LA TRASMISSIONE DEL CALORE PER CONDUZIONE

1. Introduzione

La conduzione è il modo di trasmissione del calore mediante il quale il calore si trasferisce da regioni calde a regioni fredde di un solido o di un fluido in quiete. Essa è l'unica modalità con la quale si trasmette energia per effetto della differenza di temperatura nei corpi solidi ed opachi. La trasmissione del calore per conduzione avviene per differenti meccanismi diffusivi microscopici quali la diffusione di molecole, di elettroni e le vibrazioni nella struttura cristallina. Questi meccanismi di trasporto di energia a livello microscopico risultano in un processo diffusivo macroscopico la cui descrizione matematica avviene mediante la **legge di Fourier**.

2. Il flusso termico

La *legge di Fourier*, basata su osservazioni sperimentali, fornisce la relazione che lega il flusso termico al gradiente di temperatura. Per un solido isotropo (cioè un materiale nel quale la conducibilità termica è indipendente dalla direzione) la legge di Fourier ha la seguente forma:

$$\vec{q}(\vec{r},t) = -\lambda(\vec{r},T)\vec{\nabla}T(\vec{r},t) \qquad [\mathrm{W/m^2}] \tag{1}$$

dove: il gradiente di temperatura è un vettore normale alla superficie isoterma, il vettore flusso termico $\vec{q}$ rappresenta la potenza termica che per unità di tempo e di area attraversa la superficie isoterma nella direzione delle temperature decrescenti, e λ è la conducibilità termica del materiale (grandezza scalare positiva).

3. L'equazione della conduzione

Il punto di partenza dell'analisi di un problema di conduzione del calore è l'equazione di bilancio dell'energia ricavata per un volume di controllo differenziale. Nel caso di un solido isotropo con generazione di calore dentro il corpo si ottiene la seguente forma differenziale dell'equazione generale della conduzione:

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{\nabla}\circ\left[\lambda(\vec{r},T)\vec{\nabla}T(\vec{r},t)\right] + g(\vec{r},t)} \qquad (\textbf{equazione della conduzione}) \tag{2}$$

Per problemi di conduzione per i quali non c'è conversione di energia interna e la conducibilità termica può essere assunta costante, il bilancio dell'energia si semplifica nella:

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\nabla^2 T(\vec{r},t) \qquad (\textbf{equazione di Fourier}) \tag{3}$$

che prende il nome di equazione di Fourier o della diffusione. L'equazione della diffusione è un'equazione differenziale alle differenze parziali *di tipo parabolica* (nel tempo). Ciò significa che il campo di temperatura in un certo istante non è affetto dal valore del campo di temperatura negli istanti precedenti (la velocità di propagazione del campo di temperatura è infinita).

Per problemi di conduzione nello stato stazionario con conversione di energia interna e con conducibilità termica costante il bilancio dell'energia può essere scritto come:

$$\nabla^2 T(\vec{r},t) + \frac{g(\vec{r},t)}{\lambda} = 0 \qquad \textbf{(equazione di Poisson)} \tag{4}$$

e prende il nome di equazione di Poisson.

Per problemi di conduzione nello stato stazionario senza conversione di energia interna e con conducibilità termica costante l'equazione di bilancio dell'energia assume la seguente forma:

$$\nabla^2 T(\vec{r},t) = 0 \qquad \textbf{(equazione di Laplace)} \tag{5}$$

e prende il nome di equazione di Laplace. Questa equazione è analoga a quella di un campo potenziale elettrico e questa analogia può, in alcuni casi, essere utilizzata per ottenere la soluzione di problemi di conduzione.

4. Condizioni al contorno

L'analisi di un problema della conduzione coinvolge la soluzione dell'appropriata forma dell'equazione di bilancio dell'energia soggetta alle prescritte condizioni al contorno ed iniziali.

4.1 Condizione al contorno del primo tipo (o condizione di Dirichlet)

In questo caso è nota la distribuzione di temperatura sulla superficie *S* del dominio *V* sul quale andare ad integrare l'equazione della conduzione, cioè:

$$T = f(\vec{r},t) \qquad \vec{r} \in S \tag{6}$$

dove la prescritta temperatura superficiale $f(\vec{r},t)$ è in generale una funzione della posizione all'interno del dominio e del tempo. Nel caso particolare in cui

$$T = 0 \qquad \vec{r} \in S \tag{7}$$

si parla di condizione al contorno del primo tipo *omogenea*.

4.2 Condizione al contorno del secondo tipo (o condizione di Neumann)

Questo è il caso in cui è specificato il valore del flusso termico sulla superficie, cioè:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(\vec{r},t) \qquad \vec{r} \in S \tag{8}$$

dove con $\partial T / \partial n$ si è indicato il gradiente di temperatura valutato nella direzione normale (uscente) alla superficie. Nel caso particolare di flusso termico nullo sul contorno si ha:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad \vec{r} \in S \tag{9}$$

e si parla di condizione al contorno del secondo tipo *omogenea*.

4.3 Condizione al contorno del terzo tipo (o condizione di Robbins)

E' una condizione al contorno di tipo convettiva (si trascura l'eventuale termine dovuto all'irraggiamento o lo si linearizza), cioè:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \alpha T_\infty(\vec{r}, t) \qquad \vec{r} \in S \tag{10}$$

Nel caso particolare in cui

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = 0 \qquad \vec{r} \in S \tag{11}$$

si parla di condizione al contorno del terzo tipo *omogenea*. Ovviamente, le condizioni al contorno del primo e del secondo tipo possono essere ottenute come casi particolari della condizione al contorno del terzo tipo. Per esempio, ponendo in prossimità del contorno $\lambda = 0$ e $T_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$ si ottiene una condizione del primo tipo. Similmente, ponendo $\alpha T_\infty(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$ al secondo membro e ponendo $\alpha = 0$ al primo membro si ottiene una condizione del secondo tipo.

4.4 Condizione attraverso un'interfaccia solido-solido (o del quarto tipo)

Quando due materiali solidi , aventi differenti conducibilità termiche, sono in perfetto contatto termico tra loro attraverso una superficie di interfaccia, le condizioni da imporre in corrispondenza dell'interfaccia sono:

$$T_1(\vec{r}, t) = T_2(\vec{r}, t) \qquad \vec{r} \in S_{\text{int}}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \qquad \vec{r} \in S_{\text{int}}$$

Ovviamente non sempre il contatto termico può essere considerato perfetto; in questo caso occorre introdurre una resistenza termica di contatto (o di interfaccia). Le condizioni da imporre all'interfaccia sono ancora quelle di uguaglianza dei flussi ma non di uguaglianza della temperatura; il salto di temperatura nel passaggio, attraverso l'interfaccia, da un corpo ad un altro dipenderà proprio dal valore di questa resistenza termica di contatto.

La presenza di termini non omogenei nelle condizioni al contorno può dare problemi di convergenza nella risoluzione dell'equazione della conduzione. Perciò, dove possibile, è preferibile trasformare le condizioni al contorno non omogenee in omogenee.

5. Conduzione bidimensionale in regime stazionario

In ogni sistema bidimensionale, nel quale del calore viene trasmesso da una superficie a temperatura costante T_1 ad un'altra superficie a temperatura costante T_2 di un corpo solido, la potenza termica scambiata dipende solo dalla differenza di temperatura (T_1-T_2), dalla conducibilità termica λ del mezzo attraverso il quale avviene lo scambio termico e dalla forma geometrica del sistema. In particolare, la potenza termica scambiata tra queste due superfici può essere espressa come:

$$W_t = \lambda\, S\left(T_1 - T_2\right)$$

dove S, detto *fattore di forma conduttivo*, dipende solo dalla geometria del corpo. Esso ha le dimensioni di una lunghezza e la sua espressione analitica è generalmente riportata nei testi di trasmissione del calore per differenti configurazioni geometriche che possono incontrarsi nella pratica.

6. Formulazione a parametri concentrati

In generale in un problema di conduzione del calore la temperatura all'interno del mezzo solido varierà sia con la posizione che con il tempo. Esistono però molte applicazioni ingegneristiche nelle quali la temperatura può essere pensata uniforme dentro il corpo e quindi la temperatura del corpo può essere considerata funzione solo del tempo. Tale formulazione detta a *parametri concentrati* fornisce una grande semplificazione dell'analisi di problemi di conduzione del calore non stazionari.

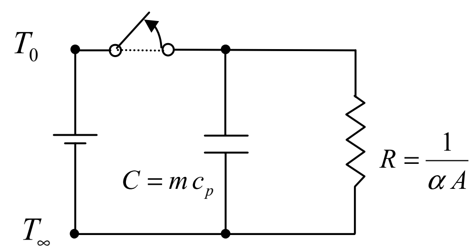
Consideriamo un corpo di forma arbitraria di massa m, volume V, area della superficie esterna A, densità ρ e calore specifico c_p, inizialmente ad una temperatura uniforme T_0. All'istante $t = 0$ il corpo è posto in un ambiente a temperatura T_∞ ed avviene trasmissione del calore tra il corpo e l'ambiente, con un coefficiente di scambio termico α. Il bilancio dell'energia del solido per un intervallo di tempo infinitesimo dt fornisce:

$$m\, c_p\, dT = \alpha\, A\left(T_\infty - T\right) dt \qquad (12)$$

La soluzione del problema è:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-t/\tau}, \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{m\, c_p}{\alpha\, A} = R\, C \qquad (13)$$

Dalla formula precedente si nota che tanto più è piccola la capacità termica, o la resistenza termica esterna, tanto più velocemente la temperatura del corpo tende a raggiungere la temperatura esterna. Il circuito elettrico equivalente del sistema termico è quello mostrato in figura.



La refrigerazione del corpo segue lo stesso andamento della scarica del condensatore del circuito elettrico equivalente che avviene a partire dall'istante di apertura dell'interruttore.

Al fine di stabilire un criterio per un intervallo di validità di un tale metodo, consideriamo la definizione del numero di Biot come:

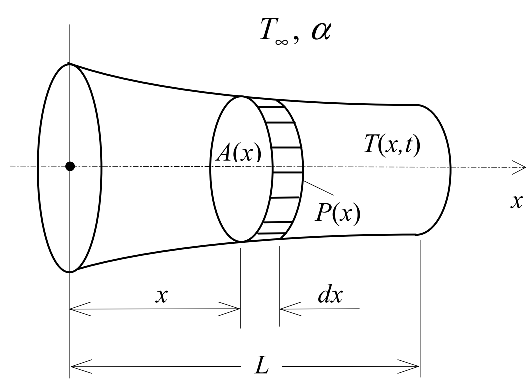
$$Bi = \frac{\alpha L_c}{\lambda}, \quad \text{dove} \quad L_c \equiv \frac{V}{A} \tag{14}$$

che rappresenta il rapporto tra la resistenza termica conduttiva dentro il corpo e la resistenza convettiva sulla superficie del corpo. Si può dimostrare che l'analisi a parametri concentrati è valida se la distribuzione di temperatura dentro il solido rimane sufficientemente uniforme durante il transitorio e cioè se la resistenza termica conduttiva dentro il solido risulta bassa rispetto a quella convettiva sulla superficie. Da ciò deriva che l'analisi a parametri concentrati è valida solo per piccoli valori del numero di Biot. Per esempio, la soluzione analitica esatta di problemi di conduzione transitoria per solidi nella forma di parete piana, cilindri o sfere, soggetti a refrigerazione (o riscaldamento) convettiva mostrano che per Bi<0.1 la variazione di temperatura dentro il solido durante il transitorio è minore del 5% rispetto alla differenza tra la temperatura del solido e la temperatura dell'ambiente esterno. Perciò si può concludere che l'analisi a parametri concentrati è applicabile se

$$Bi \leq 0.1 \tag{15}$$

Piccoli corpi (cioè corpi con piccolo valore di L_c) con elevata conducibilità termica sono dei buoni candidati per l'applicabilità di questo tipo di approccio.

E' possibile eseguire, in alcuni casi, un'analisi a parametri concentrati di tipo parziale. Per esempio, se il gradiente di temperatura in un solido è molto alto lungo la direzione x, rispetto al gradiente lungo le altre due direzioni, è possibile considerare la temperatura funzione solo della coordinata x e del tempo. Per illustrare come cambia in questo caso l'approccio a parametri concentrati consideriamo il solido mostrato in figura, nel quale si è supposto che il gradiente di temperatura sia grande lungo la direzione x e sia piccolo nel piano y-z. Supponiamo inoltre che il solido dissipi calore per convezione dalla superficie laterale verso l'ambiente a temperatura T_∞ con un coefficiente di scambio termico α.



Dal bilancio di energia per un disco di spessore *dx* in corrispondenza alla posizione assiale *x* si ottiene la seguente espressione:

$$\rho\, c_p\, \Delta x\, A(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial (A\,q)}{\partial x} \Delta x + \alpha\, P(x) \Delta x \left[T_\infty - T(x,t)\right]$$

dove il flusso termico q è dato da:

$$q = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

Se si introduce la nuova variabile $\theta(x,t)$, definita come

$$\theta(x,t) \equiv T(x,t) - T_\infty$$

e si sostituisce l'espressione del flusso termico nell'equazione di bilancio dell'energia si ottiene:

$$\frac{\rho\, c_p}{\lambda} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] - \frac{\alpha\, P(x)}{\lambda\, A(x)} \theta(x,t)$$

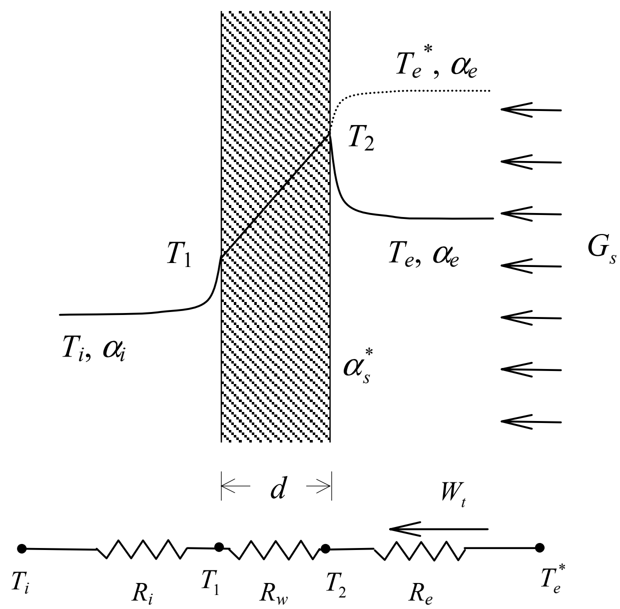
Per il caso stazionario l'equazione precedente si semplifica nella

$$\frac{d}{d\,x}\left[A(x) \frac{d\,\theta}{d\,x}\right] - \frac{\alpha\, P(x)}{\lambda} \theta(x) = 0$$

che rappresenta la tipica equazione differenziale per alette di sezione trasversale variabile.

ESERCIZIO N. 1

Si consideri un fabbricato avente una parete perimetrale di spessore 40 cm e di area pari a 120 m^2, la cui conducibilità termica vale 1 W/(m K). La temperatura dell'ambiente interno al fabbricato è mantenuta a 23 °C da un impianto di condizionamento ed il coefficiente di scambio termico convettivo, comprensivo del contributo radiativo, vale 8 W/(m^2 K). La parte esterna della parete è lambita da aria alla temperatura di 35 °C ed il coefficiente di scambio termico convettivo, comprensivo del contributo radiativo verso il cielo, vale 25 W/(m^2 K). La parete esterna è irraggiata dal sole e l'irradiazione solare risulta pari a 500 W/m^2, mentre il coefficiente di assorbimento alla radiazione solare è 0.7. Si calcoli la temperatura esterna ed interna della parete nell'ipotesi che il sistema sia in condizioni stazionarie.



Soluzione

Solo la frazione α_s^* dell'energia solare incidente G_s viene assorbita dalla parete che supporremo opaca. In condizioni stazionarie, la potenza termica che per convezione ed irraggiamento viene scambiata con la superficie esterna della parete deve essere uguale alla potenza termica che per conduzione attraversa la parete:

$$G_s\,\alpha_s^*\,A + \alpha_e\,A\left(T_e - T_2\right) = \frac{\lambda_w}{d}\,A\left(T_2 - T_1\right) \;\Rightarrow\; G_s\,\alpha_s^*\,A + \frac{T_e - T_2}{R_e} = \frac{T_2 - T_1}{R_w}$$

dove con R_e ed R_w abbiamo indicato le resistenze termiche convettiva esterna e conduttiva attraverso la parete:

$$R_e \equiv \frac{1}{\alpha_e\,A} = 3.333{\cdot}10^{-4}\ \text{°C/W}\,; \qquad R_w \equiv \frac{d}{\lambda_w\,A} = 3.333{\cdot}10^{-3}\ \text{°C/W}$$

A sua volta, la potenza termica che per conduzione attraversa la parete deve essere uguale alla potenza termica scambiata per convezione attraverso la superficie interna:

$$\frac{\lambda_w}{d} A\left(T_2 - T_1\right) = \alpha_i\, A\left(T_1 - T_i\right) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{T_2 - T_1}{R_w} = \frac{T_1 - T_i}{R_i}$$

dove con R_i si è indicato la resistenza termica convettiva interna definita in modo del tutto analogo a quella esterna:

$$R_i \equiv \frac{1}{\alpha_i\, A} = 1.042 \cdot 10^{-3}\ \text{°C/W}$$

In questo modo si dispone di un sistema di due equazioni dal quale ricavare le due incognite T_1 e T_2:

$$\begin{cases} G_s\, \alpha_s^*\, A + \dfrac{T_e - T_2}{R_e} = \dfrac{T_2 - T_1}{R_w} \\ \dfrac{T_2 - T_1}{R_w} = \dfrac{T_1 - T_i}{R_i} \end{cases}$$

In realtà la determinazione delle due suddette temperature si semplifica se si introduce la cosiddetta *temperatura fittizia sole-aria*:

$$T_e^* \equiv T_e + \frac{\alpha_s^*\, G_s}{\alpha_e} = 49\ \text{°C}$$

e cioè quella temperatura che sostituita alla reale temperatura dell'aria esterna fa sì che l'effetto dell'irraggiamento sia conglobato nello scambio termico convettivo. Infatti, facendo uso della temperatura fittizia l'equazione di bilancio di energia attraverso la superficie esterna diventa:

$$\frac{T_e^* - T_2}{R_e} = \frac{T_2 - T_1}{R_w}$$

che è equivalente all'espressione che si sarebbe ottenuta nel caso avessimo tenuto conto solo della convezione esterna (senza irraggiamento solare), ma con una temperatura esterna uguale a quella fittizia.

Si noti che la temperatura fittizia cresce al crescere del coefficiente di assorbimento alla radiazione solare α_s^*. D'estate sarebbe bene che questo coefficiente di assorbimento fosse il più piccolo possibile; è questo il motivo per il quale nei palazzi di vetro generalmente questi sono altamente riflettenti. Si noti poi che la temperatura fittizia tende a diminuire all'aumentare del coefficiente di scambio termico convettivo esterno. A parità degli altri parametri, se c'è vento (alto α_e) la temperatura fittizia, e quindi la temperatura della parete esterna, risulta più bassa.

La potenza termica scambiata può essere determinata nel seguente modo:

$$W_t = \frac{T_e^* - T_i}{R_e + R_w + R_i} = 5522\ \text{W}$$

La temperatura sulla superficie interna della parete vale:

$$W_t = \frac{T_1 - T_i}{R_i} \;\Rightarrow\; T_1 = T_i + W_t\, R_i = 28.75 \text{ °C}$$

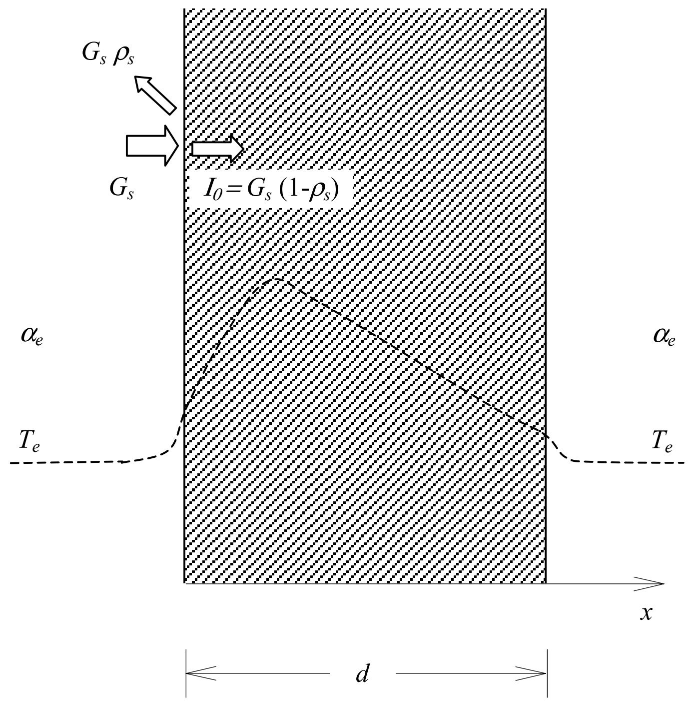
La temperatura sulla superficie esterna della parete vale:

$$W_t = \frac{T_e^* - T_2}{R_e} \;\Rightarrow\; T_2 = T_e^* - W_t\, R_e = 47.16 \text{ °C}$$

Come si nota, per effetto dell'irraggiamento solare, la temperatura della superficie, T_2, risulta relativamente più alta della temperatura dell'aria esterna per cui la parete cede calore per convezione verso l'esterno. Lo scambio termico globale corrisponde però all'assorbimento di calore da parte della parete.

ESERCIZIO N. 2

Si consideri una lastra di vetro di spessore d e conducibilità termica λ immersa in aria alla temperatura T_e. La lastra, irraggiata dal sole con un'intensità di irradiazione pari a G_s, ha un coefficiente di estinzione per assorbimento pari a μ ed un coefficiente di riflessione alla radiazione solare pari a ρ_s. Supponendo che lo scambio termico con l'aria avvenga solo per convezione con un coefficiente termico convettivo α_e, si determini l'andamento di temperatura all'interno della lastra di vetro.



Soluzione

Quando una radiazione di intensità I_0 passa attraverso uno strato di vetro di spessore d, l'assorbimento di energia raggiante in uno spessore infinitesimo dx è fornito dalla relazione:

$$dI_x = -\mu\, I_x\, dx$$

dove: I_x è l'intensità di radiazione alla distanza x;

μ è il coefficiente di estinzione per assorbimento o sezione d'urto.

Integrando questa equazione differenziale all'interno dello spessore x si ottiene:

$$I_x = I_0\, e^{-\mu x}, \quad \text{dove} \quad I_0 = G_s\,(1-\rho_s)$$

In questo caso, se si trascura il contributo dovuto alle riflessioni multiple, l'energia generata per unità di volume è data da

$$g(x) = -\frac{d\,I_x}{d\,x}$$

Ne discende che:

$$g(x) = -I_0\, \mu\, e^{-\mu x}$$

L'equazione della conduzione all'interno della parete è quella monodimensionale stazionaria con sorgente interna:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{I_0\, \mu\, e^{-\mu x}}{\lambda} = 0$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale risulta:

$$T(x) = -\frac{I_0\, e^{-\mu x}}{\mu\, \lambda} + C_1\, x + C_2$$

La soluzione particolare può essere determinata imponendo le condizioni al contorno del terzo tipo:

$$-\lambda \left.\frac{d\,T}{d\,x}\right|_{x=0} = \alpha_e \left[T_e - T(x=0)\right]$$

$$-\lambda \left.\frac{d\,T}{d\,x}\right|_{x=d} = \alpha_e \left[T(x=d) - T_e\right]$$

Risolvendo il precedente sistema di 2 equazioni nelle due incognite C_1 e C_2 si ottiene:

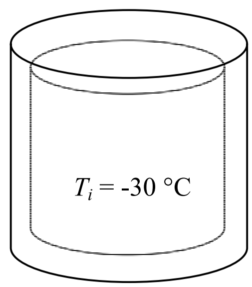
$$C_1 = -\frac{\frac{\alpha_e\, I_0}{\mu\, \lambda}\left(1 - e^{-\mu d}\right) + I_0\left(1 + e^{-\mu d}\right)}{2\lambda + \alpha_e\, d}$$

$$C_2 = T_e + \frac{I_0}{\mu\, \lambda} + \frac{I_0}{\alpha_e} + \frac{\lambda}{\alpha_e} C_1$$

L'andamento qualitativo della temperatura all'interno dello spessore di vetro è quello riportato in figura.

ESERCIZIO N. 3

Un recipiente contiene del fluido mantenuto alla temperatura di -30 °C, mentre la temperatura dell'aria esterna è pari a 25 °C ed il coefficiente di scambio termico convettivo tra parete ed aria è uguale a 5 W/(m^2 K). In condizioni stazionarie si è misurata una temperatura sulla parete esterna del serbatoio di 5 °C. Al fine di evitare che si abbia condensa sulla superficie esterna del serbatoio si vuole rivestire il serbatoio con uno strato di materiale isolante (λ = 0.05 W/(m K)) in modo che, nelle suddette condizioni interne ed esterne al serbatoio, la temperatura superficiale sia uguale a 18 °C. Calcolare lo spessore di isolante necessario nell'ipotesi che il coefficiente di scambio termico esterno rimanga invariato in presenza di isolante.



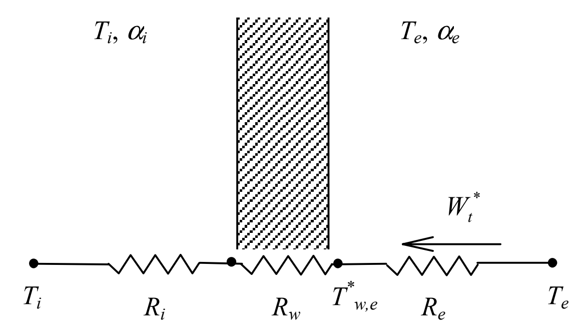
Soluzione

Nel caso di parete in assenza di isolante il circuito elettrico equivalente è quello mostrato in figura, dove le resistenze termiche valgono:

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i\, A}$$

$$R_w = \frac{s_w}{\lambda_w\, A}$$

$$R_e = \frac{1}{\alpha_e\, A}$$



La potenza termica scambiata in assenza di isolante, W_t^*, è data da:

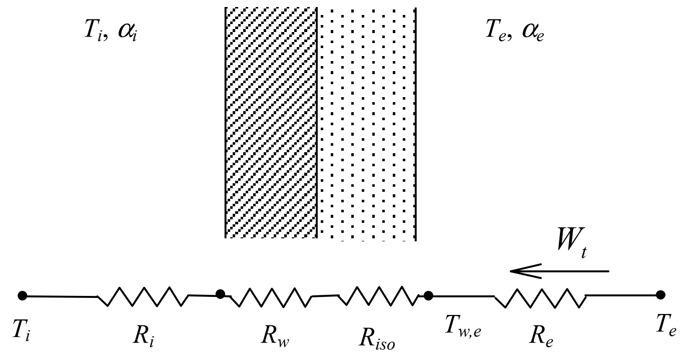
$$W_t^* = \frac{T^*_{w,e} - T_i}{R_i + R_w} = \frac{T_e - T^*_{w,e}}{R_e}$$

Pur essendo le resistenze termiche convettiva interna e conduttiva attraverso lo spessore della parete del recipiente incognite, la loro somma può però essere determinata dall'equazione precedente:

$$R_i + R_w = \frac{T^*_w - T_i}{T_e - T^*_w}\, R_e$$

Nel caso di presenza di isolante bisogna tener conto di una resistenza termica aggiuntiva.

$$W_t = \frac{T_{w,e} - T_i}{R_i + R_w + R_{iso}} = \frac{T_e - T_{w,e}}{R_e}$$



Dalla precedente relazione può essere ricavata la resistenza termica dell'isolante che vale:

$$R_{iso} = \frac{T_{w,e} - T_i}{T_e - T_{w,e}} R_e - \left(R_i + R_w\right) = \left[\frac{T_{w,e} - T_i}{T_e - T_{w,e}} - \frac{T_w^* - T_i}{T_e - T_w^*}\right] R_e$$

Una volta determinata questa grandezza è facile trovare lo spessore di isolante necessario per mantenere la temperatura della superficie esterna, $T_{w,e}$, a 18 °C. Infatti, essendo

$$R_{iso} = \frac{s_{iso}}{\lambda_{iso}\, A}$$

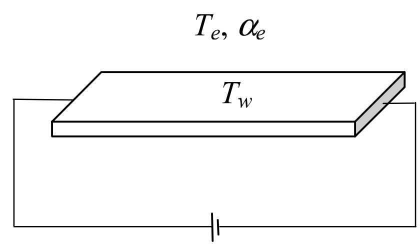
si ottiene:

$$s_{iso} = \frac{\lambda_{iso}}{\alpha_e} \left[\frac{T_{w,e} - T_i}{T_e - T_{w,e}} - \frac{T_w^* - T_i}{T_e - T_w^*}\right] = 0.086 \text{ m}$$

Ovviamente sarà difficile disporre di un isolante di spessore esattamente uguale a 8.6 cm; molto probabilmente occorrerà utilizzare un'isolante con spessore di 10 cm.

ESERCIZIO N. 4

Una prova effettuata su di un piccolo circuito elettrico in aria alla temperatura di 25 °C ha mostrato che esso si porta ad una temperatura di regime di 50 °C quando dissipa una potenza di 8 W; inoltre, esaminando la riduzione di temperatura dopo lo spegnimento, si è trovato che la sua costante di tempo è uguale a 500 s. Si supponga, a questo punto, che attraverso il circuito venga dissipata una potenza elettrica di 50 W. Se, a partire dalla condizione di regime, il circuito viene isolato termicamente dopo quanto tempo la sua temperatura aumenta di 10 °C?



Soluzione

In condizioni stazionarie la potenza elettrica dissipata per effetto Joule, W_{el}, deve essere uguale alla potenza termica che per convezione ed irraggiamento viene scambiata con l'esterno. Se indichiamo con α_e il coefficiente termico convettivo con l'esterno, che contiene al suo interno anche l'effetto dell'irraggiamento, si ottiene:

$$W_{el} = \alpha_e \, A\left(T_{w,reg} - T_e\right)$$

dalla quale può essere ricavato il fattore di scambio termico complessivo $U_e \equiv \alpha_e \, A$:

$$U_e = \frac{W_{t,el}}{T_{w,reg} - T_e} = 0.32 \ \text{W/K}$$

Durante lo spegnimento, nell'ipotesi di numero di Biot relativamente piccolo (cioè di temperatura funzione solo del tempo), il bilancio dell'energia fornisce:

$$C\,dT_w = -U_e\left(T_w - T_e\right)dt$$

nella quale C rappresenta la capacità termica del circuito elettrico. Integrando la precedente equazione differenziale con la condizione iniziale che la temperatura sia uguale a quella di regime, si ottiene la seguente soluzione:

$$T_w(t) = T_e + \left[T_{w,reg} - T_e\right] = e^{-t/\tau}$$

dove τ rappresenta la costante di tempo definita come:

$$\tau \equiv C/U_e$$

Dato che la costante di tempo è nota, dalla precedente relazione è possibile ricavare la capacità termica del circuito:

$$C = \tau U_e = 160 \text{ J/K}$$

Se il circuito viene isolato termicamente la potenza elettrica dissipata per effetto Joule va tutta in aumento della sua energia interna e quindi in aumento della sua temperatura. L'equazione di bilancio dell'energia fornisce:

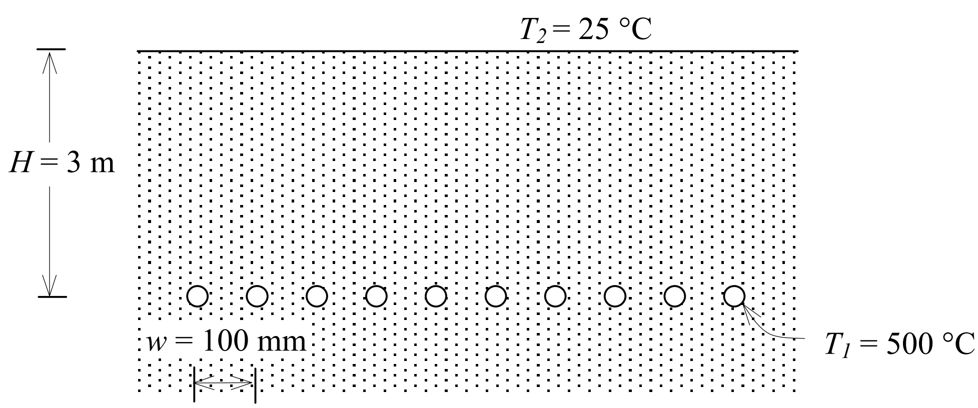
$$C\,dT_w = W_{el}\,dt \quad \Rightarrow \quad \Delta T_w(t) = T_w(t) - T_{w,in} = \frac{W_{el}}{C}t$$

Il tempo necessario per un aumento di 10 °C della temperatura del circuito vale:

$$t^* = \frac{C\,\Delta T}{W_{el}} = 32 \text{ s}$$

ESERCIZIO N. 5

Un fascio di barrette di ossido di uranio di 1 m di lunghezza e 10 mm di diametro sono interrate nel suolo parallelamente una all'altra come mostrato in figura. Esse si trovano ad una profondità di 3 m ed il passo è di 100 mm. La conducibilità termica del suolo è uguale a 0.9 W/(m K). Se la temperatura superficiale delle barrette e del suolo vale rispettivamente 500 °C e 25 °C determinare la potenza termica scambiata. Si valuti inoltre la temperatura massima all'interno della singola barretta assumendo una conducibilità termica per l'ossido di uranio uguale a 5 W/(m K) ed una temperatura costante sulla superficie esterna delle barrette; si supponga, a tal fine, che la potenza termica generata nell'unità di volume all'interno della barretta sia uniforme.



Soluzione

La potenza termica scambiata può essere determinata sfruttando la seguente formula:

$$W_t = \lambda\, S\left(T_1 - T_2\right)$$

dove S è l'appropriato fattore di forma conduttivo che in questo caso vale:

$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{2w}{\pi D} sinh \dfrac{2\pi H}{w}\right)} = 0.076 \text{ m}$$

La potenza termica persa da ogni singola barretta vale quindi:

$$W_t = \lambda\, S\left(T_1 - T_2\right) = 32.5 \text{ W}$$

La potenza termica generata per unità di volume è:

$$q''' = \frac{W_t}{V} = 413.8 \text{ kW/m}^3$$

L'equazione della conduzione all'interno della barretta può essere scritta nella seguente forma monodimensionale:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left(r\,\lambda_b \frac{d\,T}{d\,r}\right) + q''' = 0$$

Integrando una volta otteniamo:

$$\lambda_b \frac{dT}{dr} + \frac{q''' r}{2} + \frac{C_1}{r} = 0$$

A causa della simmetria cilindrica, il flusso termico in corrispondenza dell'asse della barretta (r=0) deve essere nullo; ne discende che la costante C_1 deve essere uguale a zero.
Integrando una seconda volta l'equazione della conduzione si ha:

$$T(r) = -\frac{q''' r^2}{4\lambda_b} + C_2$$

La costante C_2 può essere determinata imponendo che la temperatura in corrispondenza della superficie esterna della barretta sia uguale a T_1; si ottiene:

$$T(r = R) = T_1 \;\Rightarrow\; C_2 = T_1 + \frac{q''' R^2}{4\lambda_b}$$

L'andamento della temperatura all'interno della barretta è di tipo parabolico:

$$T(r) = T_1 + \frac{q'''}{4\lambda_b}\left(R^2 - r^2\right)$$

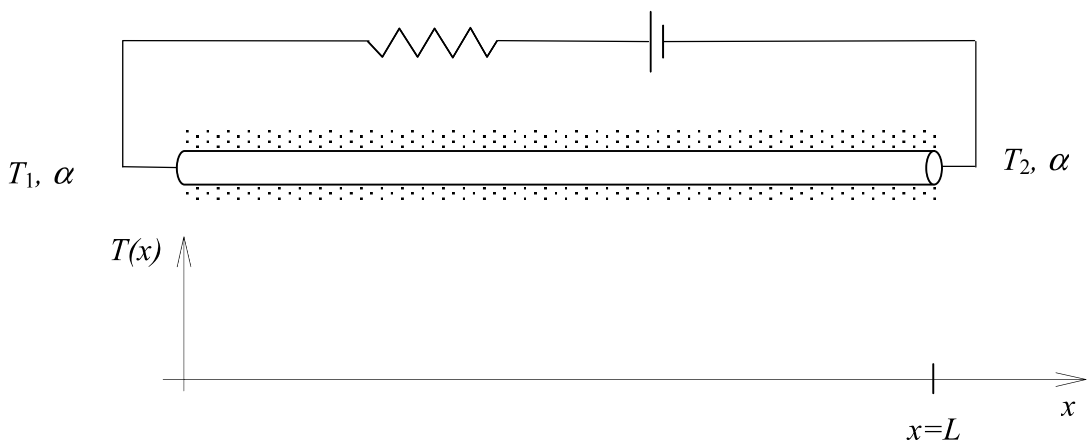
La temperatura massima viene raggiunta in corrispondenza dell'asse della barretta e vale:

$$T_{\max} = T(r = 0) = T_1 + \frac{q''' R^2}{4\lambda_b} = 500.5 \text{ °C}$$

ESERCIZIO N. 6

Una barretta di alluminio di sezione cilindrica, con area trasversale A = 1 cm^2, lunghezza L = 1 m e conducibilità termica λ = 200 W/(m K), è termicamente isolata sulla superficie laterale. Le sue due estremità sono in contatto termico con due fluidi mantenuti alla temperatura T_1 = 0 °C e T_2 = 50 °C, rispettivamente. Tra i fluidi e le due basi della barretta vi è scambio termico convettivo con un coefficiente α = 20 W/(m^2 K). Nell'ipotesi che nella barretta venga dissipata una potenza elettrica di 1 W, si determini:

1. la posizione in corrispondenza della quale la temperatura all'interno della barretta è massima;
2. il valore della temperatura massima;
3. le temperature sulle sue due basi;
4. le potenze termiche scambiate con i due fluidi.



Soluzione

Data la particolare geometria del problema e le condizioni al contorno, la temperatura all'interno della barretta è funzione della sola posizione assiale x. L'equazione della conduzione può perciò essere scritta nella seguente forma

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{g}{\lambda}$$

che adimensionalizzata diventa:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -Fo$$

dove:

$$\xi \equiv \frac{x}{L}; \qquad \theta(\xi) \equiv \frac{T(\xi) - T_1}{T_2 - T_1}$$

Il numero di Fourier, Fo, è noto e vale:

$$Fo \equiv \frac{g\,L^2}{\lambda(T_2 - T_1)} = \frac{W_{el}\,L}{A\,\lambda(T_2 - T_1)} = 1$$

La soluzione generale della precedente equazione differenziale è:

$$\theta(\xi) = -\frac{1}{2}Fo\,\xi^2 + C_1\,\xi + C_2$$

Per determinare l'effettivo andamento della temperatura all'interno della barretta è necessario imporre che la soluzione generale soddisfi alle seguenti condizioni al contorno del terzo tipo:

$$\begin{cases} -\lambda \left.\dfrac{d\,T}{d\,x}\right|_{x=0} = -\alpha\left[T(0) - T_1\right] \\ -\lambda \left.\dfrac{d\,T}{d\,x}\right|_{x=L} = -\alpha\left[T_2 - T(L)\right] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left.\dfrac{d\,\theta}{d\,\xi}\right|_{\xi=0} = Bi\;\theta(0) \\ \left.\dfrac{d\,\theta}{d\,\xi}\right|_{\xi=1} = Bi\;\left[1 - \theta(1)\right] \end{cases}$$

dove il numero di Biot, *Bi*, vale:

$$Bi \equiv \frac{\alpha\,L}{\lambda} = 0.1$$

Si ricava:

$$C_1 = 0.54762; \quad C_2 = 5.4762$$

Conoscendo il profilo di temperatura, è possibile ottenere la posizione in corrispondenza della quale la temperatura è massima uguagliando a zero la sua derivata:

$$\frac{d\,\theta}{d\,\xi} = 0 \;\Rightarrow\; -Fo\,\tilde{\xi} + C_1 = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\xi} = \frac{C_1}{Fo} = 0.54762 \;\Rightarrow\; \tilde{x} = 0.54762\,\mathrm{m}$$

La temperatura massima è data da:

$$\theta_{\max} = -\frac{1}{2}Fo\,\tilde{\xi}^2 + C_1\,\tilde{\xi} + C_2 \;\Rightarrow\; \theta_{\max} \cong 5.626 \;\Rightarrow\; T_{\max} \cong 281.3\ ^\circ\mathrm{C}$$

Noto il profilo di temperatura, è facile determinare i valori di temperatura alle estremità della barretta:

$$T(x=0) \cong 273.8\ ^\circ\mathrm{C}; \quad T(x=L) \cong 276.2\ ^\circ\mathrm{C}$$

Infine, la potenza termica scambiata con i due fluidi risulta:

$$W_{t,1} = \alpha\,A\left[T(x=0) - T_1\right] = 0.5476\ \mathrm{W}\,; \quad W_{t,2} = \alpha\,A\left[T(x=L) - T_2\right] = 0.4536\mathrm{W}$$

Si noti che se avessimo sfruttato l'ipotesi di temperatura uniforme all'interno della barretta, valida per piccoli numeri di Biot, avremmo ottenuto:

$$T(x=0) = T(x=L) = T_{\max} = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{W_{el,\max}}{2\,\alpha\,A} = 275\ ^\circ\mathrm{C}$$

L'errore commesso sul calcolo della temperatura massima sarebbe stato dell'ordine del 2.4 % (errore relativamente basso).