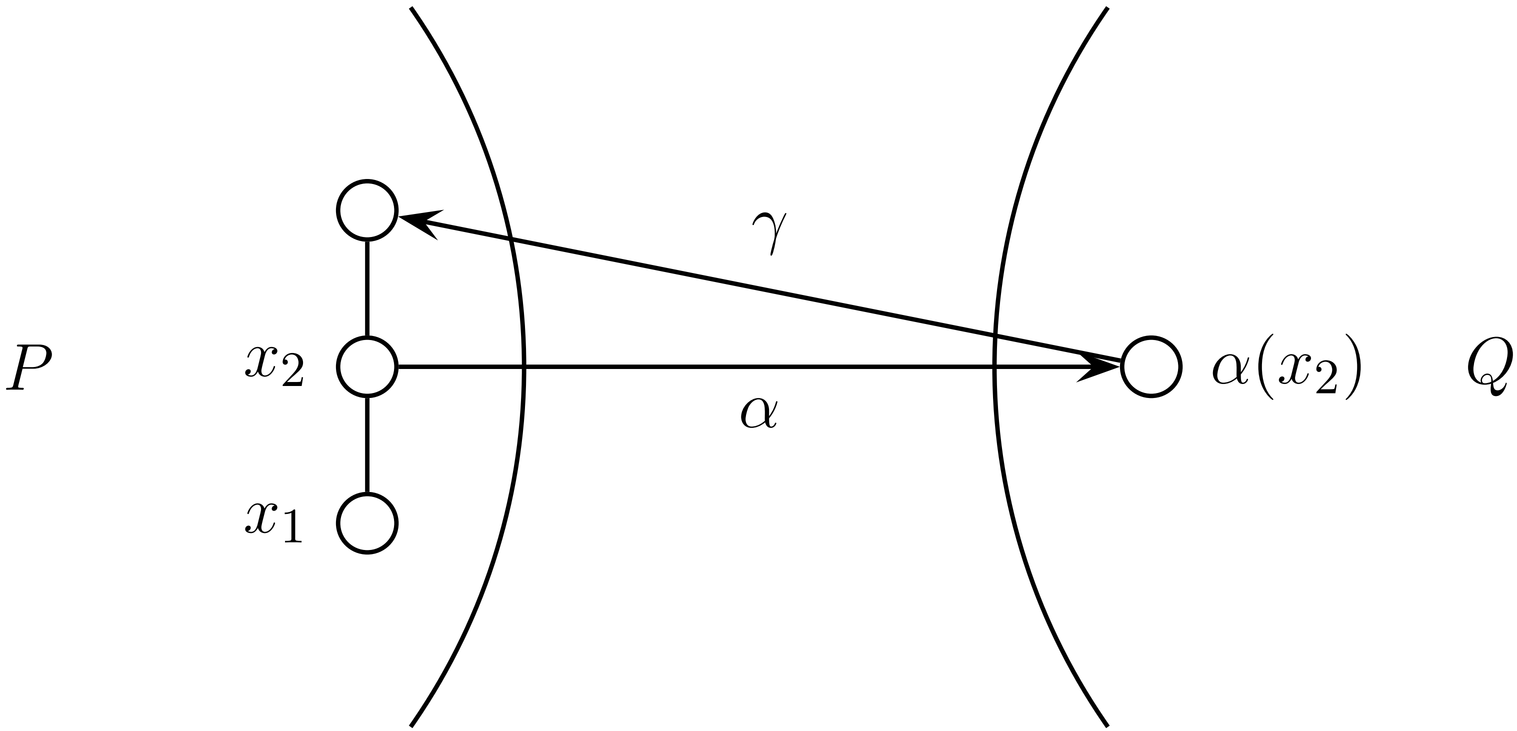
$$x \leq \gamma(\alpha(x)).$$

Connessioni di Galois: proprietà



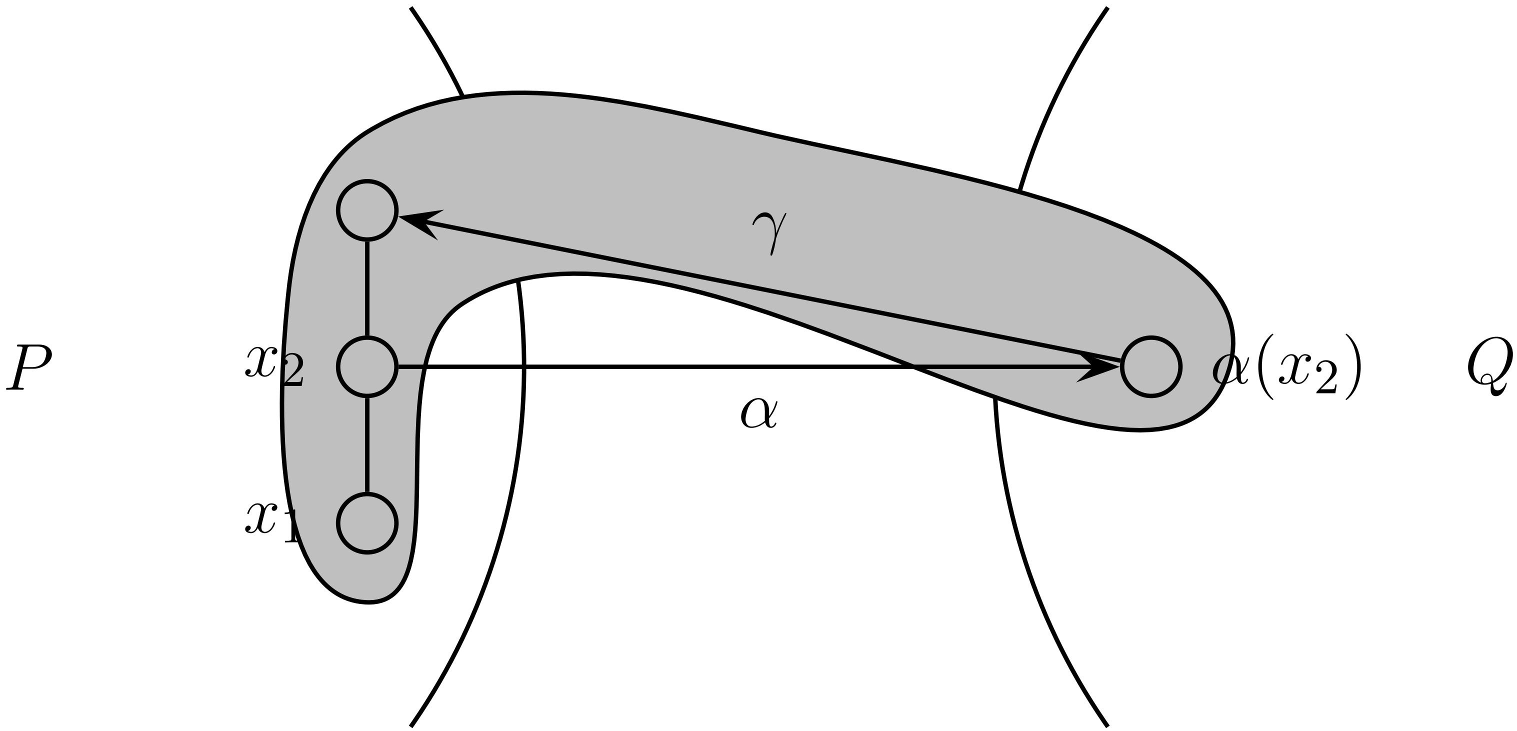
Prendiamo $x_1 \leq x_2$,

Connessioni di Galois: proprietà



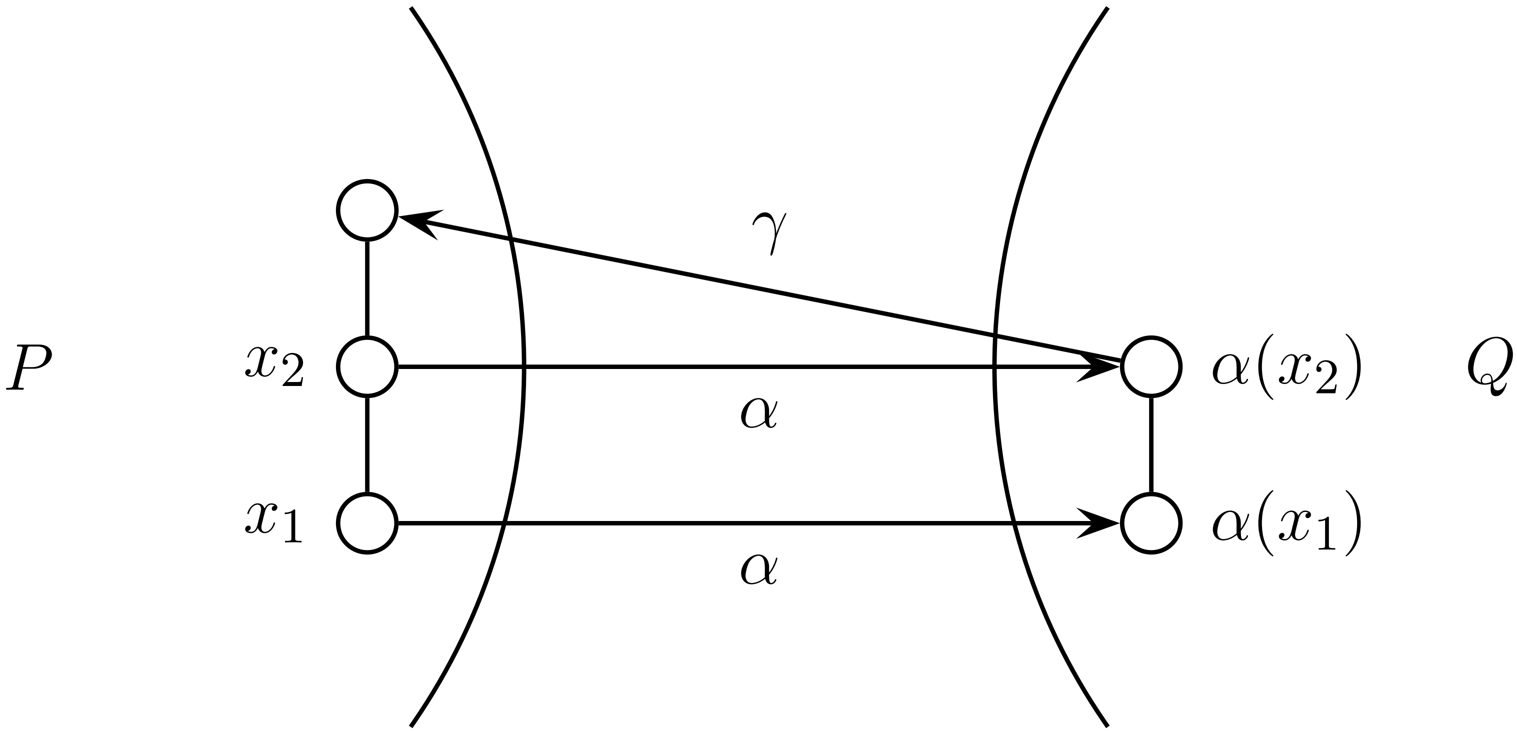
Prendiamo $x_1 \leq x_2$, tracciamo il triangolo di x_2,

Connessioni di Galois: proprietà



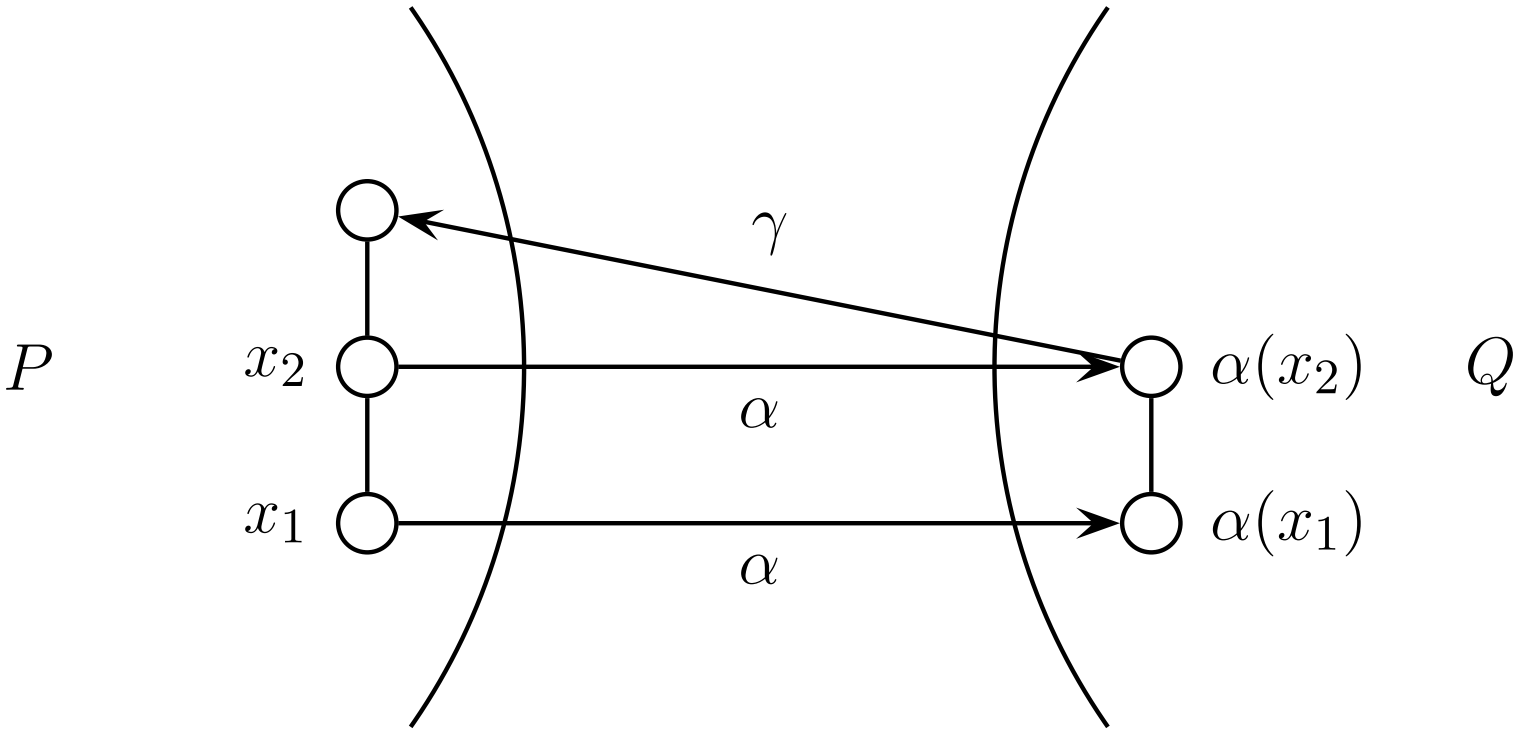
Prendiamo $x_1 \leq x_2$, tracciamo il triangolo di x_2, riconosciamo la parte superiore del rettangolo

Connessioni di Galois: proprietà



Prendiamo $x_1 \leq x_2$, tracciamo il triangolo di x_2, riconosciamo la parte superiore del rettangolo e lo completiamo.

Connessioni di Galois: proprietà



Prendiamo $x_1 \leq x_2$, tracciamo il triangolo di x_2, riconosciamo la parte superiore del rettangolo e lo completiamo. Quindi

$$x_1 \leq x_2 \implies \alpha(x_1) \sqsubseteq \alpha(x_2).$$

Connessioni di Galois: proprietà

Per chi preferisce l'algebra. . .

Prendiamo $x_1, x_2 \in P$ tali che $x_1 \leq x_2$. Per quando dimostrato prima

$$x_2 \leq \gamma(\alpha(x_2))$$

e quindi, per la proprietà transitiva di $\leq$,

$$x_1 \leq \gamma(\alpha(x_2)).$$

Siccome (α, γ) è una connessione di Galois otteniamo

$$\alpha(x_1) \sqsubseteq \alpha(x_2).$$

Connessioni di Galois

Vale anche il contrario:

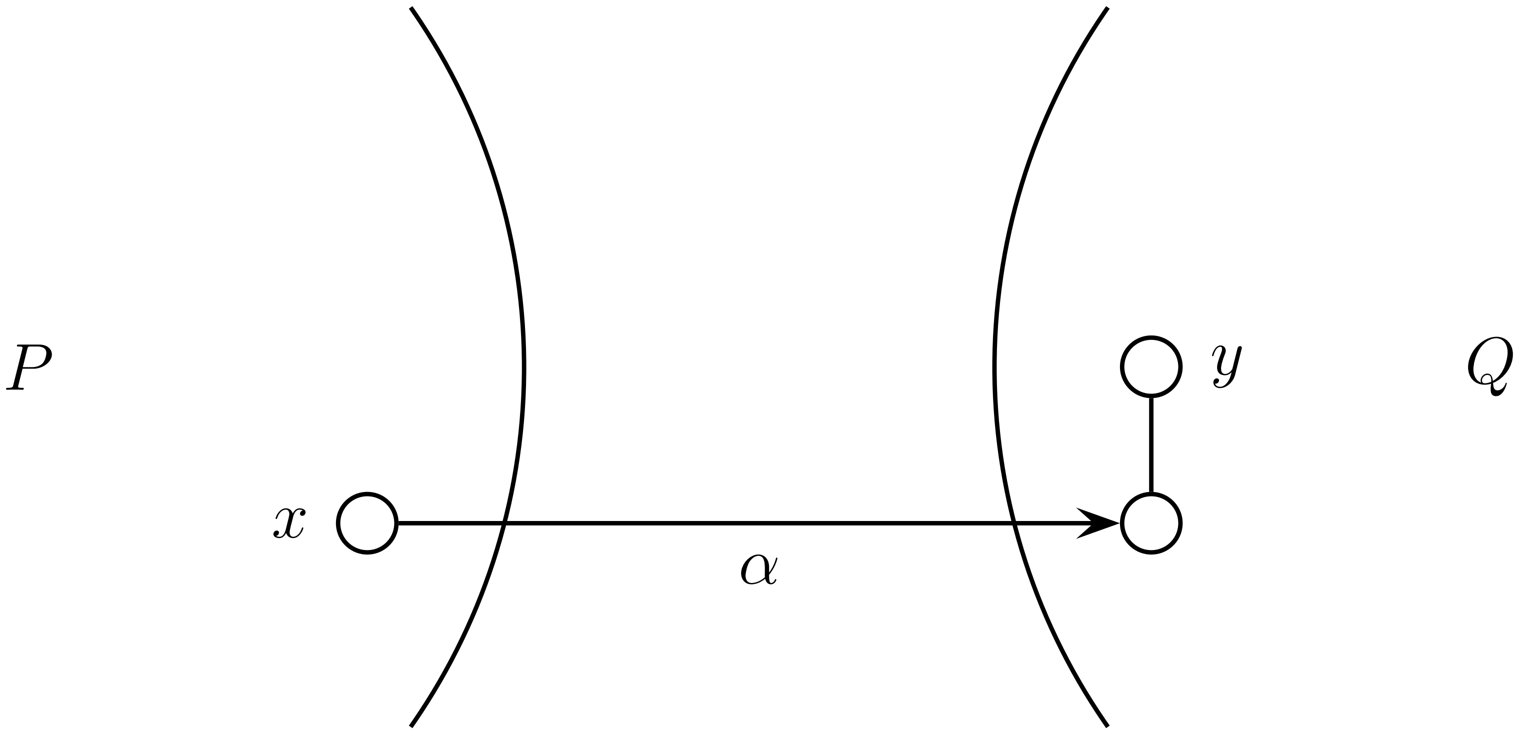
Siano $\langle P; \leq \rangle$ e $\langle Q; \sqsubseteq \rangle$ due poset e $\alpha\colon P \to Q$, $\gamma\colon Q \to P$ due funzioni. Se

- $x \leq \gamma(\alpha(x))$ per ogni $x \in P$,
- $\alpha(\gamma(y)) \sqsubseteq y$ per ogni $y \in Q$,
- $\alpha\colon P \to Q$ è monotona,
- $\gamma\colon Q \to P$ è monotona.

Allora

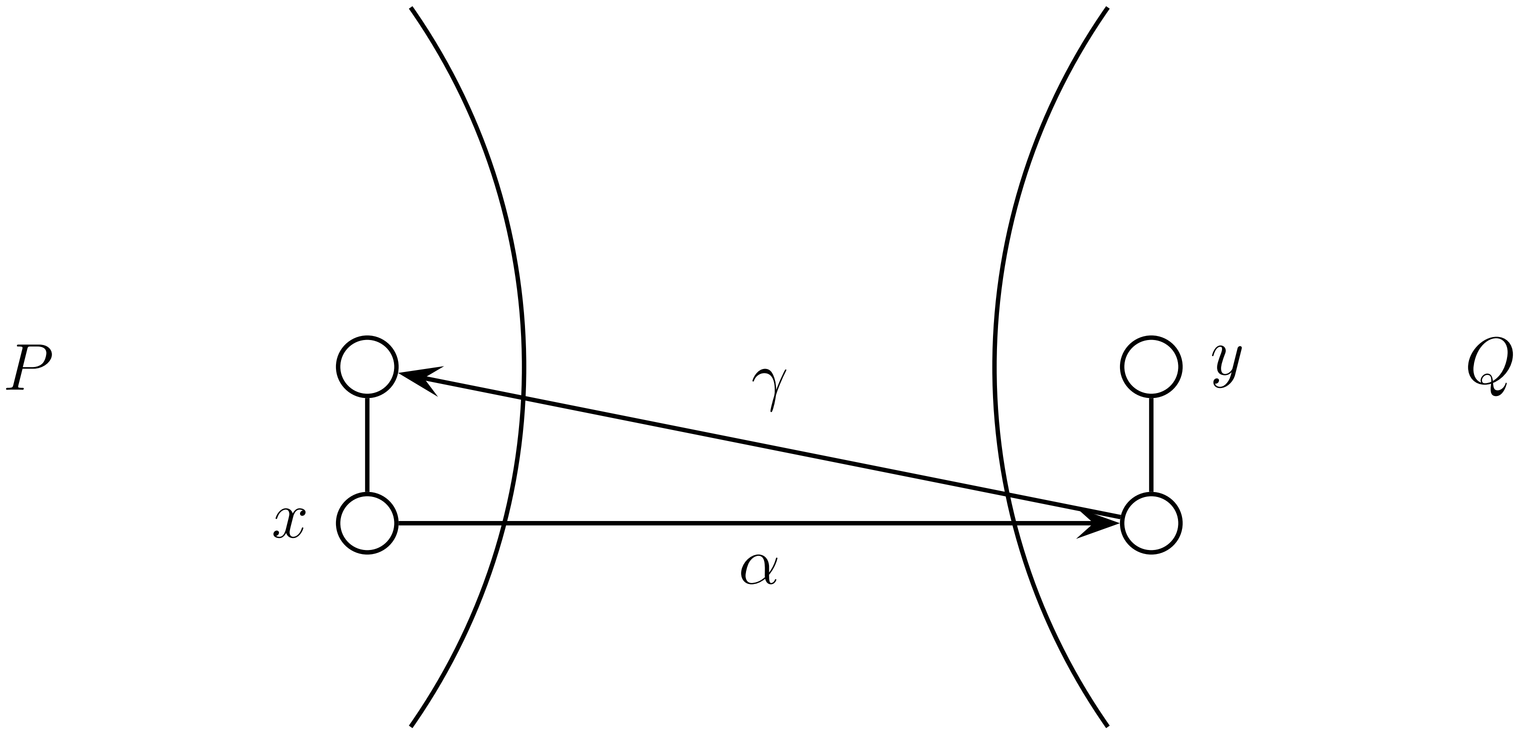
$$\langle P; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Q; \sqsubseteq \rangle$$

Connessioni di Galois: proprietà



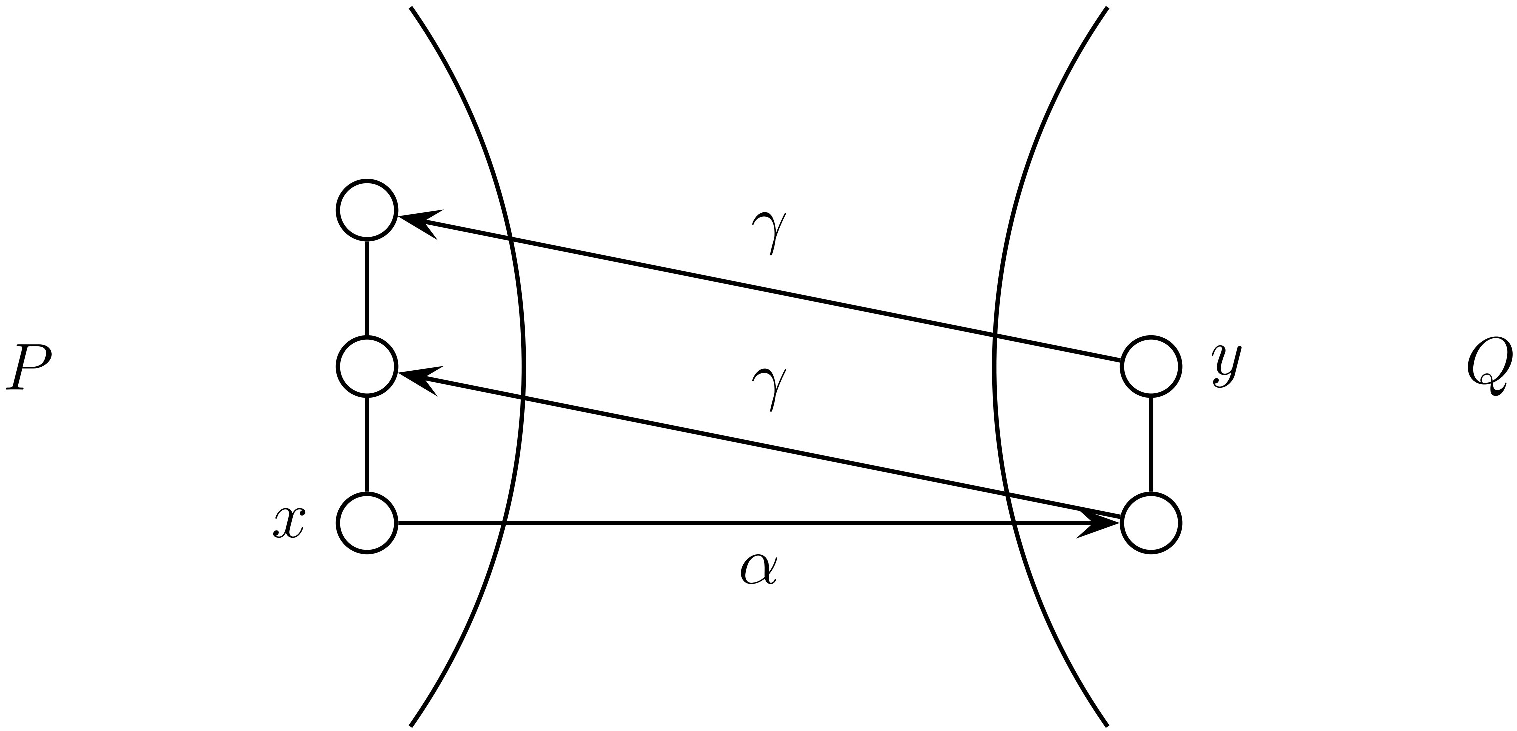
Prendiamo $\alpha(x) \sqsubseteq y$,

Connessioni di Galois: proprietà



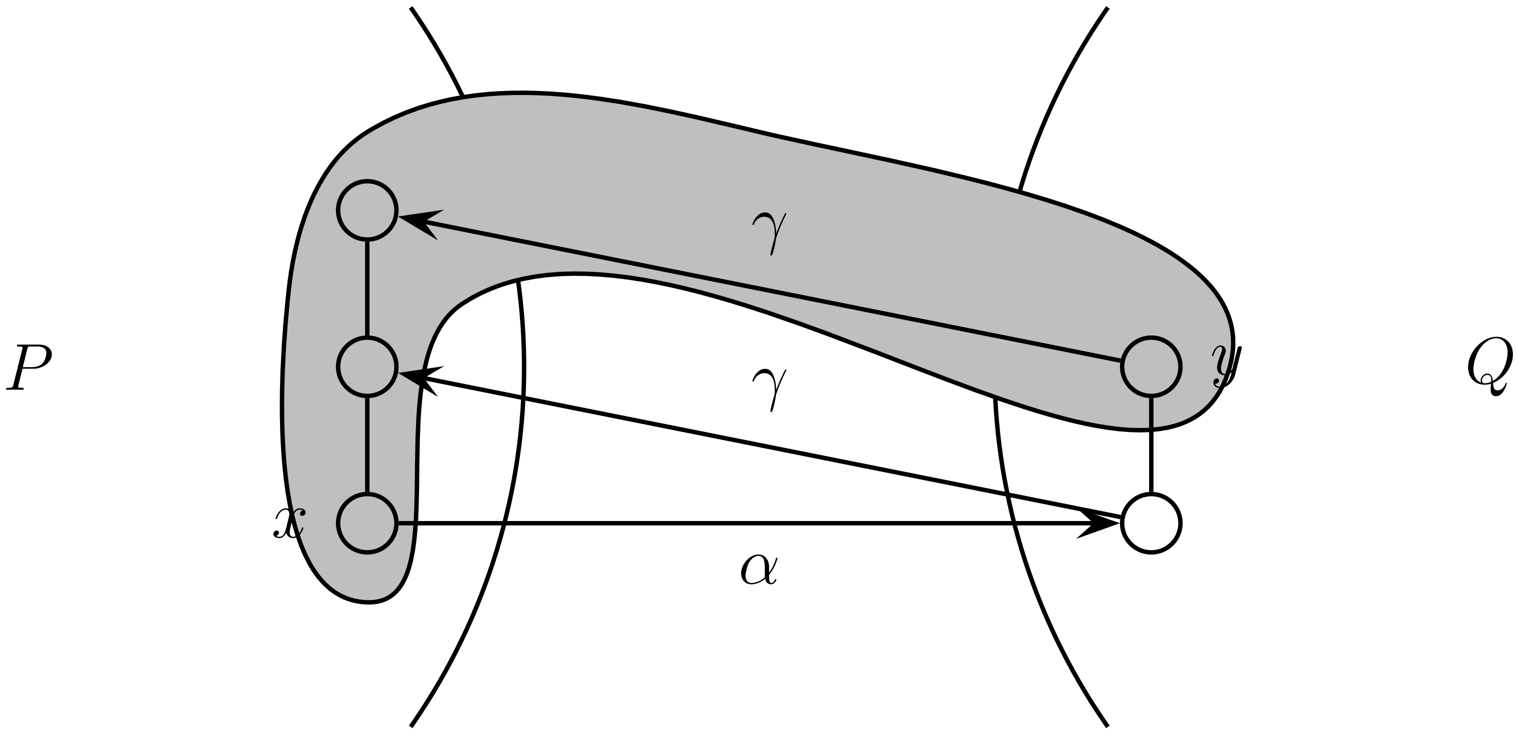
Prendiamo $\alpha(x) \sqsubseteq y$, tracciamo il triangolo di x,

Connessioni di Galois: proprietà



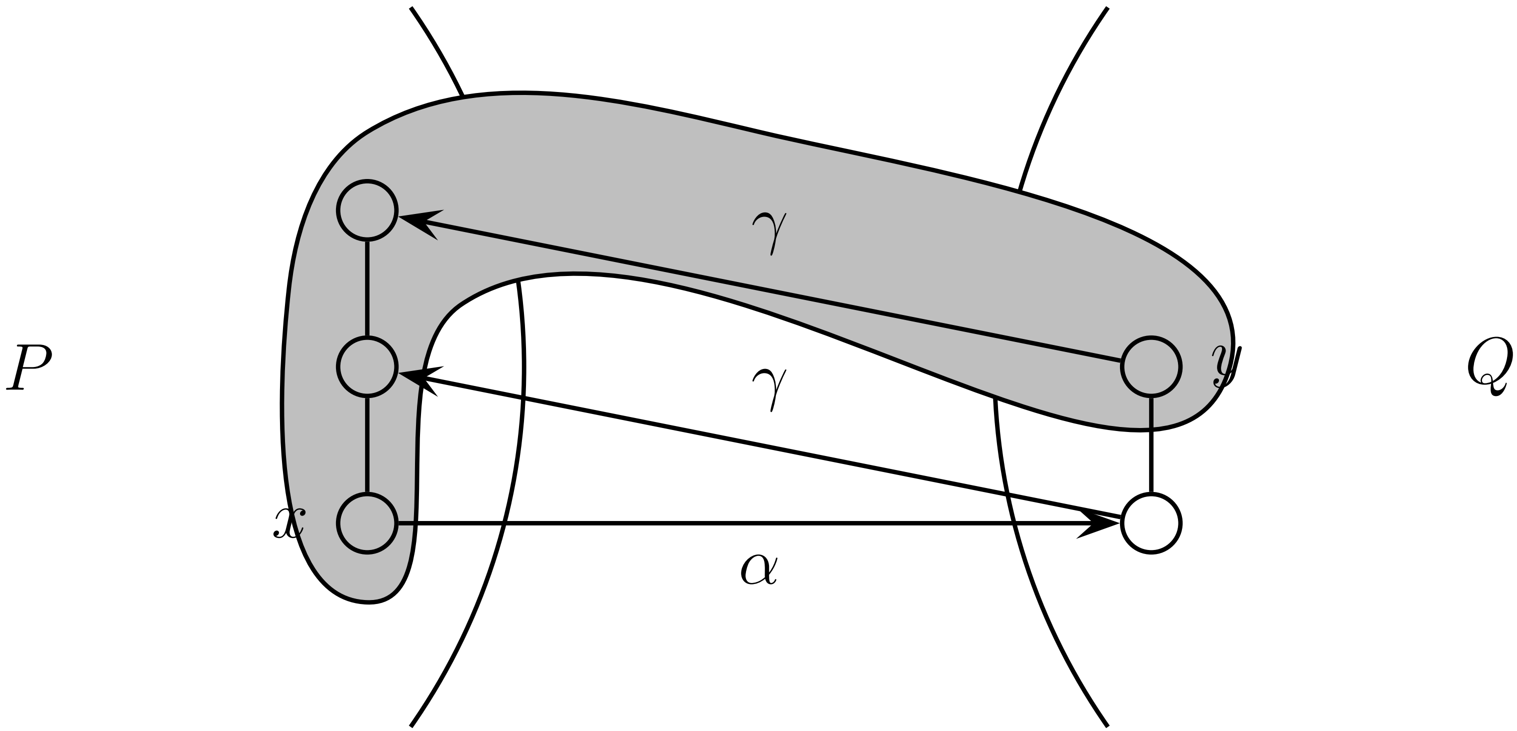
Prendiamo $\alpha(x) \sqsubseteq y$, tracciamo il triangolo di x, sfruttiamo la monotonicità di γ

Connessioni di Galois: proprietà



Prendiamo $\alpha(x) \sqsubseteq y$, tracciamo il triangolo di x, sfruttiamo la monotonicità di γ e otteniamo $x \leq \gamma(y)$.

Connessioni di Galois: proprietà



Prendiamo $\alpha(x) \sqsubseteq y$, tracciamo il triangolo di x, sfruttiamo la monotonicità di γ e otteniamo $x \leq \gamma(y)$. Similmente partendo da $x \leq \gamma(y)$.

GC e isomorfismi

Ricordiamo che $f\colon P \to Q$ è un isomorfismo se è monotona e possiede un'inversa g monotona:

- $x = g(f(x))$ per ogni $x \in P$;
- $y = f(g(y))$ per ogni $y \in Q$;
- f è monotona;
- g è monotona.

Possiamo vedere una Connessione di Galois come un isomorfismo in cui "rilassiamo" le prime due condizioni.

GC e astrazione

Supponiamo di avere

$$\langle P; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Q; \sqsubseteq \rangle.$$

Interpretiamo:

- $\langle P; \leq \rangle$ come *dominio concreto*;
- $\langle Q; \sqsubseteq \rangle$ come *dominio astratto*;
- $\alpha \colon P \to Q$ come *funzione di astrazione*;
- $\gamma \colon Q \to P$ come *funzione di concretizzazione*.

GC e astrazione: motivazioni

Supponiamo che il dominio concreto sia $\langle \wp(X); \subseteq \rangle$, le proprietà degli elementi di X, e prendiamo $P, Q \in \wp(X)$.

Prendiamo un generico dominio astratto $\langle A; \sqsubseteq \rangle$ e $a, b \in A$.

Con $\alpha(P) = a$ vogliamo dire che l'elemento astratto a approssima la proprietà concreta P.

Con $Q = \gamma(b)$ vogliamo dire che Q è il "significato" dell'elemento astratto b.

GC e astrazione: motivazioni

Abbiamo visto che $P \subseteq Q$ va interpretato come "Q approssima per eccesso P" (o P approssima per difetto Q).

La monotonicità di α riporta la relazione di approssimazione nel dominio astratto.

La monotonicità di γ fa la stessa cosa passando dall'astratto al concreto, dando un significato a $a \sqsubseteq b$.

$P \subseteq \gamma(\alpha(P))$ ci dice che il significato dell'elemento astratto che associamo a P è una approssimazione per eccesso di P.

$\alpha(\gamma(a)) \sqsubseteq a$ ci dice che a approssima per eccesso il suo "significato".

GC e reticoli completi

Siano $\langle C; \leq \rangle$ e $\langle A; \sqsubseteq \rangle$ due reticoli completi e

$$\langle C; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle.$$

Allora

- α preserva join arbitrari;
- γ preserva meet arbitrari;
- α identifica univocamente γ e viceversa.

In particolare avremo:

$$\alpha(c) = \min\{\, a \in A \mid c \leq \gamma(a) \,\},$$
$$\gamma(a) = \max\{\, c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq a \,\}.$$

GC e reticoli completi: motivazione

I risultati precedenti ci offrono ulteriori motivazioni a richiedere che i domini astratti siano reticoli completi collegati tramite una GC con il dominio concreto:

- Il fatto che α preservi i join arbitrari ci fornisce una rappresentazione fedele dell'operazione $\cup$ nel dominio astratto.
- La formula che definisce α dato γ ci dice che ogni elemento concreto ha una rappresentazione astratta che è la migliore (la più precisa) di tutte quelle che lo approssimano per eccesso.

GC e reticoli completi

Siano $\langle C; \leq \rangle$ e $\langle A; \sqsubseteq \rangle$ due reticoli completi.
Allora

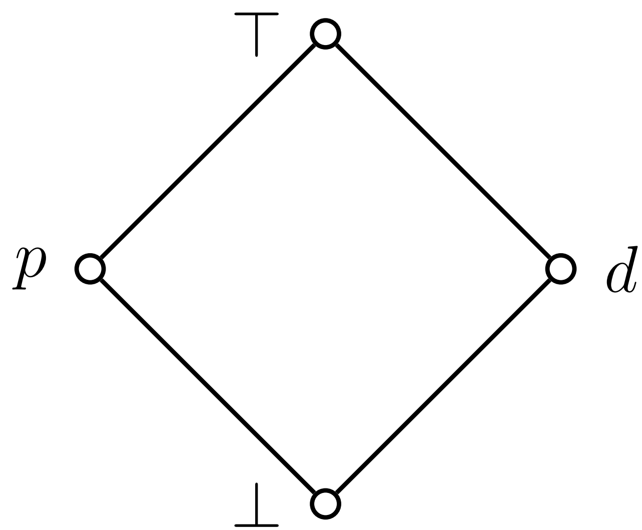
- Se $\alpha : C \to A$ preserva join arbitrari allora esiste $\gamma : A \to C$ tale che (α, γ) è una connessione di Galois;
- Se $\gamma : A \to C$ preserva meet arbitrari allora esiste $\alpha : C \to A$ tale che (α, γ) è una connessione di Galois;

Quindi per definire una connessione di Galois possiamo limitarci a definire un γ che rispetti meet arbitrari, oppure un α che rispetti join arbitrari.

GC e astrazione: parità

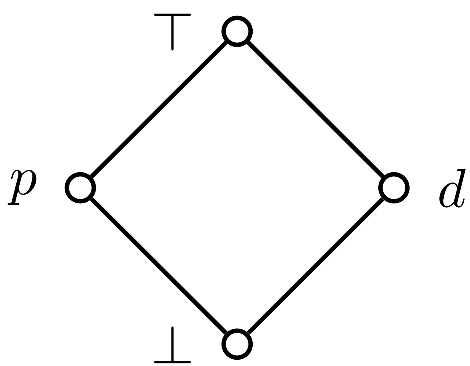
Dominio concreto: $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ (per es. proprietà dei valori di una variabile in un punto di un programma).

Dominio astratto $\langle \{ \top, p, d, \bot \}; \sqsubseteq \rangle$:



GC e astrazione: parità

Funzione di concretizzazione:



$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \perp, \\ \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4 \ldots\} & \text{se } x = p, \\ \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\} & \text{se } x = d, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

GC e astrazione: parità

Funzione di astrazione ($A \in \wp(\mathbb{Z})$):

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} & \text{se } x = p, \\ \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\} & \text{se } x = d, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

$$\alpha(A) = \min\{\, a \mid A \subseteq \gamma(a) \,\}.$$

GC e astrazione: parità

Funzione di astrazione ($A \in \wp(\mathbb{Z})$):

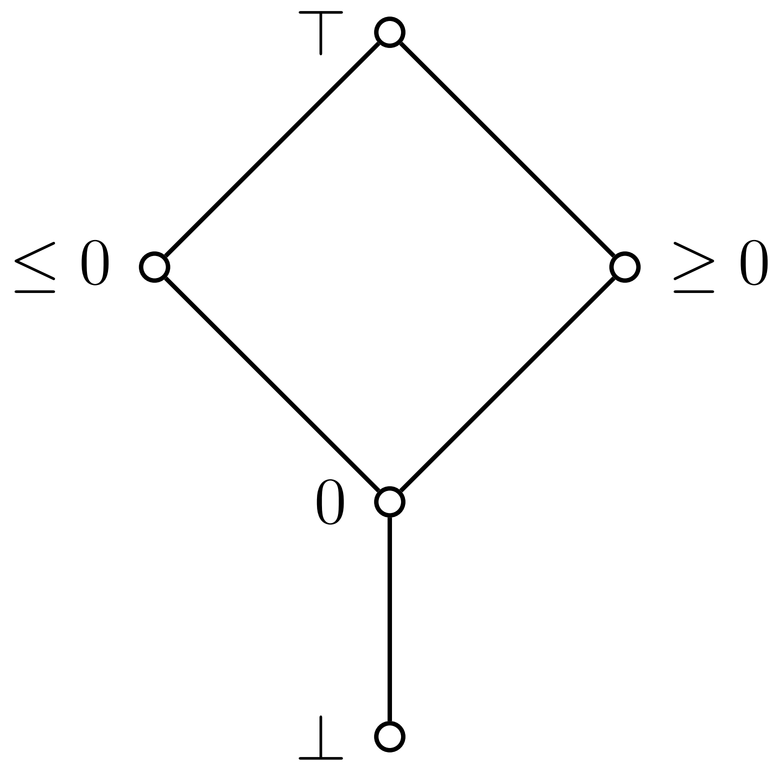
$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} & \text{se } x = p, \\ \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\} & \text{se } x = d, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

$$\alpha(A) = \min\{\, a \mid A \subseteq \gamma(a) \,\}.$$

$$\begin{array}{lll} \alpha(A) = & \textbf{if } (A = \varnothing) & \bot; \\ & \textbf{else if } (\forall n \in A,\ n \text{ pari}) & p; \\ & \textbf{else if } (\forall n \in A,\ n \text{ dispari}) & d; \\ & \textbf{else} & \top. \end{array}$$

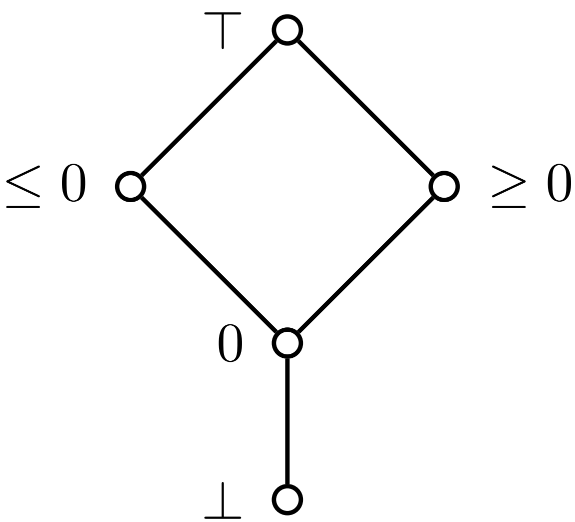
GC e astrazione: segni

Dominio concreto: $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$.
Dominio astratto $\langle \{ \top, \leq 0, \geq 0, 0, \bot \}; \sqsubseteq \rangle$:



GC e astrazione: segni

Funzione di concretizzazione:

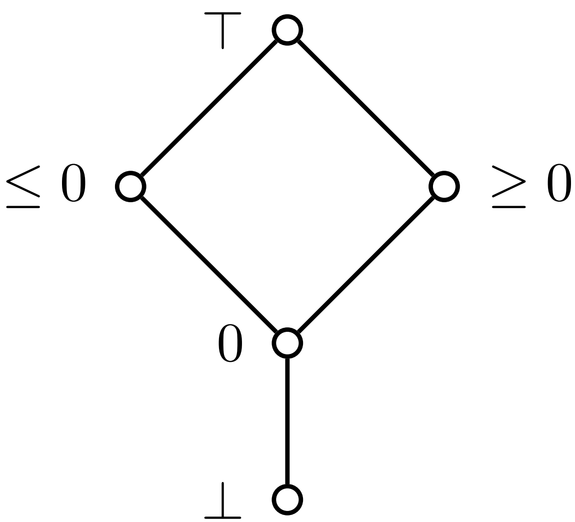


$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{0\} & \text{se } x = 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Rispetta i meet?

GC e astrazione: segni

Funzione di concretizzazione:



$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{0\} & \text{se } x = 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Rispetta i meet?

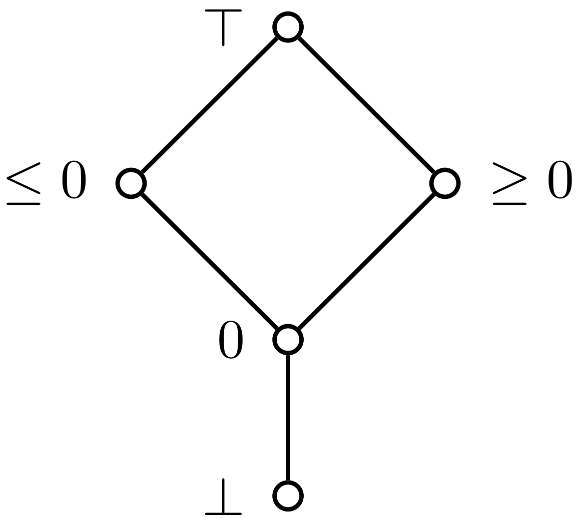
Sì:

$$\gamma(\leq 0 \wedge \geq 0) = \gamma(0) = \{0\}$$

$$\gamma(\leq 0) \cap \gamma(\geq 0) = \{\, n \mid n \leq 0 \,\} \cap \{\, n \mid n \geq 0 \,\} = \{0\}.$$

GC e astrazione: segni

Funzione di astrazione:

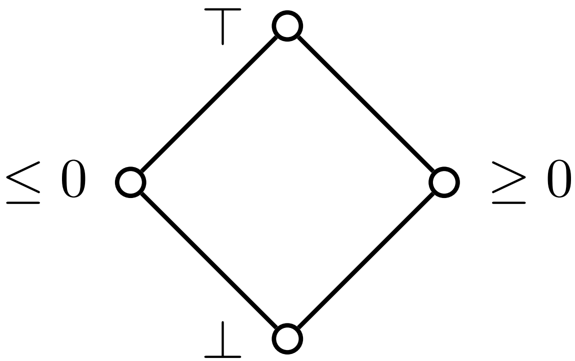


$$
\alpha(A) = \begin{array}{ll}
\textbf{if } (A = \varnothing) & \bot; \\
\textbf{else if } (A = \{0\}) & 0; \\
\textbf{else if } (\forall n \in A,\ n \leq 0) & \leq 0; \\
\textbf{else if } (\forall n \in A,\ n \geq 0) & \geq 0; \\
\textbf{else} & \top.
\end{array}
$$

Esempio: $\alpha(\{0, 2, 4\}) = \geq 0.$
Notiamo che

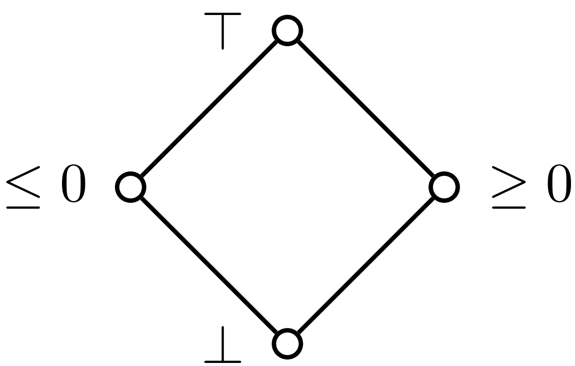
$$\{0, 2, 4\} \subseteq \{\, n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \,\} = \gamma(\alpha(\{\, 0, 2, 4\})).$$

Segni: controesempio



$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \perp, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

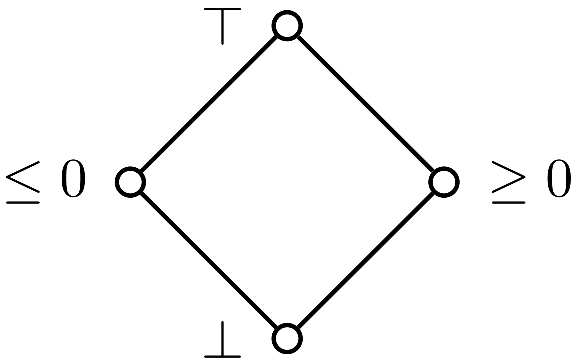
Segni: controesempio



$$\gamma(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x = \bot, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Non rispetta i meet.

Segni: controesempio



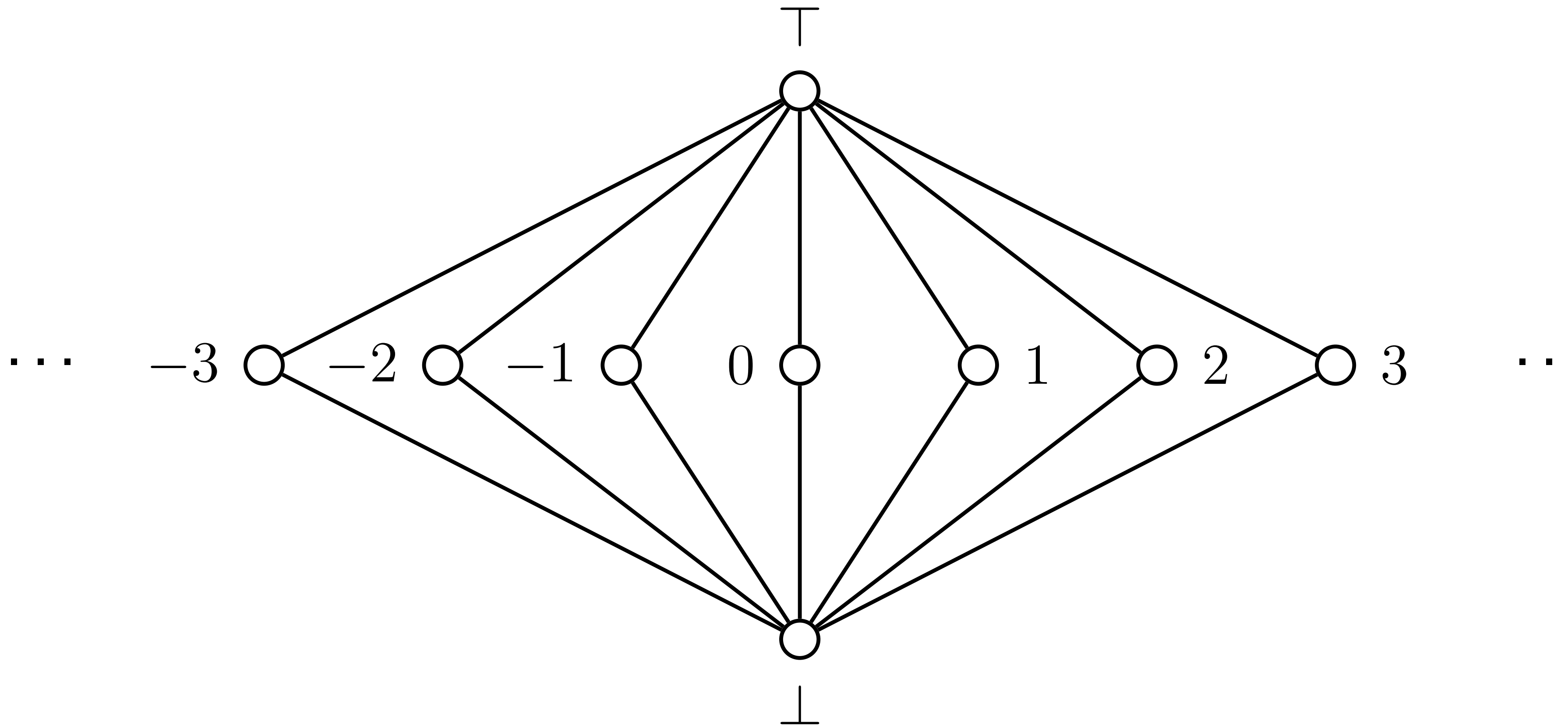
$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \perp, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Non rispetta i meet.

Non esiste un elemento che approssimi $\{0\}$ meglio di tutti gli altri.

GC e astrazione: costanti

Dominio concreto: $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$.
Dominio astratto:



GC e astrazione: costanti

Funzione di concretizzazione:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{n\} & \text{se } x = n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Funzione di astrazione:

GC e astrazione: costanti

Funzione di concretizzazione:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{n\} & \text{se } x = n, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Funzione di astrazione:

$$\begin{aligned} \alpha(A) = \ & \textbf{if } (A = \varnothing) && \bot; \\ & \textbf{else if } A = \{n\} && n; \\ & \textbf{else} && \top. \end{aligned}$$

Iniezione di Galois

Sia $\langle C; \leq \rangle \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle$ una GC tra il dominio concreto C e il dominio astratto A.

Prendiamo $a \in A$. Affinchè $\gamma(a)$ rappresenti correttamente il significato di a vorremmo che

$$\alpha(\gamma(a)) = a$$

e non soltanto $\alpha(\gamma(a)) \sqsubseteq a$.

Quando in una GC vale l'uguaglianza precedente siamo di fronte a una Iniezione di Galois, che scrivamo

$$\langle C; \leq \rangle \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\leftarrows\!\!\twoheadrightarrow}} \langle A; \sqsubseteq \rangle.$$

Iniezione di Galois: proprietà

Sia

$$\langle C; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle$$

una Connessione di Galois. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $a = \alpha(\gamma(a))$ per ogni $a \in A$;
- α è surgettiva;
- γ è iniettiva.

Quindi possiamo verificare che una GC è una GI controllando una qualunque delle tre condizioni.

Iniezione di Galois: proprietà

La proposizione precedente ci fornisce ulteriori motivi per volere GI e non GC:

Infatti, in assenza di GI:

- α non è surgettiva, quindi ci sono elementi astratti inutilizzati;
- γ non è iniettiva, quindi ci sono più elementi astratti con lo stesso significato.

Astrazione: intervalli

Dominio concreto: $\langle \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$.

Dominio astratto: $\langle \mathbb{I}^*_\perp; \leq \rangle$ (intervalli).

Dato $A \in \wp(\mathbb{Z})$, definiamo

$$\min^*(A) = \begin{cases} \min A & \text{se } \min A \text{ esiste,} \\ -\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\max^*(A) = \begin{cases} \max A & \text{se } \max A \text{ esiste,} \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Astrazione: intervalli

Funzione di astrazione:

$$\alpha(A) = \begin{cases} \bot & \text{se } A = \varnothing, \\ [\min^* A, \max^* A] & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Funzione di concretizzazione ($a, b \in \mathbb{Z}$):

$$\gamma(i) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } i = \bot, \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = [-\infty, +\infty], \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid a \le n \,\} & \text{se } i = [a, +\infty], \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \le b \,\} & \text{se } i = [-\infty, b], \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid a \le n \le b \,\} & \text{se } i = [a, b]. \end{cases}$$

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\perp$?
- Per ottenere $[a, b]$?
- Per ottenere $[-\infty, b]$?
- Per ottenere $[a, +\infty]$?
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\perp$? $\alpha(\varnothing)$;
- Per ottenere $[a, b]$?
- Per ottenere $[-\infty, b]$?
- Per ottenere $[a, +\infty]$?
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\bot$? $\alpha(\varnothing)$;
- Per ottenere $[a, b]$? $\alpha(\{a, b\})$;
- Per ottenere $[-\infty, b]$?
- Per ottenere $[a, +\infty]$?
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\bot$? $\alpha(\varnothing)$;
- Per ottenere $[a, b]$? $\alpha(\{a, b\})$;
- Per ottenere $[-\infty, b]$? $\alpha(\{\, n \mid n \leq b \,\})$;
- Per ottenere $[a, +\infty]$?
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\perp$? $\alpha(\emptyset)$;
- Per ottenere $[a, b]$? $\alpha(\{a, b\})$;
- Per ottenere $[-\infty, b]$? $\alpha(\{\, n \mid n \leq b \,\})$;
- Per ottenere $[a, +\infty]$? $\alpha(\{\, n \mid a \leq n \,\})$;
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$?

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\perp$? $\alpha(\varnothing)$;
- Per ottenere $[a, b]$? $\alpha(\{a, b\})$;
- Per ottenere $[-\infty, b]$? $\alpha(\{\, n \mid n \leq b \,\})$;
- Per ottenere $[a, +\infty]$? $\alpha(\{\, n \mid a \leq n \,\})$;
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$? $\alpha(\mathbb{Z})$.

Astrazione: intervalli

È una inieazione di Galois?

Basta controllare che α sia surgettiva ($a, b \in \mathbb{Z}$):

- Per ottenere $\perp$? $\alpha(\emptyset)$;
- Per ottenere $[a, b]$? $\alpha(\{a, b\})$;
- Per ottenere $[-\infty, b]$? $\alpha(\{\, n \mid n \leq b \,\})$;
- Per ottenere $[a, +\infty]$? $\alpha(\{\, n \mid a \leq n \,\})$;
- Per ottenere $[-\infty, +\infty]$? $\alpha(\mathbb{Z})$.

Quindi è una iniezione di Galois.

GC cartesiana

Prendiamo come dominio concreto $\langle \wp(X \times Y); \subseteq \rangle$ (per es. proprietà dei valori di due variabili in un punto del programma).

Definiamo delle funzioni di proiezione $\pi_1 \colon \wp(X \times Y) \to \wp(X)$ e $\pi_2 \colon \wp(X \times Y) \to \wp(Y)$ date da

$$\pi_1(P) = \{\, x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in P \,\}$$
$$\pi_2(P) = \{\, y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in P \,\}.$$

GC cartesiana

Definiamo $\alpha\colon \wp(X \times Y) \to \wp(X) \times \wp(Y)$ come

$$\alpha(P) = (\pi_1(P), \pi_2(P))$$

e $\gamma\colon \wp(X) \times \wp(Y)$ come

$$\gamma(A, B) = A \times B.$$

Allora

$$\langle \wp(X \times Y); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle \wp(X) \times \wp(Y); \subseteq \rangle.$$

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana è una inserzione di Galois?

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana è una inserzione di Galois?

No.

$$\gamma(\varnothing, B) = \varnothing \times B = \varnothing = A \times \varnothing = \gamma(A, \varnothing)$$

qualunque siano $A \in \wp(X)$ e $B \in \wp(Y)$, quindi γ non è iniettiva in generale.

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana è una inserzione di Galois?

No.

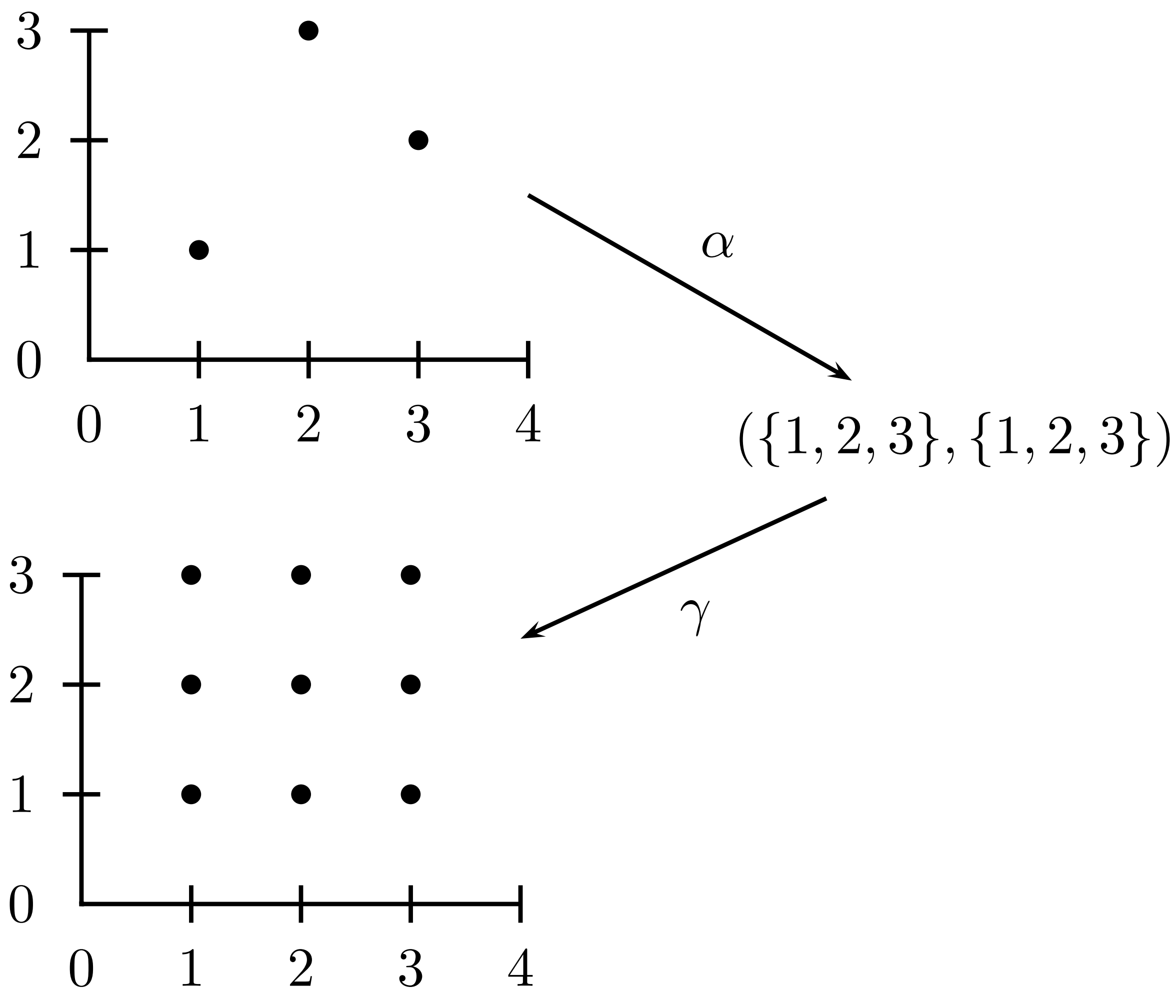
$$\gamma(\varnothing, B) = \varnothing \times B = \varnothing = A \times \varnothing = \gamma(A, \varnothing)$$

qualunque siano $A \in \wp(X)$ e $B \in \wp(Y)$, quindi γ non è iniettiva in generale.

Possiamo rimediare identificando tutte le coppie in cui uno dei due elementi è vuoto con la coppia $(\varnothing, \varnothing)$.

GI cartesiana: esempi

Prendiamo $X = Y = \mathbb{Z}$.



GI cartesiana

In una GI cartesiana vengono dimenticate le relazioni tra i vari elementi del prodotto.

Per esempio, in $\langle \wp(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle \wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ prendiamo

$$P = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq 5 \text{ e } 0 \leq j \leq 5 \text{ e } i \leq j\}.$$

Avremo

$$\begin{aligned} \alpha(P) &= (\{\, i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 5 \,\}, \{\, j \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq j \leq 5 \,\} \\ \gamma(\alpha(P)) &= \{\, (i, j) \mid 0 \leq i \leq 5 \text{ e } 0 \leq j \leq 5 \,\}. \end{aligned}$$

GC cartesiana per funzioni

Il dominio concreto è del tipo $\langle \wp(V \to Z); \subseteq \rangle$, il dominio astratto è $\langle V \to \wp(Z); \leq \rangle$.

Definiamo:

$$\alpha(P)(v) = \{\, f(v) \mid f \in P \,\} \qquad \text{(per ogni } v \in V\text{)}$$

$$\gamma(r) = \{\, f \mid \forall v \in V,\ f(v) \in r(v) \,\}.$$

Avremo

$$\langle \wp(V \to Z); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle V \to \wp(Z); \leq \rangle.$$

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana per funzioni è una inserzione di Galois?

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana per funzioni è una inserzione di Galois?

No. Se prendiamo $r \in (V \to \wp(Z))$ tale che $r(x) = \varnothing$ per qualche $x \in V$, allora

$$\gamma(r) = \{ f \mid \forall v \in V, f(v) \in r(v) \} = \varnothing$$

indipendentemente dal valore di $r(y)$ per tutte le $y \neq x$. Quindi γ non è iniettiva in generale.

GC cartesiana

La connessione di Galois Cartesiana per funzioni è una inserzione di Galois?

No. Se prendiamo $r \in (V \to \wp(Z))$ tale che $r(x) = \varnothing$ per qualche $x \in V$, allora

$$\gamma(r) = \{\, f \mid \forall v \in V, f(v) \in r(v) \,\} = \varnothing$$

indipendentemente dal valore di $r(y)$ per tutte le $y \neq x$. Quindi γ non è iniettiva in generale.

Possiamo rimediare identificando tutte le funzioni che restituiscono $\varnothing$ su almeno un argomento con la funzione che restiusce sempre $\varnothing$.

GI cartesiana: esempio

Prendiamo il reticolo $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e l'insieme $S = \{x, y, z\}$ e consideriamo $\langle S \to \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$ ordinato puntualmente, *e con tutte le funzioni* f *tali che* $f(v) = \varnothing$ *per qualche* $v \in S$ *identificate tra loro.*

Siano $f, g \in (S \to P)$ date da:

$$f = [x \mapsto \{2, 3\}, y \mapsto \{1\}, z \mapsto \{5, 6\}],$$
$$g = [x \mapsto \{2\}, y \mapsto \{3\}, z \mapsto \{6, 7\}].$$

Allora

GI cartesiana: esempio

Prendiamo il reticolo $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e l'insieme $S = \{x, y, z\}$ e consideriamo $\langle S \to \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$ ordinato puntualmente, *e con tutte le funzioni f tali che $f(v) = \varnothing$ per qualche $v \in S$ identificate tra loro.*

Siano $f, g \in (S \to P)$ date da:

$$f = [x \mapsto \{2, 3\}, y \mapsto \{1\}, z \mapsto \{5, 6\}],$$
$$g = [x \mapsto \{2\}, y \mapsto \{3\}, z \mapsto \{6, 7\}].$$

Allora

$$f \vee g = [x \mapsto \{2, 3\}, y \mapsto \{1, 3\}, z \mapsto \{5, 6, 7\}],$$

GI cartesiana: esempio

Prendiamo il reticolo $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e l'insieme $S = \{x, y, z\}$ e consideriamo $\langle S \to \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$ ordinato puntualmente, *e con tutte le funzioni* f *tali che* $f(v) = \emptyset$ *per qualche* $v \in S$ *identificate tra loro.*

Siano $f, g \in (S \to P)$ date da:

$$f = [x \mapsto \{2,3\}, y \mapsto \{1\}, z \mapsto \{5,6\}],$$
$$g = [x \mapsto \{2\}, y \mapsto \{3\}, z \mapsto \{6,7\}].$$

Allora

$$f \vee g = [x \mapsto \{2,3\}, y \mapsto \{1,3\}, z \mapsto \{5,6,7\}],$$
$$f \wedge g = [x \mapsto \emptyset, y \mapsto \emptyset, z \mapsto \emptyset].$$

GI cartesiana: motivazione

Prendiamo il dominio delle proprietà degli ambienti $\langle \wp(Env); \subseteq \rangle$, dove $Env = Var \to \mathbb{Z}$.

Se applichiamo l'astrazione cartesiana passiamo al dominio $\langle Var \to \wp(\mathbb{Z}); \leq \rangle$.

Gli elementi del nuovo dominio associano ad ogni variabile una proprietà dei valori di quella variabile ($\wp(\mathbb{Z})$), dimenticando le *relazioni* tra i valori delle variabili.

Questa astrazione porta ad analisi di tipo *non relazionale*.

GI cartesiana: esempio

Prendiamo

$$C = \{[x \mapsto 1, y \mapsto 3], [x \mapsto 3, y \mapsto 1]\}.$$

Avremo

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= [x \mapsto \{1,3\}, y \mapsto \{1,3\}] \\ \gamma(\alpha(C)) &= \{[x \mapsto 1, y \mapsto 1], [x \mapsto 1, y \mapsto 3], \\ &\qquad [x \mapsto 3, y \mapsto 1], [x \mapsto 3, y \mapsto 3]\}. \end{aligned}$$

Notiamo che da C è possibile dedurre che $x + y = 4$, mentre questa informazione è persa in $\gamma(\alpha(C))$.

GC per componenti

Supponiamo di avere n domini concreti $C_1, \ldots, C_n$ e n domini astratti $A_1, \ldots, A_n$ collegati tramite connessioni di Galois

$$\langle C_i; \leq \rangle \underset{\alpha_i}{\overset{\gamma_i}{\leftrightarrows}} \langle A_i; \sqsubseteq \rangle \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Avremo allora

$$\langle C_1 \times \cdots \times C_n; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle A_1 \times \cdots \times A_n; \sqsubseteq \rangle$$

con

$$\alpha(c_1, \ldots, c_n) = (\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n))$$
$$\gamma(a_1, \ldots, a_n) = (\gamma_1(a_1), \ldots, \gamma_n(a_n)).$$

GC per componenti: esempio

Consideriamo il dominio concreto

$$\langle \wp(Env) \times \cdots \times \wp(Env); \subseteq \rangle.$$

Scelta una astrazione per il dominio delle proprietà degli ambienti:

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\alpha'}{\overset{\gamma'}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle$$

possiamo trasformarla in una astrazione vettoriale

$$\langle \wp(Env) \times \cdots \times \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle A \times \cdots \times A; \sqsubseteq \rangle$$

semplicemente applicando α' e γ' ad ogni elemento del vettore.

GC per componenti: funzioni

Sia S un insieme e $\langle P; \leq \rangle$ un reticolo completo.
Supponiamo di avere una astrazione di P:

$$\langle P; \leq \rangle \underset{\alpha'}{\overset{\gamma'}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle.$$

Possiamo ottenere

$$\langle S \to P; \leq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle S \to A; \sqsubseteq \rangle$$

definendo

$$\alpha(f)(x) = \alpha'(x)$$
$$\gamma(g)(x) = \gamma'(x).$$

Composizione di GI/GC

Se

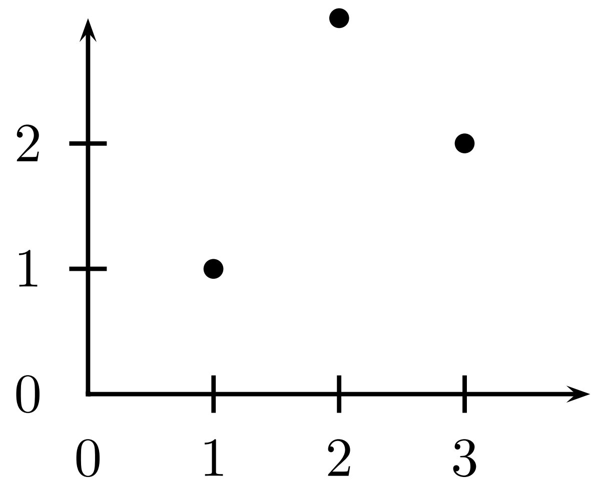
$$\langle A_1; \leq_1 \rangle \overset{\gamma_1}{\underset{\alpha_1}{\leftrightarrows}} \langle A_2; \leq_2 \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle A_2; \leq_2 \rangle \overset{\gamma_2}{\underset{\alpha_2}{\leftrightarrows}} \langle A_3; \leq_3 \rangle$$

Allora

$$\langle A_1; \leq_1 \rangle \overset{\gamma_1 \circ \gamma_2}{\underset{\alpha_2 \circ \alpha_1}{\leftrightarrows}} \langle A_3; \leq_3 \rangle.$$

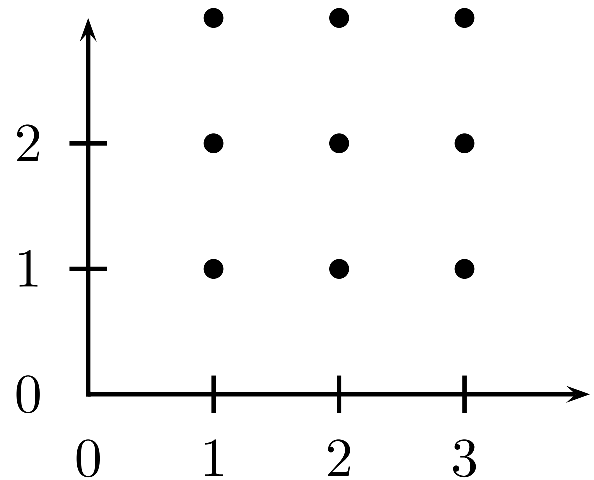
Se entrambe sono GI, anche la composizione lo è.

Composizione di GI: esempio



Prendiamo $P \in \wp(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ come in figura.

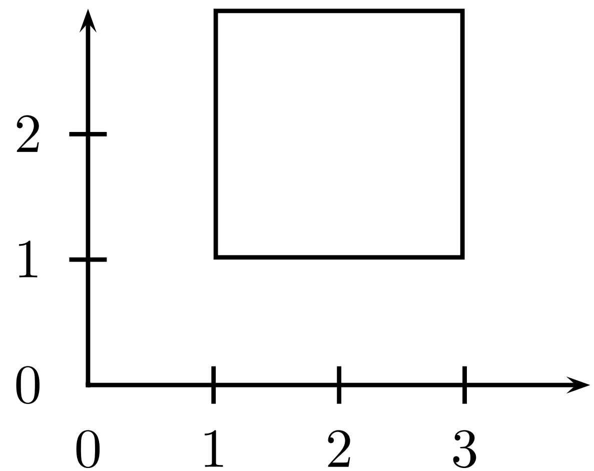
Composizione di GI: esempio



Prendiamo $P \in \wp(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ come in figura.

Applichiamo l'astrazione cartesiana.

Composizione di GI: esempio



Prendiamo $P \in \wp(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ come in figura.

Applichiamo l'astrazione cartesiana.

Quindi l'astrazione degli intervalli su ogni componente.

Composizione di GI/GC: esempio

Consideriamo la collecting semantics del nostro linguaggio di esempio. Scegliamo una astrazione per le proprietà dei valori delle variabili (segno, intervalli, ...)

$$\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle \underset{\alpha'}{\overset{\gamma'}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle$$

Quindi passiamo ad una astrazione (non relazionale) delle proprietà degli ambienti componendo una astrazione cartesiana e una astrazione per componenti (su funzioni):

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle Var \rightarrow \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \langle Var \rightarrow A; \sqsubseteq \rangle.$$

Composizione di GI/GC: esempio

L'astrazione complessiva

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Var \to A; \sqsubseteq \rangle$$

è data da

$$(\alpha(R))(x) = (\alpha_2(\alpha_1(R)))(x) = \alpha'(\{\, \rho(x) \mid \rho \in R \,\})$$
$$\gamma(r) = \gamma_1(\gamma_2(r)) = \{\, \rho \mid \forall x \in Var,\ \rho(x) \in \gamma'(r(x)) \,\}.$$

Composizione di GI/GC: esempio

Per esempio, usiamo il segno come astrazione delle proprietà dei valori.
Se

$$R = \{\, [x \mapsto -1, y \mapsto 2], [x \mapsto -5, y \mapsto -1] \,\}$$

allora

$$\begin{aligned}
\alpha(R) &= \alpha_2(\alpha_1(R)) \\
&= \alpha_2([x \mapsto \{-1, -5\}, y \mapsto \{-1, 2\}]) \\
&= [x \mapsto \alpha'(\{-1, -5\}), y \mapsto \alpha'(\{-1, 2\})] \\
&= [x \mapsto \leq 0, y \mapsto \top].
\end{aligned}$$

Composizione di GI/GC: esempio

Stesso esempio, ma usando gli intervalli come astrazione delle proprietà dei valori.

$$\begin{aligned}
\alpha(R) &= \alpha_2(\alpha_1(R)) \\
&= \alpha_2([x \mapsto \{-1, -5\}, y \mapsto \{-1, 2\}]) \\
&= [x \mapsto \alpha'(\{-1, -5\}), y \mapsto \alpha'(\{-1, 2\})] \\
&= [x \mapsto [-1, -5], y \mapsto [-1, 2]].
\end{aligned}$$

Abstract Interpretation

Consideriamo un programma $P\colon Addr \to Instr$, con $Addr = \{1, \ldots, N\}$.

La collecting semantics di P, è la più piccola soluzione μF dell'equazione

$$\underline{C} = F(\underline{C})$$

dove $F\colon \wp(Env)^N \to \wp(Env)^N$ è una funzione ottenuta da P come visto precedentemente e X^N è l'abbreviazione di

$$\underbrace{X \times \cdots \times X}_{N \text{ volte}}.$$

Abstract Interpretation

Per realizzare una interpretazione astratta dobbiamo definire una astrazione

$$\langle \wp(Env)^N; \subseteq \rangle \underset{\underline{\alpha}}{\overset{\underline{\gamma}}{\leftrightarrows}} \langle \mathcal{A}^N; \sqsubseteq \rangle$$

e una funzione $F^\sharp \colon \mathcal{A}^N \to \mathcal{A}^N$ tale che la più piccola soluzione $\mu F^\sharp$ dell'equazione

$$\underline{A} = F^\sharp(\underline{A})$$

Sia tale che

$$\underline{\alpha}(\mu F) \sqsubseteq \mu F^\sharp \iff \mu F \subseteq \underline{\gamma}(\mu F^\sharp).$$

Abstract Interpretation

Si dimostra che una condizione sufficiente affinché sia verificata la relazione tra μF e $\mu F^\sharp$ è che

$$\underline{\alpha}(F(\underline{C})) \sqsubseteq F^\sharp(\underline{\alpha}(\underline{C}))$$

per ogni $\underline{C} \in \wp(Env)^N$ oppure, equivalentemente,

$$F(\underline{\gamma}(\underline{A})) \subseteq \underline{\gamma}(F^\sharp(\underline{A}))$$

per ogni $\underline{A} \in \mathcal{A}^N$.

Abstract Interpretation

Graficamente:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr, "F^\sharp"] & & \underline{A'} \\
& & \rotatebox{90}{$\sqsubseteq$} \\
\underline{C} \arrow[uu, "\underline{\alpha}"] \arrow[rr, "F"] & & \underline{C'} \arrow[u, "\underline{\alpha}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[dd, "\underline{\gamma}"'] \arrow[rr, "F^\sharp"] & & \underline{A'} \arrow[d, "\underline{\gamma}"] \\
& & \rotatebox{90}{$\subseteq$} \\
\underline{C} \arrow[rr, "F"] & & \underline{C'}
\end{tikzcd}
$$

Ad ogni applicazione di $F^\sharp$ c’è perdita di precisione se troviamo $\sqsubset$ o $\subset$.

Abstract Interpretation

Per esempio, prendiamo $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e $F\colon \wp(\mathbb{Z}) \to \wp(\mathbb{Z})$ data da

$$F(A) = \{\, n + 2 \mid n \in A \,\}.$$

Come dominio astratto scegliamo il dominio dei segni $\langle S; \sqsubseteq \rangle$, con concretizzazione:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } x = \bot, \\ \{0\} & \text{se } x = 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0 \,\} & \text{se } x = \leq 0, \\ \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \,\} & \text{se } x = \geq 0, \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = \top. \end{cases}$$

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp \colon S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\bot$	
$\top$	
≥ 0	
0	
≤ 0	

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp \colon S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\perp$	$\perp$
$\top$	
≥ 0	
0	
≤ 0	

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp : S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$
≥ 0	
0	
≤ 0	

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp \colon S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$
≥ 0	≥ 0
0	
≤ 0	

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp \colon S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$
≥ 0	≥ 0
0	≥ 0
≤ 0	

Abstract Interpretation

Definiamo $F^\sharp : S \to S$ tale che

$$F(\gamma(a)) \subseteq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in S$. Poichè più piccolo vuol dire più preciso, vogliamo che $F^\sharp(a)$ sia il più piccolo possibile tra quelli che verificano disuguaglianza precedente.

a	$F^\sharp(a)$
$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$
≥ 0	≥ 0
0	≥ 0
≤ 0	$\top$

AI: best abstraction

In generale esistono più scelte possibili per $F^\sharp$ che rispettano la disuguaglianza.

Per esempio, $F^\sharp(a) = \top$ per ogni a la verifica sicuramente.

Tra tutte preferiamo la più piccola nell'ordinamento puntuale tra funzioni.

Questa esiste sempre ed è data da

$$F^b(a) = \alpha(F(\gamma(a))),$$

per ogni a nel dominio astratto.

AI: best abstraction

Siano $\langle C; \leq \rangle$ il dominio concreto, $\langle A; \sqsubseteq \rangle$ il dominio astratto e $F : C \to A$. Mostriamo che $F^b = \alpha \circ F \circ \gamma$ è la più piccola funzione $F^\sharp$ in $\langle A \to A; \sqsubseteq \rangle$ a verificare

$$F(\gamma(a)) \leq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in A$.

AI: best abstraction

Siano $\langle C; \leq \rangle$ il dominio concreto, $\langle A; \sqsubseteq \rangle$ il dominio astratto e $F : C \to A$. Mostriamo che $F^b = \alpha \circ F \circ \gamma$ è la più piccola funzione $F^\sharp$ in $\langle A \to A; \sqsubseteq \rangle$ a verificare

$$F(\gamma(a)) \leq \gamma(F^\sharp(a))$$

per ogni $a \in A$.
Infatti F^b verifica la disuguaglianza:

$$\gamma(F^b(a)) = \gamma(\alpha(F(\gamma(a)))) \geq F(\gamma(a))$$

e se $F^\sharp$ la verifica allora $F^b \sqsubseteq F^\sharp$:

$$F(\gamma(a)) \leq \gamma(F^\sharp(a)) \implies F^b = \alpha(F(\gamma(a))) \sqsubseteq F^\sharp(a).$$

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{ n + 2 \mid n \in A \}$ dell'esempio precedente:

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{\, n+2 \mid n \in A \,\}$ dell'esempio precedente:

$$F^b(\top) = \alpha(F(\gamma(\top))) = \alpha(F(\mathbb{Z})) = \alpha(\mathbb{Z}) = \top,$$

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{ n + 2 \mid n \in A \}$ dell'esempio precedente:

$$F^b(\top) = \alpha(F(\gamma(\top))) = \alpha(F(\mathbb{Z})) = \alpha(\mathbb{Z}) = \top,$$

$$F^b(\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{\, n + 2 \mid n \in A \,\}$ dell'esempio precedente:

$$F^b(\top) = \alpha(F(\gamma(\top))) = \alpha(F(\mathbb{Z})) = \alpha(\mathbb{Z}) = \top,$$

$$F^b(\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

$$F^b(0) = \alpha(F(\gamma(0))) = \alpha(F(\{0\})) = \alpha(\{2\}) = \geq 0,$$

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{\, n+2 \mid n \in A \,\}$ dell'esempio precedente:

$$F^b(\top) = \alpha(F(\gamma(\top))) = \alpha(F(\mathbb{Z})) = \alpha(\mathbb{Z}) = \top,$$

$$F^b(\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

$$F^b(0) = \alpha(F(\gamma(0))) = \alpha(F(\{0\})) = \alpha(\{2\}) = \geq 0,$$

$$F^b(\geq 0) = \alpha(F(\gamma(\geq 0))) = \alpha(F(\{\, n \mid n \geq 0 \,\})) =$$
$$\alpha(\{\, n \mid n \geq 2 \,\}) = \geq 0$$

AI: best abstraction

Possiamo calcolare esplicitamente la migliore approssimazione di $F(A) = \{\, n + 2 \mid n \in A \,\}$ dell'esempio precedente:

$$F^b(\top) = \alpha(F(\gamma(\top))) = \alpha(F(\mathbb{Z})) = \alpha(\mathbb{Z}) = \top,$$

$$F^b(\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

$$F^b(0) = \alpha(F(\gamma(0))) = \alpha(F(\{0\})) = \alpha(\{2\}) = \geq 0,$$

$$F^b(\geq 0) = \alpha(F(\gamma(\geq 0))) = \alpha(F(\{\, n \mid n \geq 0 \,\})) =$$
$$\alpha(\{\, n \mid n \geq 2 \,\}) = \geq 0$$

$$F^b(\leq 0) = \alpha(F(\gamma(\leq 0))) = \alpha(F(\{\, n \mid n \leq 0 \,\})) =$$
$$\alpha(\{\, n \mid n \leq 2 \,\}) = \top.$$

AI: best abstraction

Possiamo adottare la stessa tecnica anche se dominio e codominio di F sono diversi.

Siano $\langle C_1; \leq_1 \rangle$ e $\langle C_2; \leq_2 \rangle$ due domini concreti e $F \colon C_1 \to C_2$.

Siano $\langle A_1; \sqsubseteq_1 \rangle$ e $\langle A_2; \sqsubseteq_2 \rangle$ due domini astratti con

$$\langle C_1; \leq_1 \rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle A_1; \sqsubseteq_1 \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle C_2; \leq_2 \rangle \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \langle A_2; \sqsubseteq_2 \rangle.$$

Allora la migliore approssimazione di F è

$$F^b = \alpha_2 \circ F \circ \gamma_1.$$

AI: best abstraction

Per esempio, prendiamo $\langle \wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ e $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ con

$$F\colon (\wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z})) \to \wp(\mathbb{Z})$$

data da

$$F(A, B) = \{\, n + m \mid n \in A,\ m \in B \,\}.$$

Come dominio astratto corrispondente a $\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ scegliamo il dominio della parità $\langle P; \sqsubseteq \rangle$.

Astraiamo $\langle \wp(\mathbb{Z}) \times \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle$ per componenti, usando il dominio della parità per entrambe le componenti. Il dominio astratto sarà $\langle P \times P; \sqsubseteq \rangle$.

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing, \varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$				
p				
d				
$\bot$				$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing, \varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \top & p & d & \bot \\
\hline
\top & & & & \bot \\
p & & & & \bot \\
d & & & & \bot \\
\bot & \bot & \bot & \bot & \bot
\end{array}$$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\emptyset, \emptyset)) = \alpha(\emptyset) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$			$\bot$
p				$\bot$
d				$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing, \varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$			$\bot$
d	$\top$			$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing, \varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$	p		$\bot$
d	$\top$			$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a,b)$ per ogni $(a,b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot,\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot),\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing,\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$	p	d	$\bot$
d	$\top$			$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a,b)$ per ogni $(a,b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot,\bot) = \alpha(F(\gamma(\bot),\gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing,\varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$	p	d	$\bot$
d	$\top$	d		$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI: best abstraction

Dobbiamo calcolare $F^b(a, b)$ per ogni $(a, b) \in P$.

Per esempio:

$$F^b(\bot, \bot) = \alpha(F(\gamma(\bot), \gamma(\bot))) = \alpha(F(\varnothing, \varnothing)) = \alpha(\varnothing) = \bot,$$

Avremo:

	$\top$	p	d	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
p	$\top$	p	d	$\bot$
d	$\top$	d	p	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

AI non relazionale

Scegliamo una astrazione per le proprietà dei valori delle variabili

$$\langle \wp(\mathbb{Z}); \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle A; \sqsubseteq \rangle.$$

Otteniamo la corrispondente astrazione non relazionale delle proprietà degli ambienti

$$\langle \wp(Env); \subseteq \rangle \underset{\dot{\alpha}}{\overset{\dot{\gamma}}{\leftrightarrows}} \langle Var \to A; \sqsubseteq \rangle$$

e la corrispondente astrazione per i vettori di contesti

$$\langle \wp(Env)^N; \subseteq \rangle \underset{\underline{\alpha}}{\overset{\underline{\gamma}}{\leftrightarrows}} \langle (Var \to A)^N; \sqsubseteq \rangle.$$

AI non relazionale

Chiameremo $\sqcup$ e $\sqcap$ rispettivamente il join e il meet nel dominio astratto $\langle A; \sqsubseteq \rangle$.

Useremo i simboli $\dot{\sqcup}$ e $\dot{\sqcap}$ per le operazioni di join e meet sia in $\langle Var \to A; \sqsubseteq \rangle$ che in $\langle (Var \to A)^N; \sqsubseteq \rangle$, ricordando che nel primo caso le operazioni vanno eseguite argomento per argomento e nel secondo componente per componente.

Useremo i simboli $\dot{\perp}$ e $\dot{\top}$ per denotare il minimo e il massimo (rispettivamente) sia di $\langle Var \to A; \sqsubseteq \rangle$ che di $\langle (Var \to A)^N; \sqsubseteq \rangle$, ricordando che nel primo caso si tratta di funzioni e nel secondo di vettori.

AI non relazionale

Dobbiamo trovare le interpretazioni per gli operatori della nostra semantica.

Consideriamo $\cup\colon (\wp(Env) \times \wp(Env)) \to \wp(Env)$.

Presi $r_1, r_2 \in (Var \to A)$ la migliore approssimazione di $\cup$ sarà:

$$\begin{aligned} r_1 \cup^\sharp r_2 &= \dot\alpha(\dot\gamma(r_1) \cup \dot\gamma(r_2)) \\ &= \dot\alpha(\dot\gamma(r_1)) \,\dot\sqcup\, \dot\alpha(\dot\gamma(r_2)) && (\dot\alpha \text{ preserva i join}) \\ &= r_1 \,\dot\sqcup\, r_2 && \text{(Inserzione di Galois).} \end{aligned}$$

Quindi l'unione concreta corrisponde all'estremo superiore astratto (come volevamo).

AI non relazionale

Consideriamo $\cap$: $(\wp(Env) \times \wp(Env)) \to \wp(Env)$.

Presi $r_1, r_2 \in (Var \to A)$ la migliore approssimazione di $\cap$ sarà:

$$
\begin{aligned}
r_1 \cap^\sharp r_2 &= \dot\alpha(\dot\gamma(r_1) \cap \dot\gamma(r_2)) \\
&= \dot\alpha(\dot\gamma(r_1 \mathbin{\dot\sqcap} r_2)) && (\dot\gamma \text{ preserva i meet}) \\
&= r_1 \mathbin{\dot\sqcap} r_2 && (\text{Inserzione di Galois}).
\end{aligned}
$$

Quindi l'intersezione concreta corrisponde all'estremo inferiore astratto (come volevamo).