

Le architetture di forma libera o complessa rappresentano attualmente una tra le sfide più avvincenti per i progettisti di edifici. Nell'architettura contemporanea copertura e facciata spesso si fondono in un'unica "pelle", che usualmente l'architetto concepisce ispirato da principi funzionali o anche semplicemente scultorei, e che l'ingegnere razionalizza e rende costruibile utilizzando, oltre a quelli tradizionali, anche strumenti nuovi che spaziano dalla geometria differenziale, al calcolo variazionale, alla computer graphics.

In questo articolo viene presentato uno stato dell'arte sulla tematica della Pannellizzazione delle superfici libere o, comunque, complesse.

Nonostante la relativa novità dell'argomento ed il suo profondo scostamento dai temi classici dell'ingegneria civile, è già disponibile una vasta bibliografia, qui necessariamente ridotta per motivi di sintesi, a testimonianza del suo carattere di estrema attualità.

***Free form architectures are currently one of the most stimulating challenges facing building designers.***

***In contemporary architecture, the roof and facade frequently tend to merge into a single skin, which the architect usually designs on the basis of a combination of utility and sculptural principles, later rationalised and rendered practicable by the engineer, who uses a whole range of traditional and innovative tools, such as differential geometry, calculus of variations and, last but not least, computer graphics.***

***This paper presents a brief overview of the state of the art in free form paneling issues and complex surfaces.***

***In spite of the relative novelty of the topic and its distance from the classical themes of civil engineering, an extensive bibliography, presented here in summary form for the sake of brevity, is already available, thus demonstrating the extreme relevance of this subject.***

## 1. INTRODUZIONE

Le cosiddette strutture di forma libera sostengono gli involucri e le coperture progettati sempre più spesso da architetti famosi quali Shigeru Ban, Santiago Calatrava, Frank O. Gehry, Massimiliano Fuksas, Zaha Hadid etc...

Basta osservare le opere raccolte in figura 1 per cogliere la caratteristica che accomuna tutti quei progetti: la complessità stilistica e geometrica della forma che, inevitabilmente generata con l'ausilio di moderni software CAD, non può essere in alcun modo ricondotta alla sovrapposizione di più forme semplici.

È naturale chiedersi con quali metodi e con quali nozioni venga affrontata la progettazione di strutture così complesse. Alla questione della

# Progettare involucri di forma libera: l'ingegnerizzazione dell'involucro

## *Free form skin design: engineering the skin*

Maurizio Froli, Davide Tonelli

complessità geometrica dell'involucro si accompagna di pari passo il tema della complessità della struttura resistente. I due problemi non possono essere pensati come distinti, ed anzi essi rappresentano le due facce di uno stesso processo: la ricerca della forma ottimale. Proprio dalla forma infatti discendono le prestazioni statiche della struttura: gli involucri sono infatti strutture leggere resistenti per forma. È dunque nella fase di definizione della forma che l'apporto dell'ingegnere strutturista, figura centrale nei progetti a forma libera, diviene essenziale e all'interno di questo processo, spesso iterativo, le verifiche statiche rappresentano un passaggio intermedio di controllo della fattibilità. È in questo filone che si inserisce il G.R.I.F.F. - "Gruppo di Ricerca sulle Free Forms dell'Università di Pisa" - fondato e coordinato da Maurizio Froli. Questo gruppo mette a sistema competenze di settori diversi, fino ad oggi ritenuti distinti e non interagenti, quali l'Ingegneria Strutturale, la Computer Graphic e la Topologia, con lo scopo di dominare finalmente il delicato processo di concepimento razionale dei progetti a forma libera.

## 2. LA FILIERA PRODUTTIVA ATTUALE

Si comprende che costruire architetture di tale complessità geometrica rappresenta una sfida sotto vari aspetti.

Nel contesto delle forme libere, l'approccio progettuale basato sulla scomposizione del problema in sotto modelli piani non può più essere applicato. Viene spontaneo pensare allora che neppure sotto l'aspetto del montaggio le tecniche costruttive tradizionali e consolidate - quelle dei sistemi intelaiati formati da pilastri pseudo-verticali e traversi orizzontali - possano trovare diretta applicazione. Ciononostante, analizzando le sequenze costruttive dei progetti riportati in figura 2 e 3, si evince che durante il processo realizzativo è stato fatto uso di tecniche e strumenti sostanzialmente tradizionali: in entrambi i casi lo schema resistente è quello del telaio classico, mentre l'involucro è un elemento interamente portato. Per quanto concerne la progettazione strutturale, le opere di figura 2 e 3 si di-

stinguono da quelle tradizionali unicamente nel livello di dettaglio o al più nel tipo delle analisi, le quali vengono sempre e comunque svolte mediante codici di calcolo FEM. Analogamente, si intuisce che neppure la loro costruzione ha richiesto l'introduzione di sostanziali innovazioni, fatto salvo l'uso di macchinari più precisi ed uno studio della fase realizzativa sensibilmente più dettagliato, che si traduce in un maggior numero di disegni esecutivi ed in un maggior controllo durante la direzione lavori.

Emerge perciò chiaramente che l'unica fase veramente innovativa nell'intera filiera realizzativa delle forme libere è proprio quella iniziale della definizione della forma.

La produzione di architetture a forma libera introduce nei progetti una fonte di complessità aggiuntiva, tanto rilevante da portare naturalmente a chiedersi il perché di questa "esasperata ricerca della complessità geometrica". La risposta al quesito non è immediatamente formulabile.

Spesso si ricerca una giustificazione nei criteri di efficienza energetica, nella ricerca della migliore esposizione climatica e dell'orientamento ottimale delle facciate, nell'integrazione nel contesto urbano, nel minimo impatto ambientale, nella produzione di architetture identitarie etc... Pare tuttavia difficile, anzi "complesso", accostare i termini *forma libera ed efficienza* - seppur intesa questa nell'accezione che più si preferisce - e nondimeno spesso si riscontra che anche i criteri di integrazione e di minimo impatto risultano disattesi.

In questi casi, a giustificare l'adozione di una forma complessa resta soltanto il gusto estetico: architettura e design si fondono, si intrecciano a formare un tutt'uno indistinguibile. Questo processo, tanto frequente e diffuso nella produzione architettonica corrente, non è sbagliato a priori. L'estetica è senza dubbio un valore positivo da perseguire, si tratta solo di farlo con un approccio corretto e nella giusta misura, in modo da non trasformare la progettazione architettonica in un esercizio di stile.

Tra tutte le possibili metodologie di proget-

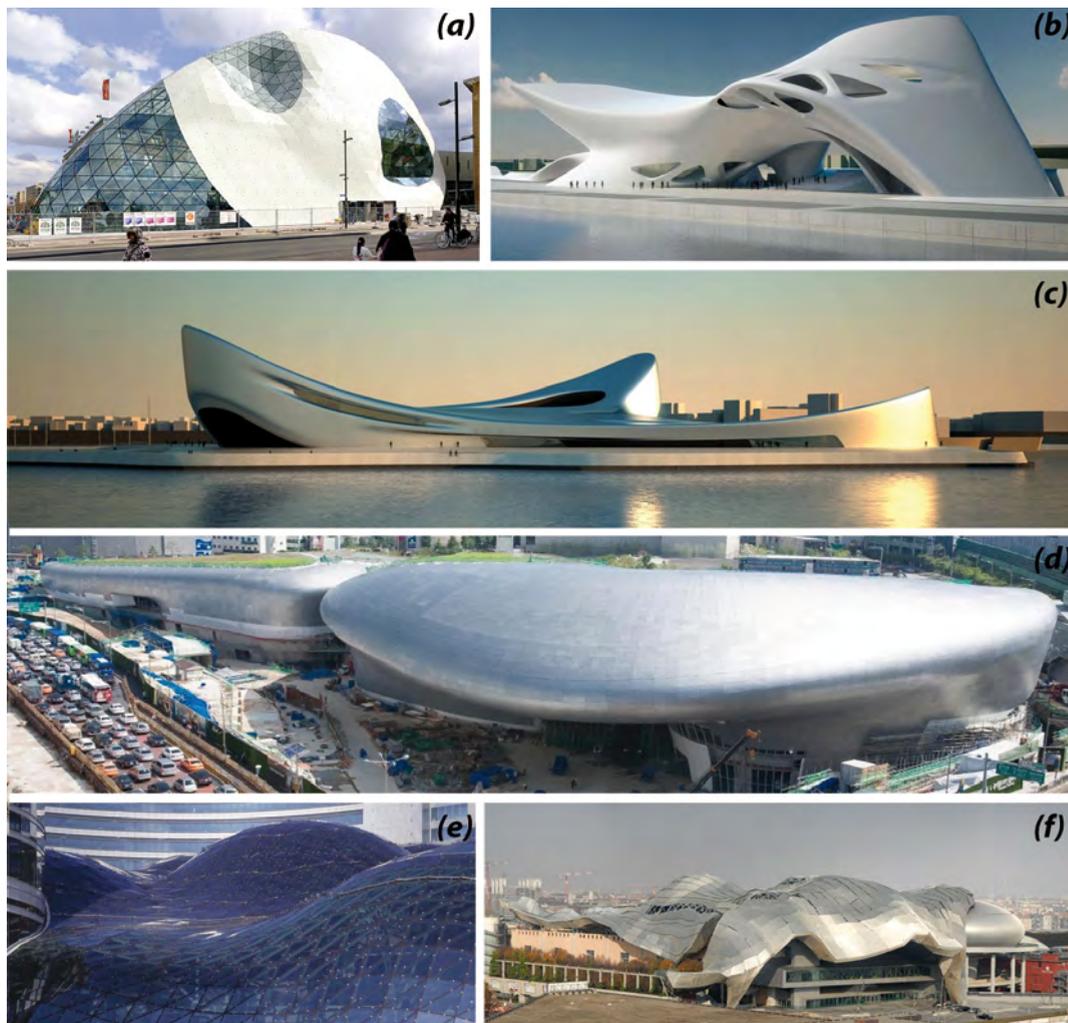


Fig.1 - (a) Blob di Eindhoven - Fuksas, (b) Museo di Arte contemporanea di Cagliari - Hadid, (c) Centro Polifunzionale di Reggio Calabria - Hadid, (d) Dongdaeum Park di Seoul - Hadid, (e) Zlote Tarasy Varsavia - Jerde, (f) Centro Congressi Portello di Milano - Bellini

tazione appropriate, una senz'altro valida è quella che prevede l'impiego di strumenti idonei, capaci di introdurre elementi di razionalità nel processo creativo delle "forme libere". Strumenti che portino, ad esempio, allo sviluppo e all'adozione di forme compatibili con schemi statici efficaci ed eventualmente innovativi (vedi sezione 4). Una tesi questa sostenuta da molti, tra cui anche Urs Füssler [1] e prima ancora di lui da Pierre Bézier ed altri: "Without a doubt currently available software solutions used for construction and modeling, with their possibilities and constraints, formally shape the products developed with them. (...) The design of one's own task-specific design tools, has itself to be considered as being part of the design process: to design by tool design."

Attualmente ci troviamo in un periodo di



Fig. 2 - Centro Congressi Portello di Milano



Fig. 3 - Heydar Aliyev Centre di Baku

transizione nel quale ci si accinge a sviluppare progetti innovativi impiegando tuttavia ancora tecniche tradizionali. Le strutture di figura 3 costituiscono un esempio: l'intero processo di ricerca della forma, sia esso condivisibile o meno, stride rispetto al carattere tradizionale delle soluzioni costruttive adottate per la realizzazione dell'involucro. L'edificio è infatti a struttura intelaiata classica e la pelle appare un vero e proprio elemento aggiunto, una "scomoda" forma complessa che deve essere "in qualche modo" ancorata alla sottostruttura. In questo come in innumerevoli altri casi analoghi, ad un rivestimento leggerissimo corrisponde una sottostruttura poderosa ed ingombrante. Ciò denuncia in modo inequivocabile la profonda distanza che attualmente ancora si frappone fra il progetto architettonico e quello strutturale, e che sfortunatamente risulta essere tanto maggiore quanto più complessa ed elaborata è la forma dell'involucro. Ciò non è imputabile tanto ad una cattiva progettazione strutturale, quanto ad una pressoché totale mancanza di integrazione tra involucro e volume racchiuso: è dunque il processo architettonico che presenta carenze. Lo spazio interno racchiuso dalla "pelle complessa" non è ben progettato in quanto le possibilità realizzative effettivamente disponibili non ne consentono una corretta fruizione. In definitiva è la forma libera che deve essere ripensata con nuova ed accresciuta consapevolezza, riprogettata con metodi e strumenti nuovi.

### 3. INGEGNERIZZAZIONE

#### DELL'INVOLUCRO: PANNELLIZZAZIONE

Il fascino, l'audacia e la libertà espressiva dei progetti a forma libera devono inesorabilmente confrontarsi con le difficoltà realizzative, talvolta con la pochezza delle maestranze e delle tecnologie costruttive a disposizione, quasi sempre con la limitatezza delle risorse finanziarie. Per tali ragioni ha origine, pressoché in maniera contestuale alla selezione del progetto, un suo lento processo di razionalizzazione. I passi fondamentali di tale percorso sono sostanzialmente due: la rielaborazione della superficie di progetto finalizzata alla sua suddivisione in pannelli discreti, e l'ideazione di un sistema portante in grado di sostenere l'involucro. Questi due momenti non sono sequenziali, ed anzi si condizionano in maniera reciproca e determinante: in particolare modo la scelta dello schema di suddivisione più opportuno (il *pattern*) riveste un ruolo essenziale in quanto, in dipendenza della particolare forma dell'involucro, è in grado di condizionare sensibilmente l'efficienza dell'intera sottostruttura.

La buona riuscita del processo di ingegnerizzazione è perciò di fondamentale importanza in quanto condiziona la sostenibilità del progetto in termini tecnologici, di gusto estetico e, non per ultimo, di costo. È ciò che sostiene anche N. Baldassini [2]: "(...) *the interest is shifted from the definition to the subdivision of the surfaces. Subdivision is the main point when (...) trying to couple glazing patterns with structural layouts. (...) Free-form*

*design that is sustainable in terms of technologies, costs and aesthetics is in the foreseeable future. Mathematics, geometry, technology and production are all converging together.*"

Il problema della pannellizzazione di superfici complesse non è banale, in quanto presuppone allo stesso tempo la disponibilità e la padronanza di potenti software informatici, di solide basi matematiche, di ottime conoscenze ingegneristiche, nonché delle tecnologie e delle tecniche manifatturiere disponibili.

Attualmente la soluzione viene ottenuta attraverso lo sviluppo e l'implementazione di algoritmi di suddivisione. È perciò un approccio di tipo matematico, posto in essere mediante strumenti informatici avanzati, spesso sviluppati ad hoc per il particolare progetto.

Due sono dunque gli elementi chiave nel processo di pannellizzazione: il *pattern* adottato e l'algoritmo di suddivisione adoperato. Tra i *pattern* più frequentemente impiegati troviamo quelli triangolare e quadrilatero, in entrambe le varianti isotropa ed anisotropa, mentre di più recente applicazione è il *pattern* esagonale o poligonale in genere. Qui di seguito si presenta un'analisi dei principali algoritmi di suddivisione attualmente in uso, suddivisi per tipo di *pattern* da essi generato.

#### 3.1 Mesh triangolari

Le mesh triangolari presentano diversi vantaggi:

1. un buon grado di approssimazione della superficie di input;
2. facce piane;
3. la disponibilità di molteplici algoritmi per la triangolazione di superfici, sviluppati nell'ambito della grafica 3D e dei *computer game*;
4. una intrinseca stabilità della struttura portante (la maglia triangolare è internamente isostatica).

Al contempo esse annoverano diversi svantaggi rispetto alle concorrenti:

1. basso grado di trasparenza (per involucri vetriati);



Fig. 4 - Mesh triangolare della Vela della Nuova Fiera di Milano (2002-2005). Fig. 5 - Nodo esavalente senza asse, con torsione geometrica

2. relativa pesantezza della struttura di supporto;
  3. torsione geometrica dei nodi;
  4. alta valenza dei nodi (6 per nodi regolari);
- Un esempio notevole a livello nazionale di applicazione delle mesh triangolari è quello della Fiera di Milano, a Rho [2] (v. figura 4 e 5). I vari tipi algoritmi di suddivisione triangolare attualmente disponibili (ad es. Delaunay etc..) non vengono qui trattati, sia perché sono oramai ben noti, sia perché attualmente le mesh triangolari rivestono un minor interesse applicativo rispetto alle concorrenti quadrilatere e poligonali.

### 3.2 Mesh quadrilatere

Le mesh quadrilatere sono più efficienti delle triangolari in termini di ridotta complessità dei nodi (la cui valenza scende da 6 a 4) e di produzione semplificata dei pannelli, specie se di vetro, in virtù della maggiore ampiezza degli angoli.

Esibiscono inoltre una trasparenza sensibilmente più marcata rispetto alle concorrenti, anche in virtù di una sottostruttura più leggera e meno ingombrante. A fronte di tali vantaggi la loro progettazione richiede però una maggior attenzione, sia dal punto di vista statico che geometrico. Basti pensare al grave inconveniente geometrico della non intrinseca planarità di un pannello quadrangolare.

Per generare una mesh quadrilatere a partire da una superficie di progetto, tenendo con-

to al contempo di queste problematiche, sono stati sviluppati innumerevoli approcci. Nel seguito vengono brevemente elencati i principali. In [4] viene invece sviluppato un buon stato dell'arte sulle *quad mesh* nel campo della *computer graphics*: vi si possono trovare ad esempio le definizioni di mesh regolare, mesh semi-regolare, mesh non strutturata adoperate nel seguito. Brevemente, una mesh quadrilatere è:

1. regolare se può essere mappata in un rettangolo suddiviso in quadrati;
2. semi-regolare se può essere ottenuta come unione di *patch* distinte di mesh regolari;
3. non strutturata se larga parte dei suoi vertici è irregolare, ovvero non di valenza 4.

#### 3.2.1 Superfici traslazionali, rotazionali, omotetiche e loro combinazioni

Il loro impiego viene ben descritto in [3] e [5]. Questo è un metodo di tipo puramente geometrico che permette di disegnare mesh quadrilatere con facce piane. La sua applicazione è macchinosa e richiede molta attenzione da parte dell'operatore; d'altro canto il suo impiego non richiede né particolari abilità né software specifici. È proprio per tale ragione che questo procedimento è stato uno dei primi ad essere impiegato nell'ingegnerizzazione delle forme libere (ad esempio nella *grid-shell* a copertura della chiostra interna del Museo di Storia di Amburgo, J.Schlaich - 1989), vedi figura 6 e 7.

#### 3.2.2 PQ Mesh

Sono mesh quadrilatere e piane che vengono computate attraverso l'applicazione congiunta ed alternata di un algoritmo di suddivisione quadrilatere tipo Catmull-Clark [3] di un ulteriore algoritmo di perturbazione dei vertici [4] (figura 8.a). Le PQ mesh sono una versione discreta delle reti di curve coniugate sulla superfici (figura 9), delle quali le linee di curvatura costituiscono un esempio (la definizione rigorosa di reti di curve coniugate passa attraverso quella di direzioni coniugate, la quale a sua volta fa ricorso al differenziale della Mappa di Gauss: due direzioni  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in T_p(S)$  sono coniugate se  $dN_p(\omega_1) \cdot \omega_2 = dN_p(\omega_2) \cdot \omega_1 = 0$ ).

Se si conosce una rete di curve coniugate è immediato ottenere la PQ mesh ad essa associata, altrimenti la loro computazione richiede l'applicazione del suddetto algoritmo. L'algoritmo di perturbazione dei vertici consiste sostanzialmente nella formulazione di un'energia capace di descrivere il grado di planarità delle facce della mesh, quindi nella minimizzazione della stessa attraverso tecniche matematiche di *Non Linear Programming* (NLP), adoperate per risolvere problemi di ottimizzazione (ovvero problemi di ricerca dei punti estremali di funzioni all'interno di un dominio definito da vincoli). Il punto di minimo dell'energia descrive infatti la configurazione, relativamente al passo in esame, nella quale la mesh mostra tutte le facce piane.

Il metodo prescelto dal PQ *perturbation algo-*

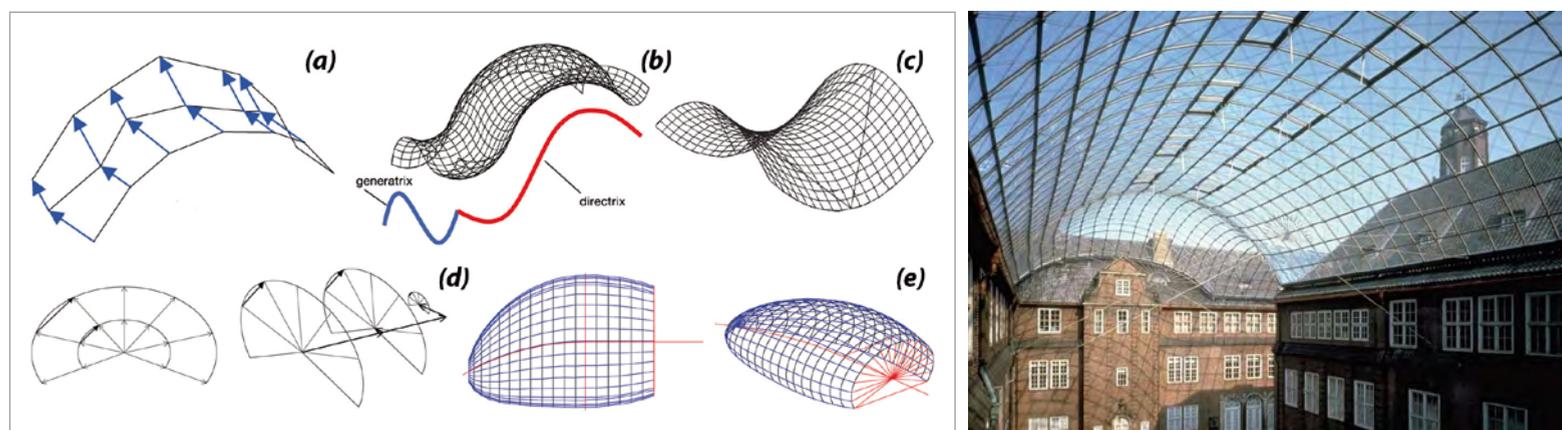


Fig. 6 - (a) e (b) Superfici Traslazionali - principio base, (c) Superficie Rigata ottenuta come superficie traslazionale, (d) Scale-Trans Surfaces- principio base, (e) Scale-Trans Surface ottenuta tramite espansione più traslazione. Fig. 7 - Copertura Grid-Shell a maglia quadrilatere del Museo di Storia di Amburgo: esempio di "Scale-Trans Surface" (J. Schlaich, 1989)

rithm per assemblare l'energia è il seguente:

$$E_{p,q} = \sum_{i=1}^f \det(a,b,c) \det(a,b,d) \det(a,c,d) \det(b,c,d)$$

$$E_{conv} = \sum_{i=1}^f [a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2\pi]^2$$

$$E = \lambda_1 E_{p,q} + \lambda_2 E_{conv}$$

Il  $\det(a,b,c)$  non è altro che il prodotto misto dei vettori rappresentativi dei lati  $a, b, c$  della faccia quadrilatera in esame, ovvero il volume del parallelepipedo individuato dai suddetti vettori (figura 10) - che sarà nulla nel caso essi siano complanari. Viceversa il richiedere che la somma degli angoli interni al quadrilatero  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  valga  $2\pi$  equivale a richiedere che esso sia piano e convesso. L'energia globale è ottenuta come combinazione lineare delle due relative rispettivamente alla planarità ed alla convessità delle celle quadrilatere. I coefficienti vengono settati in maniera da ottimizzare la rapidità di convergenza e la qualità del risultato finale.

### 3.2.3. Mesh coniche e circolari

Sono particolari tipi di PQ mesh introdotte in [4]. In particolare esse non discretizzano reti di curve comunque coniugate bensì esattamente le linee di curvatura. Proprio da questa circostanza derivano le due proprietà

distintive delle mesh coniche: *face offset* e sottostruttura ortogonale.

La proprietà di *face offset mesh* è quella per cui una nuova mesh, generata a partire dalla mesh iniziale eseguendo un offset di tutte le facce a distanza prefissata "d", mantiene la stessa connettività della mesh madre (ovvero è essa stessa una mesh conica). Ciò accade perché le facce della mesh in corrispondenza dei vertici regolari sono tangenti ad un cono di rivoluzione (figura 8.b), il cui asse coincide perciò con la normale alla mesh nel vertice. Dunque tanto il vertice della mesh madre quanto quello della mesh figlia appartengono al suddetto asse, ovvero alla normale.

Questa proprietà ha anche ulteriori risvolti: preso un lato della mesh, esso, il suo corrispondente nella offset mesh e i due assi dei coni agli estremi del lato giacciono su di un piano comune. In virtù di questo fatto le mesh coniche possono essere costruite con una *sottostruttura ortogonale* alla mesh medesima, con evidente semplificazione realizzativa della stessa.

### 3.2.4. Developable strip

Le PQstrip (figura 11) sono le componenti base delle PQ mesh, e rappresentano la versione discreta di superfici sviluppabili (o rigate). Ciò significa che continuando a raffinare una PQ

strip lungo una singola direzione si ottiene una superficie sviluppabile: una cosiddetta *D-strip* (*developable strip*).

Le D-strip [5] permettono di discretizzare la superficie di progetto con una superficie a *singola curvatura* (variabile in maniera discreta da striscia a striscia). Inoltre la proprietà di essere superfici sviluppabili permette di produrle a costi contenuti.

L'innovazione forte rispetto alle PQ meshes risiede nel miglior grado di rappresentazione della superficie di progetto, che non pare più poliedrale bensì pressoché continua (figura 11 e 12).

### 3.2.5. Superfici rigate

Questo approccio [6] [7], concettualmente antico ma di grande rilievo applicativo, consiste nell' approssimare la superficie con un *patchwork* di superfici rigate - ovvero con un insieme di porzioni di superfici rigate differenti, con le zone di transizione opportunamente levigate (si richiede continuità  $C^k, k = 1, 2$  in genere).

Le superfici rigate sono interessanti in quanto sviluppabili, e dunque realizzabili facilmente a partire da elementi piani, ma hanno la forte limitazione di avere ovunque curvatura gaussiana negativa ( $K \leq 0$ ): potranno dunque approssimare unicamente

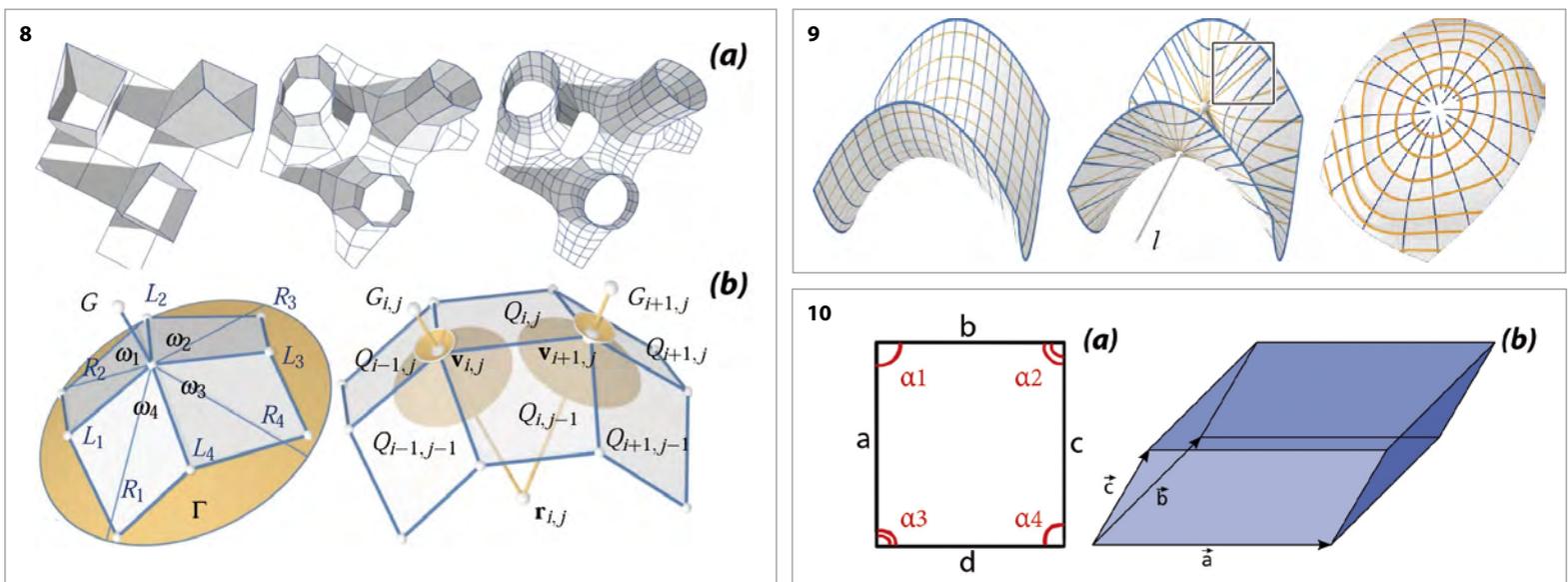


Fig. 8 - (a) Gerarchia di PQ-meshes ottenuta dall'applicazione iterativa ed alternata degli algoritmi Catmull-Clark e PQ-perturbation, (b) Configurazione delle facce delle mesh coniche ad un vertice. Fig. 9 - Esempi di reti di curve coniugate sulla superficie. Fig. 10 - (a) Faccia quadrilatera tipo, (b) Significato geometrico di prodotto misto

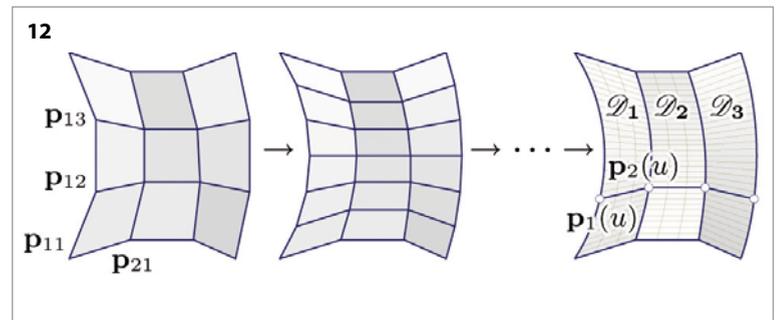
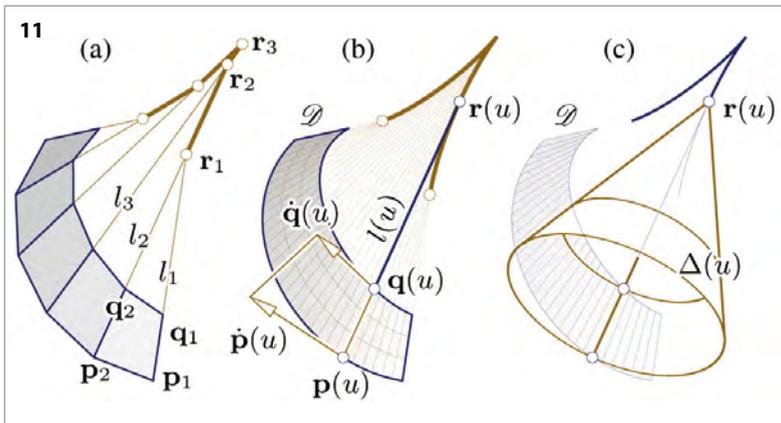


Fig. 11 - Strisce sviluppabili come raffinamento limite di superfici discrete. Fig. 12 - Modelli semi-discreti come caso limite di modelli discreti

le porzioni di superficie libera a curvatura negativa. La figura 13 riporta un possibile esempio applicativo.

### 3.3 Mesh esagonali

Le mesh esagonali infine rappresentano uno schema di suddivisione innovativo, indubbiamente dotato di una consistente quantità di ottime proprietà, e che tuttavia fino ad ora ha trovato scarsa applicazione - essenzialmente a causa della indisponibilità di strumenti di progetto idonei.

Tra i vantaggi essenziali dello schema esagonale si annovera senz'altro la bassa valenza dei nodi (3 per i nodi regolari) ed uno schema statico della sottostruttura di tipo pienamente tridimensionale e dunque intrinsecamente efficiente.

Negli ultimi tempi l'interesse per questo *pattern* è cresciuto significativamente tanto che oggi esistono già alcuni algoritmi validati per la computazione di mesh esagonali. Se ne citano alcuni, quasi tutti incentrati sul concetto di operatore duale - anche detto *remeshing operator*. Esso non fa altro che invertire i ruoli di vertici e facce: ogni faccia della mesh duale corrisponde ad un vertice della mesh iniziale, ed analogamente ad ogni vertice della mesh duale corrisponde una faccia della mesh iniziale.

#### 3.3.1 Honeycomb subdivision

A partire da una mesh totalmente non strutturata (figura 14.a), dunque con vertici di valenza altamente variabile, l'algoritmo di *Honeycomb Subdivision* [8] effettua un *point seeding* sulla mesh stessa e quindi fa

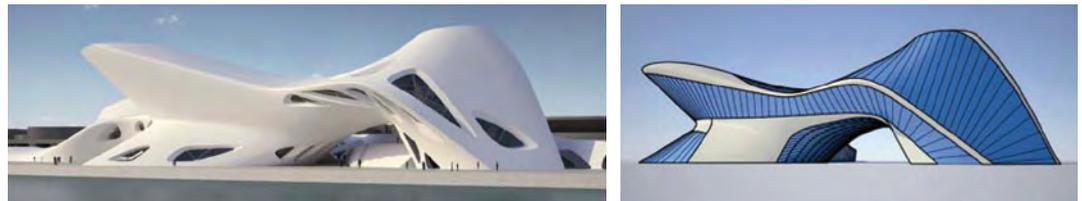


Fig. 13 - Progetto del Museo di Arte contemporanea di Cagliari: approssimazione di porzioni di superficie con superfici rigate

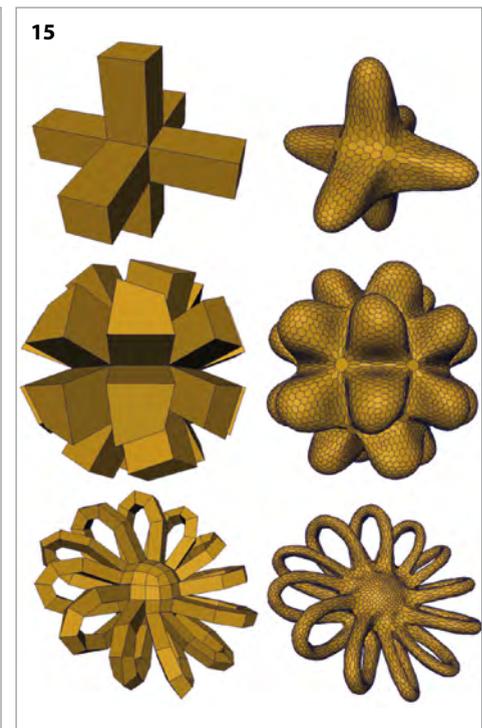
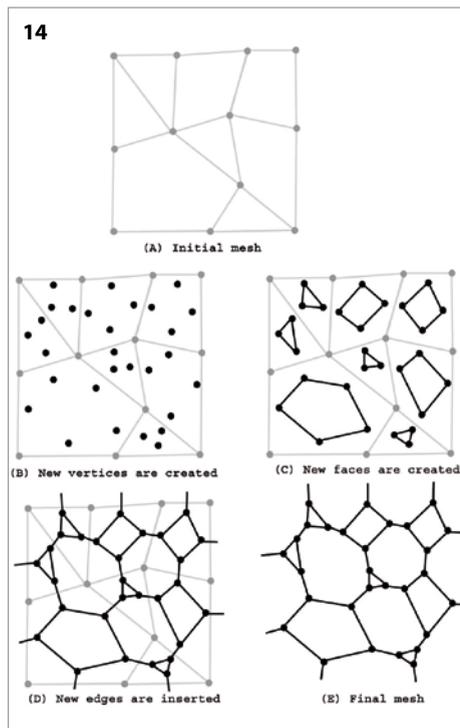


Fig. 14 - Passi dell'algoritmo Honeycomb Subdivision. Fig. 15 - Esempi di superfici di suddivisione ottenute tramite Honeycomb Subdivision

corrispondere ad ogni lato un punto per ciascuna faccia cui il suddetto lato appartiene (figura 14.b). I punti interni a ciascuna faccia vengono quindi collegati a formare le facce della nuova mesh (figura 14.c), dopodiché ciascuna coppia di punti corrispondenti al medesimo lato viene unita (figura 14.d). Le facce risultanti più piccole di una data mi-

sura vengono collassate in un punto (facce triangolari in figura 14.e).

A questo punto la nuova mesh è formata: quasi tutti i vertici sono di tipo trivalente, dunque la mesh è di tipo semi-regolare a connettività esagonale. Da notare che le mesh che si ottengono ricordano molto alcune forme organiche (figura 15). Di rilievo anche la forma

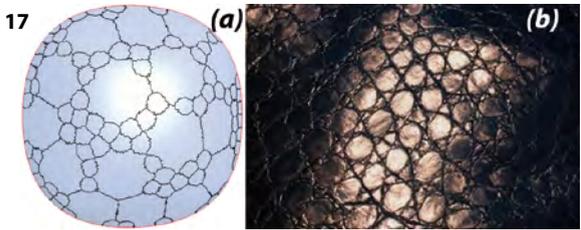
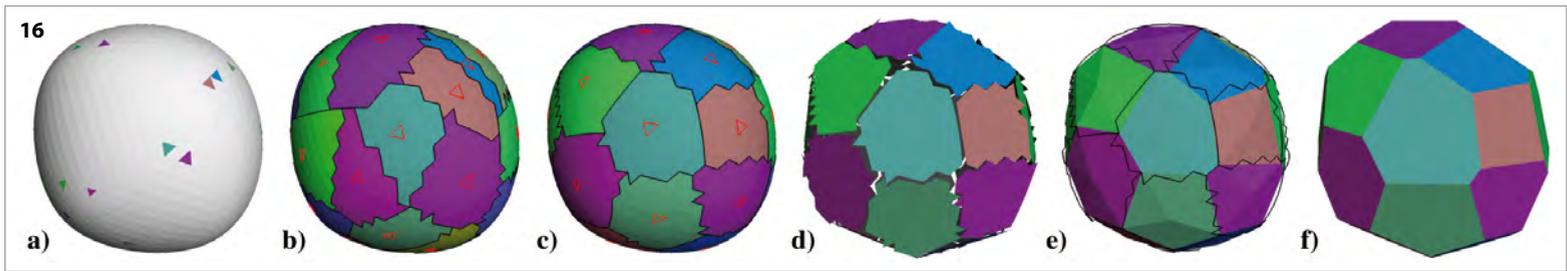


Fig. 16 - Passi dell'algoritmo di pannellizzazione euristico. Fig. 17 - (a) Effetto del controllo della metrica da parte dell'utente, (b) Analogia con forme organiche naturali

non convessa e non degenerare dei pannelli esagonali ubicati in zone con  $K \leq \theta$ .

### 3.3.2 Metodo euristico

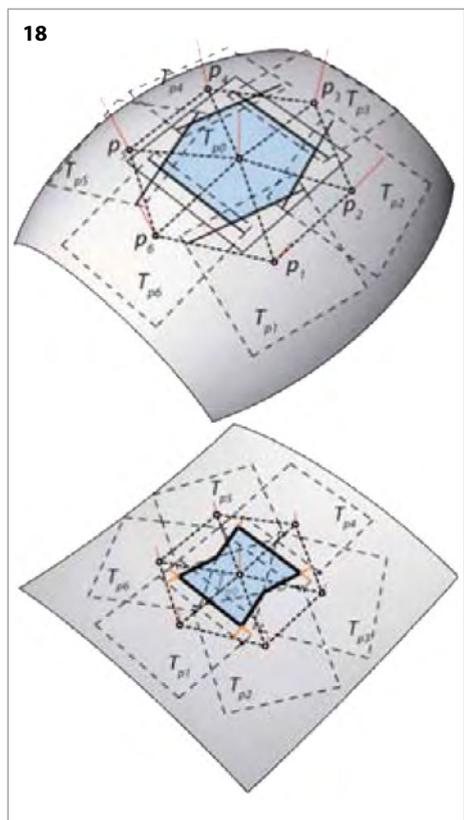
Nel metodo presentato in [9] la superficie viene inizialmente triangolata in maniera densa, quindi un numero  $n$  di triangoli definito dall'utente viene scelto in maniera casuale. Tali triangoli fungono da *seed*, ovvero da centri di aggregazione attorno ai quali i restanti triangoli vengono clusterizzati at-

traverso una funzione distanza (metrica), definita anch'essa dall'utente. I gruppi di triangoli vengono infine interpolati con dei piani, le intersezioni dei quali vanno a formare i lati dei pannelli (figura 16).

Questo metodo consente di ottenere *meshing* di superfici arbitrarie con elementi piani in numero pari ad  $n$  fissato a priori. Per contro la sua applicabilità non è garantita per superfici qualunque e la forma dei pannelli non è né topologicamente regolare né isotropa. Come per l'*Honeycomb Subdivision*, anche questo algoritmo produce mesh dall'aspetto organico (figura 17.a) che, a seconda della metrica prescelta, ricordano molto le scaglie dei pesci, quelle dei serpenti e la pelle degli elefanti (figura 16.b).

$tà$  che lega le tassellazioni regolari del piano (11), rispettivamente triangolare (3,3,3,3,3,3) ed esagonale (6,6,6).

(Nota - Una tassellazione del piano è un disegno che viene ottenuto ripetendo periodicamente la stessa figura, senza sovrapposizioni, in modo da ricoprire completamente il piano. Una tassellazione del piano è regolare se ogni suo vertice è regolare. Ogni vertice è regolare se è circondato dalla stessa sequenza di poligoni regolari. Il simbolo di *Schläfli* (ad es. (3,3,3,3,3,3) per la tassellazione triangolare, (4,4,4,4) per la quadrilatera, (6,6,6) per l'esagonale) è adoperato per individuare le tassellazioni regolari del piano in maniera univoca.) Dal punto di vista formale pare un metodo decisamente efficace, ma in realtà la buona riuscita del processo dipende strettamente dal tipo di triangolazione effettuata. Molto spesso si rende per giunta necessario eseguire una triangolazione parziale e progressiva al fine di poter completare con successo il processo di *remeshing*. In ogni caso i pannelli che si ottengono hanno forma generalmente irregolare, che diviene poi sensibilmente convessa in corrispondenza delle zone con  $K \leq \theta$ , ed addirittura degenerare dove  $K = \theta$  (figura 18 e 19).



### 3.3.3 TPI algorithm

Tale metodo (10) prevede di effettuare una triangolazione della superficie. Successivamente per ciascun vertice di questa viene tracciato il piano tangente alla superficie. L'intersezione dei tre piani appartenenti ad un dato triangolo genera un vertice della nuova mesh, la quale avrà connettività necessariamente esagonale in virtù della *duali-*

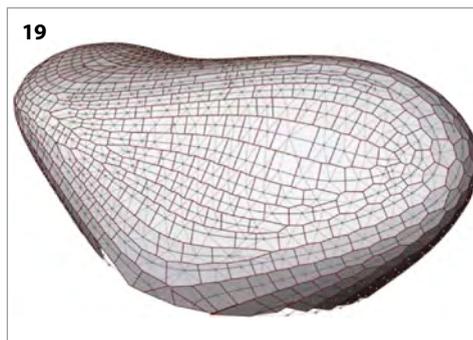


Fig. 18 - Pannelli generati con l'algoritmo TPI: forma variabile con la curvatura. Fig. 19 - Esempio di superficie *remeshed* con l'algoritmo TPI

### 3.3.4 CP mesh

In [15] vengono introdotte le *circle packing mesh*, una categoria di mesh triangolari caratterizzate dall'aver cerchi inscritti che si toccano reciprocamente nel punto medio del lato del triangolo in esame (figura 20). *CP mesh* esatte possono essere computate solo per tori e cilindri, mentre per tutte le altre superfici possono essere ottenute solo delle versioni approssimate.

Una volta ottenuta tale mesh è immediato ricavare la mesh esagonale ad essa duale, applicando l'operatore duale o di *remeshing*. Dall'osservazione della figura 21 emerge che i pannelli sono tutti topologicamente regolari (almeno fin dove la triangolazione è regolare) e di forma pressoché isotropa, mentre le loro dimensioni variano con continuità in ragione della dimensione dei triangoli di partenza. Il metodo è di eccezionale portata, ed è stato anche implementato in un *plugin* per il software CAD Rhinoceros® [16]. L'unico grave inconveniente è che i pannelli non sono planari.

### 3.3.5 Centroidal Voronoi tessellation

Un approccio molto usato per distribuire uniformemente un insieme di punti in due dimensioni, è quello di costruire una "tassellazione centroidale alla Voronoi" [17]. La stessa procedura può però anche essere utilizzata per fini di *remeshing* a prevalenza esagonale.

Una tassellazione alla Voronoi, relativa ad un insieme di punti sparsi (figura 22), non è altro che l'insieme delle celle i cui lati sono costituiti dai segmenti equidistanti dalla generica coppia di punti. Ciò implica che tutte le celle Voronoi sono convesse.

Una tassellazione centroidale alla Voronoi si distingue poi dalla tassellazione alla Voronoi standard, in quanto il baricentro di ciascuna cella coincide con il punto che essa racchiude (figura 23). La computazione di queste mesh richiede il calcolo del centroide  $c_j$  di ogni singola regione (eq.ne 1), e si articola in un processo iterativo noto come algoritmo di Lloyd. Esso prevede di calcolare ad ogni step il centroide  $c_j$  di ogni singola regione, quindi di spostare in esso il punto racchiuso nella cella. Le suddette istruzioni vengono ripetute fino a convergenza, ovvero fino a quando il centroide della cella ed il punto del passo  $i-1$  risultano pressoché coincidenti (eq.ne 2).

$$c_j = \frac{\int_{\Omega_j} \rho(x) dx}{\int_{\Omega_j} \rho(x) dx} \quad (\text{eq.ne 1})$$

$$\int_{\Omega_j} \rho(x) \cdot |c_j - x| dx = \min \quad (\text{eq.ne 2})$$

Come si vede in figura 22 e 23 la struttura di

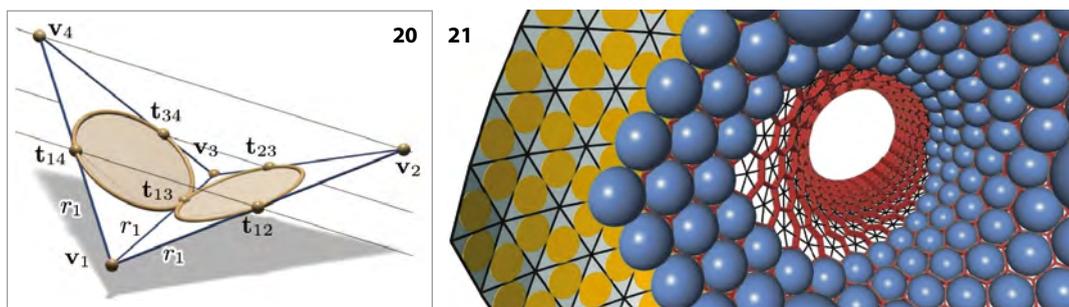


Fig. 20 - Coppia di triangoli adiacenti in una CP-mesh. Fig. 21 - Vista d'insieme di una CP-mesh

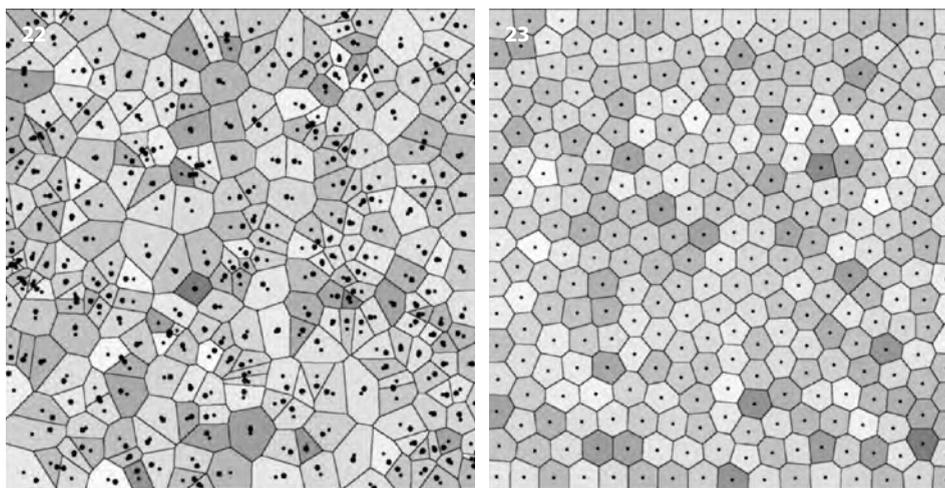


Fig. 22 - Tassellazione alla Voronoi, con i generatori (punti grandi) ed i centroidi (punti piccoli). Fig. 23 - Tassellazione centroidale alla Voronoi

queste celle è estremamente interessante: ricorda forme organiche, è piuttosto regolare e può essere ottenuta sia nella variante uniforme che disuniforme, semplicemente andando a variare la funzione densità  $\rho(x)$  all'interno dell'integrale relativo al calcolo del momento statico della cella. Ciò equivale ad introdurre una metrica variata sulla superficie e fornisce al progettista una straordinaria libertà progettuale ed espressiva.

## 4. NUOVI STRUMENTI PER LA PROGETTAZIONE

I software CAD attualmente disponibili (vedi Rhinoceros® [18]) sono in grado di garantire la massima libertà espressiva alla creatività del progettista, mentre difficilmente riescono a tenere in considerazione le problematiche di carattere fisico, costruttivo e tecnologico tipiche delle costruzioni a forma complessa. Nella sezione 2 è stato invece evidenziato come una corretta progettazione delle forme libere passi necessariamente attraverso

l'impiego di strumenti adeguati. Strumenti capaci di guidarne lo sviluppo dalla fase di concezione fino a quella di realizzazione, implementando in maniera naturale e continua tutti quei vincoli e quelle prescrizioni (di ordine geometrico, strutturale, tecnologico etc.), il cui mancato rispetto rende attualmente problematica la costruzione delle *free form*.

In sintesi la fattibilità a costi contenuti deve essere il principio cardine dell'attività progettuale, ed è perciò proprio sullo sviluppo di strumenti atti al raggiungimento di questo obiettivo che si incentra l'attività del GRIFF dell'Università di Pisa. Attraverso una sinergia con alcuni membri del VCLab - Visual Computing Lab, sezione del CNR di Pisa, e con matematici topologici, il GRIFF cerca di elaborare strumenti per la progettazione delle forme libere. La direzione di sviluppo è sia quella dell'ottimale ingegnerizzazione dell'involucro (sezione 3), sia quella della progettazione integrata forma-struttura (sezione 2).

La volontà di instaurare una collaborazione

tra il campo dell'Ingegneria Strutturale e quello della Computer Graphic, nasce dall'osservazione che i problemi di ingegnerizzazione dell'involucro sollevati dai progetti di forma libera sono almeno in parte affini a quelli della Computer Graphic. Di conseguenza le conoscenze e le tecniche precipue del suddetto settore risultano funzionali alla risoluzione delle problematiche in questione. In particolare sia il problema della razionalizzazione a posteriori - ovvero della pannellizzazione di una superficie di input, sia il problema dell'ottimizzazione a priori - ovvero della ricerca della superficie ottimale sotto certe condizioni al contorno, sono tematiche abitualmente affrontate nella Computer Graphic. Il problema della pannellizzazione è noto come *Surface Remeshing*, mentre la Ricerca della superficie ottimale è il tema centrale del *Surface Smoothing*.

#### 4.1. Surface remeshing

Il *Surface Remeshing* è una tecnica adoperata nella *computer graphics* per migliorare la qualità di una mesh. Il problema che affronta è il seguente: "data una mesh 3D, computare una nuova mesh i cui elementi soddisfino certi requisiti (definiti dall'utente) e che in contemporanea approssimi la superficie di

input in maniera accettabile". In gergo si parla di "*mesh quality improvement*", con riferimento a parametri quali densità, regolarità, dimensione, orientazione, allineamento, forma etc... delle facce della mesh.

Per quanto detto, è evidente che il tema della pannellizzazione di una superficie complessa può essere visto come un caso particolare di *remeshing*.

La superficie di progetto, che generalmente è una NURBS (Non Uniform Rational Basis-Splines), può infatti essere banalmente convertita in una mesh grezza (al limite non strutturata), dopodichè il *pattern* di suddivisione prescelto scaturisce direttamente dall'applicazione dei metodi del *surface remeshing*.

Esistono innumerevoli algoritmi di *remeshing*, specifici per ogni topologia ed ogni necessità, alcuni dei quali sono già stati trattati nella sezione 3. Tra gli algoritmi di *remeshing* quadrilatero non ancora citati è di rilievo il *curve based sampling*. Esso opera computando dapprima le direzioni e le curvatures principali sulla superficie, dopodichè seleziona un set di linee di curvatura (curve che sono in ogni punto tangenti ad una delle due direzioni principali) e le interseca. In corrispondenza delle suddette intersezioni vengono collocati

i vertici della mesh quadrilatera. Osservando la figura 24 si nota immediatamente come la mesh di output sia di tipo *quad-dominant* e non quadrilatera regolare: compaiono infatti sia "*T-junctions*" che vertici irregolari in corrispondenza dei punti umbilicali (punti in cui le curvatures principali hanno valore uguale in modulo e segno:  $k_1 = k_2$ ). Si intuisce inoltre come il *remeshing* possa essere sia di tipo isotropo che anisotropo, in virtù della distanza che separa le linee di curvatura prescelte.

#### 4.2 Surface Smoothing

*Surface Smoothing*, o anche *Surface Fairing*, è il nome che si dà in *computer graphics* alle procedure per l'individuazione, tra tutte le superfici rispettose delle condizioni ai limiti, di quella "più liscia possibile". Queste procedure fanno un uso estensivo dei metodi di minimizzazione di funzionali tipici del calcolo delle variazioni, ovvero di quel campo dell'analisi che si occupa della ricerca dei punti estremali dei funzionali e delle loro proprietà. I funzionali, formulati sotto forma di integrali, rappresentano delle energie il cui minimo individua proprio la superficie cercata.

Con riferimento a superfici continue, sono sostanzialmente tre i tipi di energia adoperati (nulla vieta però che ne possano essere definite altre ad hoc): l'"energia di membrana" (1) - cosiddetta perché il suo minimo definisce superfici a membrana o di area minima, l'"energia di piastra sottile" (2) - che computa superfici di curvatura minima, e l'"energia di minima variazione di curvatura" (3), riportate nel seguito.

(1) Energia di Membrana e sua linearizzazione (energia di Dirichlet):

$$E_M(x) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det(T)} du dv \Rightarrow \\ \Rightarrow E_M(x) = \iint_{\Omega} (|x_u|^2 + |x_v|^2) du dv$$

(2) Energia di Piastra sottile e sua linearizzazione:

$$E_{IP}(x) = \iint_{\Omega} (k_1^2 + k_2^2) du dv \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{IP}(x) = \iint_{\Omega} (|x_{uu}|^2 + 2|x_{uv}|^2 + |x_{vv}|^2) du dv$$

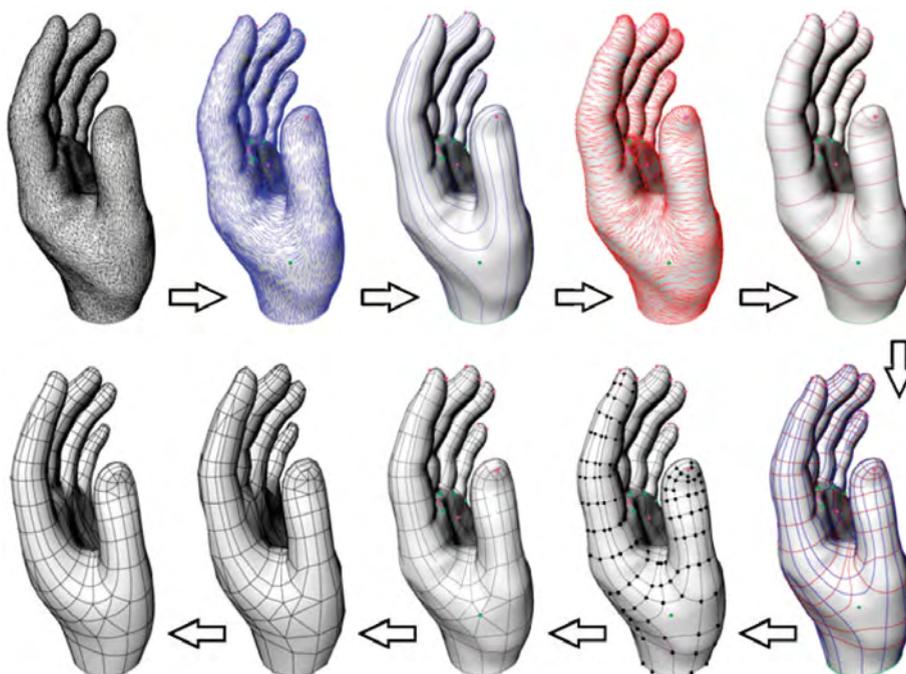


Fig. 24 - Quad Remeshing Anisotropo con Curve Based Sampling

(3) Energia di Minima Variazione di Curvatura:

$$E_{3,3}(x) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial k_1}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial k_2}{\partial t_2} \right)^2 dt_1 dt_2$$

dove  $x(u, v)$  è una funzione vettoriale (mappa) definita sul dominio bidimensionale di definizione della superficie  $\Omega(u, v), x_{ij}$  è la derivata parziale mista della mappa rispetto alle variabili  $u$  e  $v$ ,  $I$  è la prima forma fondamentale,  $k_1 = k_2$  e  $t_1 = t_2$  sono rispettivamente le curvature e le direzioni principali della superficie.

Attraverso la teoria del calcolo delle variazioni si dimostra che minimizzare quei tre integrali equivale a risolvere tre equazioni alle derivate parziali del tipo  $\Delta^k x(u, v) = 0$ , con  $k$  numero dell'equazione integrale. In generale l'ordine  $k$  determina la levigatezza massima al contorno, che è dimostrato essere pari a  $C^{k-1}$  (vedi figura 25).

Nell'ambito del *geometry processing* però non si ha mai a che fare con superfici continue e parametrizzate (come le NURBS ad esempio): le superfici sono tutte rappresentate attraverso mesh. Queste sono sostanzialmente un insieme di punti di coordinate note cui vengono associate "informazioni di connettività". Da un punto di vista computazionale compiere operazioni su una mesh risulta estremamente più semplice che eseguire le medesime azioni su una NURBS, ed è per questo che si preferiscono le prime alle seconde.

In quanto "superfici discrete" però, per poterle utilizzare è indispensabile "discretizzare" la teoria finora introdotta al riguardo delle superfici continue. In pratica è necessario definire l'analogo discreto degli operatori matematici continui: nella fattispecie l'operatore di interesse è quello di Laplace-Beltrami  $\Delta_S$  [19], che estende il significato dell'operatore di Laplace  $\Delta(Af(u, v) = f_{uu} + f_{vv})$  a funzioni definite su superfici  $S$ . Tale operatore è stato già definito [20][21] ed è una matrice quadrata  $L$  di ordine  $n$  ( $n$  numero dei vertici della mesh). Con tali premesse, risolvere le equazioni (1), (2) e (3) per una superficie discreta significa semplicemente risolvere tre sistemi di equazioni lineari analoghi del tipo:  $L^k x = 0$ , la cui soluzione restituirà proprio la posizione  $x$



Fig. 25 - Esempi di "superficie più liscia possibile" definiti rispettivamente con le equazioni (1), (2) e (3).

dei vertici della mesh più liscia possibile cercata.

## 5. PROGETTAZIONE INTEGRATA FORMA-STRUTTURA

Alla risoluzione dei problemi puramente geometrici succitati si affianca poi ovviamente la problematica per così dire "classica" e prettamente "ingegneristica" della progettazione strutturale degli involucri. Come già sottolineato questi vengono realizzati come superfici discrete derivanti dalla pannellizzazione della superficie di progetto: si ricade così nell'ambito delle cosiddette "grid-shells", ovvero di quelle strutture a guscio costituite da elementi portanti monodimensionali che vanno a costituire l'ossatura su cui poggiano i pannelli di chiusura portati.

Strutture siffatte sono state oggetto di studi ingegneristici approfonditi a partire dalla metà del XX secolo [22] [23] [24] [25] [26], cosicché ad oggi sono disponibili strumenti e metodi di progetto specifici: tra questi il *Transient Stiffness Method* [27] [28], il *Force Density Method* [26] [29] e il *Dynamic Relaxation Method* [30] [31] [32]. Tramite i suddetti metodi è possibile computare superfici discrete di tipo funicolare, ovvero superfici ottimali dal punto di vista statico che risultano essere in equilibrio mediante puri sforzi assiali di trazione (tenso-strutture) o di compressione (volte, gusci, *grid-shells*). Solo tramite un'accurata ricerca della forma ottimale infatti è possibile costruire strutture tanto ardite quali gli involucri a forma libera. Attualmente questi metodi sono implementati in software di calcolo strutturale avanzati quali GSA © della Oasys, ma si iniziano già a vedere le prime implementazioni semplificate dei medesimi algoritmi anche in *plug-in* per

software CAD quali Rhinoceros ©. I software FEM sono infatti strumenti dedicati alla fase di analisi strutturale, e mal si prestano alle esigenze di flessibilità delle fasi preliminari di progettazione; i *plug-in* integrati in ambiente CAD quali SMARTForm e RhinoVault invece si adattano perfettamente allo scopo.

### 5.1. Problemi Applicativi

Per dare una rappresentazione concreta ai concetti fin qui esposti, sviluppiamo il caso studio riportato in figura 26. In prima istanza si richiede di computare una superficie (evidentemente complessa) che rispetti i vincoli riportati in figura 26 ovvero che abbia:

- le curve in nero come contorno;
- altezza massima pari ad  $h$  metri in corrispondenza del punto centrale.

Successivamente si richiede inoltre che la superficie ottenuta venga pannellizzata con un *pattern* innovativo di tipo poligonale.

Così posto il problema è sotto vincolato, ovvero presenta più di una soluzione. Le condizioni poste non sono sufficienti a definire la superficie in modo univoco, e difatti esistono infinite superfici rispettose dei contorni e passanti per un punto predefinito: questa condizione di parziale indeterminazione semplifica notevolmente la soluzione del problema.

Con gli strumenti commerciali attuali si può sostanzialmente procedere in due modi: disegnare più superfici semplici parziali e raccordarle, oppure disegnare alcune curve intermedie e generare una superficie che interpoli queste curve e quelle di contorno. Il secondo approccio pare il più adeguato (anche se la scelta è ampiamente soggettiva), perciò nel seguito si riportano i risultati ottenuti con questa procedura (vedi figura 27).

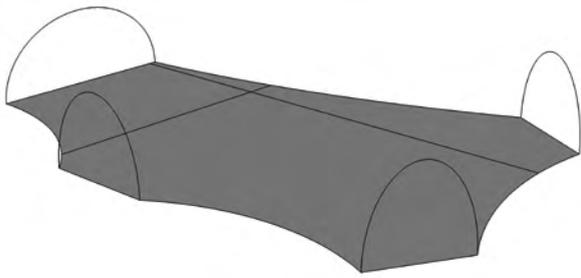


Fig. 26 - Caso studio di Involucro a Forma Libera: posizione del problema

Quel che risulta evidente dalla figura 27 è che innanzitutto il risultato raggiunto non è ottimale, ma soprattutto che c'è una pressoché totale mancanza di controllo sul processo di definizione della forma.

Se il problema fosse stato più vincolato lo spazio delle soluzioni sarebbe stato senz'altro più ristretto, ma al contempo, probabilmente, non saremmo riusciti a trovare neppure una superficie calzante. Dunque questo semplice esempio assieme a queste banali considerazioni rimarcano e

confermano quanto finora affermato, ovvero che attualmente mancano degli strumenti idonei per il progetto delle superfici a forma libera. Strumenti capaci di individuare una soluzione a problemi geometrici anche complessi, e che al contempo permettano di implementare tutta una serie di vincoli (di natura geometrica) pregni di conseguenze e di ricadute sostanziali sulla struttura portante, sul processo di pannellizzazione e sulla fase realizzativa in genere quali ad esempio:

- valori estremi delle curvature principali;
- valori limite del volume racchiuso;
- pseudo funicularità della superficie etc... .

Attualmente esistono software commerciali in grado di dare risposta ad alcuni dei succitati argomenti presi singolarmente (vedi il Plugin per Rhinoceros Evolute Tool [16] per quanto riguarda gli aspetti geometrici ed il Plugin per Rhinoceros SMARTForm [34] per gli aspetti statici), ma non c'è alcun software commerciale capace di generare un risultato

che tenga conto di tutti i suddetti aspetti contemporaneamente.

Per quanto riguarda la pannellizzazione, tra i software commerciali attualmente adoperati per la pannellizzazione di superfici complesse, uno dei più potenti è senz'altro il Plug-in per Rhinoceros Evolute Tool [16]. Sfruttando le piene potenzialità di questo strumento si possono raggiungere risultati eccellenti. Esso implementa un numero discreto, seppur limitato, di *pattern*: triangolare, quadrilatero, ed alcuni tipi poligonali tra cui quello esagonale (per il quale attualmente c'è un supporto limitato).

## 6. SVILUPPI FUTURI DELLA RICERCA

È già stato segnalato che all'Università di Pisa è stato di recente (2013) fondato il "Gruppo di Ricerca sull'Ingegnerizzazione delle Free Forms" GRIFF (<http://www2.ing.unipi.it/griff/>). Attraverso una sinergia con alcuni membri del VCLab (<http://vcg.isti.cnr.it/>), sezione del CNR-ISTI di Pisa, il GRIFF cerca di sviluppare strumenti per la progettazione delle forme libere. La direzione di sviluppo è quella dell'ottimale ingegnerizzazione dell'involucro, associata a quella della progettazione integrata forma-struttura.

In particolare la suddetta tecnica della "Centroidal Voronoi Tessellation" è già stata adoperata per ottenere un "pattern di remeshing" per Grid-Shells al contempo innovativo, esteticamente piacevole, tecnologicamente realizzabile ed in grado di adeguare la propria configurazione in ragione del regime statico prevalente della superficie oggetto di *remeshing*: lo *Statics Aware Voronoi Remeshing Scheme*. In figura 28 ne viene mostrata un'applicazione.

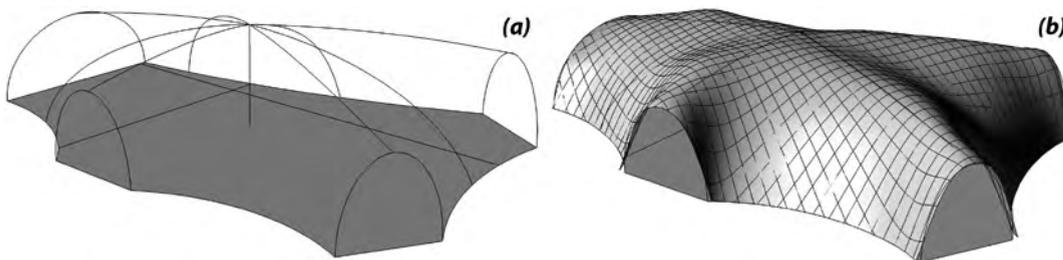


Fig. 27 - Forma Libera generata con Software commerciali

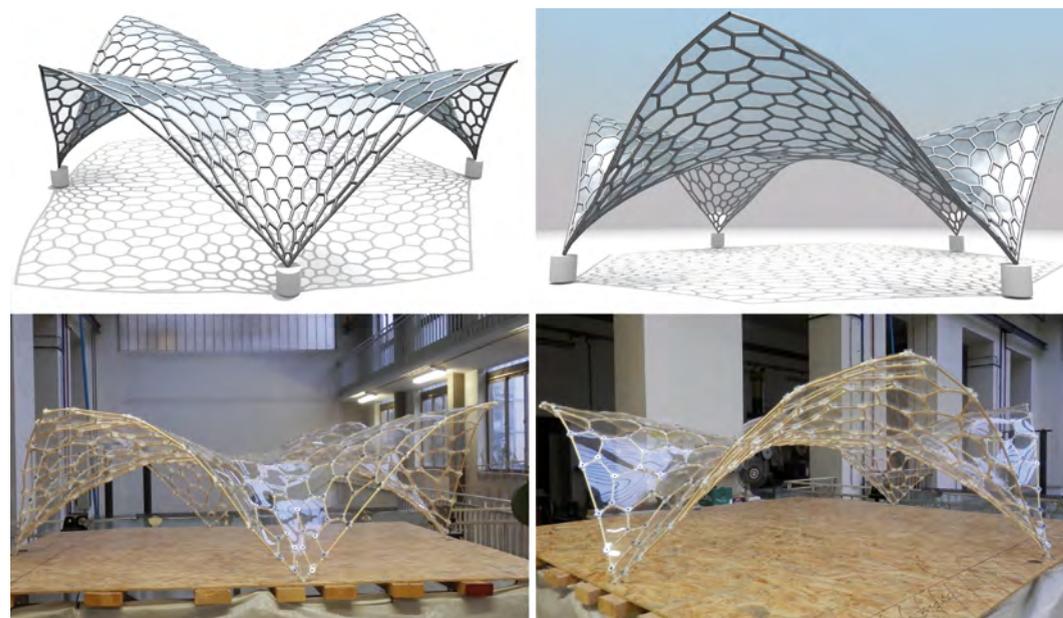


Fig. 28 - Caso studio di Grid-Shell ottenuta con l'innovativo Statics Aware Voronoi Remeshing Scheme sviluppato dal GRIFF di Pisa

## 7. CONCLUSIONI

Questo articolo rappresenta uno stato dell'arte aggiornato sui metodi di razionalizzazione dei progetti architettonici a forma libera. Sono stati discussi sia il problema della ricerca della forma ottimale (prettamente ingegneristico e relativamente datato) sia quello della ottima pannellizzazione dell'involucro complesso (prevalentemente geometrico e più recente).

Parallelamente è stata fornita una bibliografia nutrita, aggiornata ed interdisciplinare.

Nell'ultimo decennio sono stati introdotti numerosi contributi nel campo della *free form architecture*, tanto da far nascere un nuovo settore di ricerca: l'*Architectural Geometry*. Purtroppo l'Italia non è rimasta al passo con i tempi in questo settore e molta è la strada da percorrere per recuperare il gap di conoscenze che attualmente ci separa dallo

standard europeo. Il GRIFF con la sua attività di ricerca mira proprio a colmare queste lacune, ponendosi come interlocutore italiano privilegiato nel panorama di questa nuova disciplina sorta al confine tra l'architettura, la geometria e l'ingegneria delle strutture. Lo *Statics Aware Voronoi Remeshing Scheme*, qui mostrato brevemente in anteprima (vedi figura 28) costituisce il primo contributo originale di questo gruppo di ricerca.

**prof. dr. ing. Maurizio Froli,**

Associato di Tecnica delle Costruzioni, DESTeC - Dipartimento di Ingegneria dell'Energia, dei Sistemi, del Territorio e delle Costruzioni, Sezione di Strutture, Università di Pisa.

**dr. ing. Davide Tonelli,**

Dottorando, DESTeC-Dipartimento di Ingegneria dell'Energia, dei Sistemi, del Territorio e delle Costruzioni, Sezione Strutture, Università di Pisa.

## BIBLIOGRAFIA

[1] U. Füssler. *Design by Tool Design*. Vienna, 2008. *Advances in Architectural Geometry*. Vol. 1, pp. 37-40.

[2] N. Baldassini. *Glazing Technology: the Hidden Side of Free-Form Design*. Vienna, 2008. *Advances in Architectural Geometry*. Vol. 1, pp. 41-44.

[3] J. Schlaich. *New Trade Fair in Milan - grid topology and structural behaviour of a free-formed glass-covered surface*. 2005, *International Journal of Space Structures*, Vol. 20.

[4] D. Bommers, B. Levy, N. Pietroni, E. Puppo, C. Silva, M. Tarini, D. Zorin. *State of the art in Quad Meshing*. 2012, The Eurographics Association, pp. 159-182.

[5] J. Glymph, D. Shelden, C. Ceccato, J. Musse, and H. Schober. *A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets*. 2004, *Automation in Construction*, pp. 187-202.

[6] E. Catmull, J. Clark. *Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological Meshes*. September 1978, *Computer-Aided Design*, Vol. 10.

[7] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y. Yang, and W. Wang. *Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces*. 2006, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 25, pp. 681-689.

[8] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiehofer, W. Wang, N. Baldassini, and J. Wallner. *Freeform Surfaces from Single Curved Panels*. 2008, *ACM SIGGRAPH*, Vol. 27.

[9] S. Flory, H. Pottmann. *Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture*.

[10] H. Pottmann. *Architectural Geometry as Design Knowledge*, 2010, *Architectural Design*, Vol. 80, pp. 72-77.

[11] E. Aklman, V. Srinivasan. *Honeycomb Sub-division*. s.l. : Visualization Sciences Program, 2003.

[12] B. Cutler, E. Whiting. *Constrained Planar Remeshing for Architecture*. Montreal (Canada: ACM Press, 2007. *Proceedings of the Graphics Interface*. pp. 11-18.

[13] C. Troche. *Planar Hexagonal Meshes by Tangent Plane Intersection*. Vienna, 2008. *Advances in Architectural Geometry*. Vol. 1, pp. 57-60.

[14] B. Grunbaum, G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. s.l. : W. H. Freeman & Co., 1986.

[15] A. Schiftner, M. Hobinger, J. Wallner, and H. Pottmann. *Packing Circles and Spheres on Surfaces*. 2009, *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, Vol. 28(5).

[16] Evolute GmbH. <http://www.evolute.at/>. *Evolute Plugin for Rhinoceros*. [Online] Evolute GmbH.

[17] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. *Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms*. December 1999, *SIAM Rev.*, Vol. 41(4), pp. 637-676.

[18] Robert McNeel & Associates. *NURBS Modeler for Windows - Rhinoceros*.

[19] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. s.l. : NJ: Prentice Hall, 1976.

[20] A. I. Bobenko and B. A. Springborn. *A discrete Laplace-Beltrami operator*. 2006.

[21] A. I. Bobenko and Y. B. Suris. *Discrete Differential Geometry (Graduate Studies in Mathematics)*. s.l. : American Mathematical Society, 2008.

[22] J. Schlaich. *On some recent lightweight structures*. *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures*, 2002, Vol. 43.

[23] T. Bulenda, J. Knippers. *Stability of grid shells*. *Computers and Structures* : s.n., 2001, Vol. 79.

[24] L. Gründig, E. Moncrieff, P. Singer, D. Ströbel. *A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany*. 1970-1999. IASS-IACM, 2000.

[25] J. Lewis. *Tension Structures Form and behaviour*. s.l. : Thomas Telford Publishing, 2003.

[26] H. J. Schek. *The force density method for form finding and computation of general*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, Vol. 3, pp. 115-134.

[27] J. L. Meek. *Computer Methods in Structural Analysis*. s.l. : E.&F.N. Spon., 1991.

[28] J. W. Leonard. *Tension Structures. Behaviour and Analysis*. s.l. : Mc Graw-Hill, New York, 1985.

[29] K. Linkwitz. *Formfinding by the direct approach and pertinent strategies for the conceptual design of prepressed and hanging structures*. 1999, *International Journal of Space Structures*, Vol. 2, pp. 73-87.

[30] J. H. R. Otter. *Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation*. 1964, *Nuclear Structural Engineering*, Vol. 1, pp. 61-75.

[31] A. S. Day. *An introduction to dynamic relaxation*. 1965, *The Engineer.*, Vol. Technical Contributor Section, pp. 220-221.

[32] A.S. Day, J. H. Bunce. *Analysis of cable networks by dynamic relaxation*. 1970, *Civil Engineering and Public Works Review*, pp. 383-386.

[33] B. Grunbaum, G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. s.l. : W. H. Freeman & Co., 1986.

[34] Buro Happold. *Smart Solutions*. <http://www.smart-solutions-network.com/page/smart-form>. [Online]