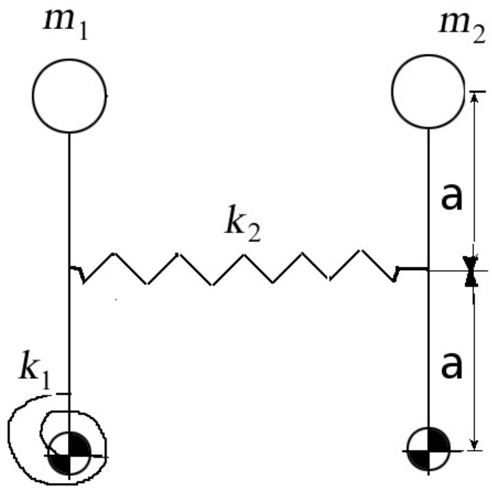
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 22 luglio 2013

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

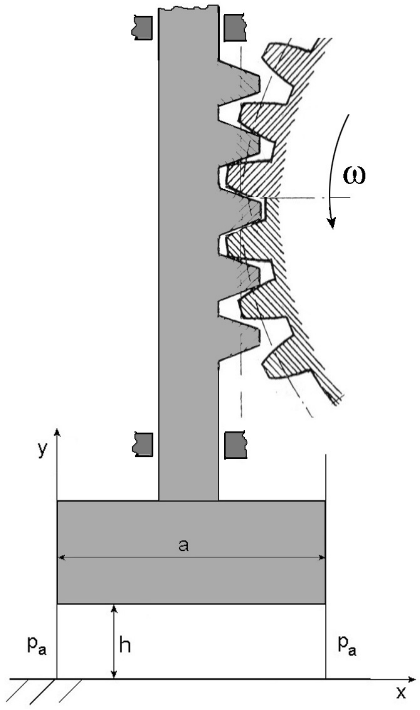


Esercizio 1

Il sistema mostrato in figura è libero di oscillare su un piano verticale (piccole oscillazioni, assenza di attrito). Le aste sono di massa trascurabile.

1) Si scrivano le equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema indicando chiaramente il sistema di riferimento scelto ed il significato fisico di ogni termine.
2) Si ricavino le espressioni delle pulsazioni proprie del sistema nel caso in cui m_1=m_2=m, k_1=a^2k e k_2=k e si possa trascurare la forza peso.
3) Si ricavino le espressioni generali della legge del moto delle due masse nell'ipotesi semplificativa del punto 2.
4) Si ricavino le espressioni della legge del moto delle due masse nel caso in cui all'istante iniziale l'asta collegata alla massa m_1 si trovi spostata di un angolo β rispetto alla condizione di riposo del sistema e quella collegata alla massa m_2 si trovi nella condizione di riposo ed entrambe le masse siano ferme.
5) Si spieghi cosa sono i modi principali di oscillazione del sistema e cosa comporta la condizione di ortogonalità dei modi stessi.

Esercizio 2

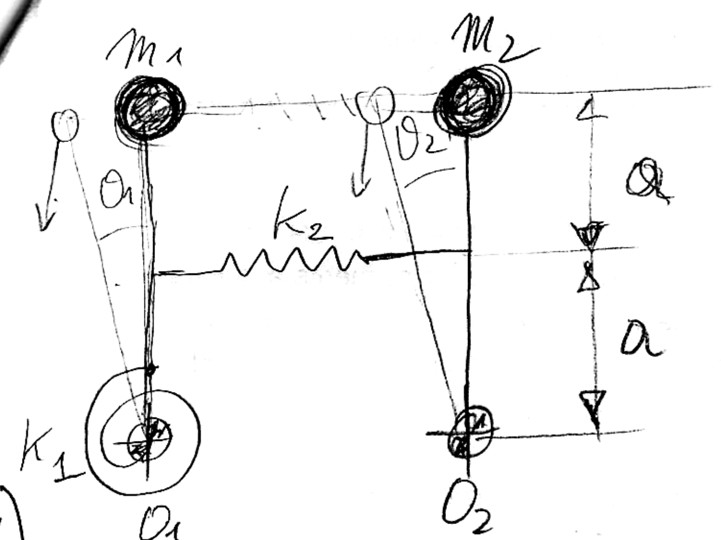


La paratia larga a e profonda b (in direzione perpendicolare al piano del disegno) viene spinta contro una parete fissa con velocità costante mediante un ingranaggio rocchetto-dentiera. Fra la paratia e la parete è presente del fluido Newtoniano con viscosità cinematica ν e densità ρ note, mentre la pressione ai bordi è uguale a quella atmosferica (p_a). Sono noti anche la velocità angolare ω, il numero dei denti z del rocchetto ed il loro modulo m. Si consideri trascurabile la caduta di pressione del liquido nella direzione ortogonale al piano del disegno; sia h l'altezza del meato.

1. Si ricavi l'espressione della sovrapressione $p-p_a$ nel meato, partendo dall'equazione di Reynolds (data) opportunamente semplificata per il caso in esame.
2. Si ricavi l'espressione della forza che il fluido esercita sulla paratia.
3. Si ricavi, in funzione dei dati del problema, l'espressione del momento da applicare al rocchetto per mantenere la velocità costante (si considerino trascurabili le masse e gli attriti nelle coppie, ad esclusione dell'attrito fra i denti valutabile mediante un rendimento noto η)
4. Si calcoli il valore numerico del momento.
5. Si disegnino alcuni profili di velocità nel meato disposti simmetricamente rispetto alla mezzeria della paratia, e si ricavi l'espressione, col relativo segno, della tensione tangenziale agente sulla paratia stessa (è data l'espressione generale della velocità del fluido in direzione x, da semplificare opportunamente).

a=20mm, b=0.1m, m= 4mm, z=20, ω=1 rad/s, ν=1 cm^2/s, ρ=1000kg/m^3, h=200μm, η=0.9

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right)=-6\,\mu\,U\,\frac{\partial h}{\partial x}-12\mu\,V \qquad v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,y\,(h-y)-U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$



[1]

1)

MOM. FORZA INERZIA — ELASTICA — PESO

$$\circlearrowleft O_1 \quad -m_1(2a)^2\ddot{\theta}_1 - K_2 a(a\theta_1 - a\theta_2) - K_1\theta_1 + m_1 g\, 2a\theta_1 = 0$$

$$\circlearrowleft O_2 \quad -m_2(2a)^2\ddot{\theta}_2 - K_2 a(a\theta_2 - a\theta_1) + m_2 g\, 2a\theta_2 = 0$$

---

2)

$$\begin{cases} 4a^2 m_1\ddot{\theta}_1 + K_2 a^2(\theta_1 - \theta_2) + K_1\theta_1 = 0 \\ 4a^2 m_2\ddot{\theta}_2 + K_2 a^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_1(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -A\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\theta_2(t) = B\cos(\omega_n t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -B\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\begin{cases} (K_2 a^2 + K_1 - 4a^2 m_1\omega_n^2)A - K_2 a^2 B = 0 \\ -K_2 a^2 A + (K_2 a^2 - 4a^2 m_2\omega_n^2)B = 0 \end{cases}$$

$$m_1 = m_2 = m \quad K_1 = a^2 K \quad K_2 = K$$

$$\begin{cases} 4a^2 m\ddot{\theta}_1 + Ka^2(\theta_1 - \theta_2) + a^2 K\theta_1 = 0 \\ 4a^2 m\ddot{\theta}_2 + Ka^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4m\ddot{\theta}_1 + 2K\theta_1 - K\theta_2 = 0 \\ 4m\ddot{\theta}_2 + K\theta_2 - K\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2K - 4m\omega_n^2)A - KB = 0 \\ -KA + (K - 4m\omega_n^2)B = 0 \end{cases}$$

$$2K^2 - 8Km\omega_n^2 - 4Km\omega_n^2 + 16m^2\omega_n^4 - K^2 = 0$$

$$16m^2\omega_n^4 - 12Km\omega_n^2 + K^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{6Km \pm \sqrt{(36-16)K^2m^2}}{16m^2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{16}\frac{K}{m} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}\frac{K}{m}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}} \quad \omega_{n2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}$$

$\boxed{2}$

3) $\left(2k - 4m\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}\right)A_1 - kB_1 = 0$

$\frac{16-12+4\sqrt{5}}{8}A_1 - \frac{8}{8}B_1 = 0 \qquad 4(1+\sqrt{5})A_1 - 8B_1 = 0 \qquad B_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1$

$\left(2k - 4m\frac{3+\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}\right)A_2 - kB_2 = 0$

$(16-12-4\sqrt{5})A_2 - 8B_2 = 0 \qquad 4(1-\sqrt{5})A_2 - 8B_2 = 0 \qquad B_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1\cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t + \varphi_2\right)\\ \theta_2(t) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1\cos(\quad) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2\cos(\quad)\end{aligned}}$$

4) $\dot\theta_1 = -A_1\omega_{n1}\sin(\omega_{n1}t+\varphi_1) - A_2\omega_{n2}\sin(\omega_{n2}t+\varphi_2)$

$\dot\theta_2 = -A_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}\omega_{n1}\sin(\quad) - A_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}\omega_{n2}\sin(\quad)$

$$\begin{cases}\theta_1(0) = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = \beta\\ \theta_2(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1\cos\varphi_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2\cos\varphi_2 = 0\\ \dot\theta_1(0) = -A_1\omega_{n1}\sin\varphi_1 - A_2\omega_{n2}\sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow A_1\omega_{n1}\sin\varphi_1 = -A_2\omega_{n2}\sin\varphi_2\\ \dot\theta_2(0) = -A_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}\omega_{n1}\sin\varphi_1 - A_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}\omega_{n2}\sin\varphi_2 = 0\end{cases}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}A_2\cancel{\omega_{n2}}\sin\varphi_2 - A_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cancel{\omega_{n2}}\sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow A_2\sin\varphi_2 = 0 \begin{cases}A_2 = 0\\ \varphi_2 = 0\end{cases}$

dalej 3: $A_1\sin\varphi_1 = 0 \begin{cases}A_1 = 0\\ \varphi_1 = 0\end{cases}$

$A_2 = 0 \begin{cases}A_1 = 0 \text{ XO}\\ \varphi_1 = 0 \rightarrow \begin{array}{l}1)\ A_1 = \beta\\ 2)\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1 = 0\end{array} \text{ XO}\end{cases}$

$\varphi_2 = 0 \begin{cases}\rightarrow A_1 = 0 \quad \begin{array}{l}1)\ A_2 = \beta\\ 2)\ A_2 = 0\end{array} \text{ XO}\\ \rightarrow \varphi_1 = 0 \rightarrow \begin{array}{l}1)\ A_1 + A_2 = \beta\\ 2)\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2 = 0\end{array}\end{cases}$

$$A_2 = \beta - A_1$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} A_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta - \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 = 0$$

$$\left(1+\sqrt{5} - 1+\sqrt{5}\right) A_1 + \left(1-\sqrt{5}\right)\beta = 0$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\beta$$

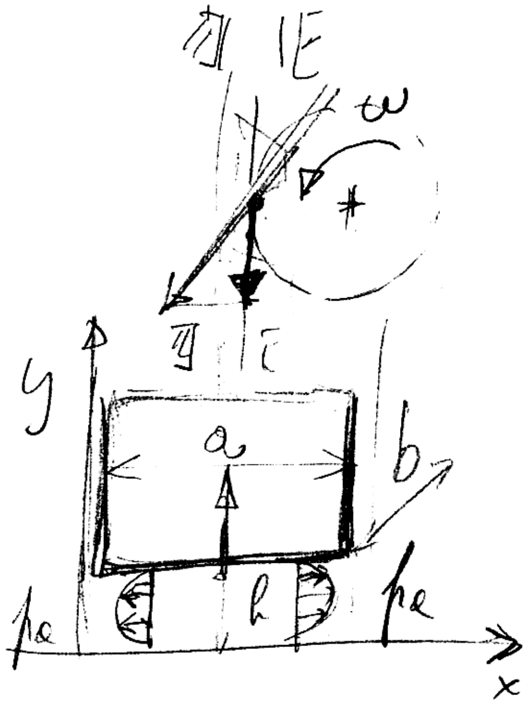
$$A_2 = \frac{10-5+\sqrt{5}}{10}\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\beta$$

$$\theta_1(t) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\beta\cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\beta\cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}\beta\cos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t\right) - \frac{\sqrt{5}}{5}\beta\cos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}\frac{k}{m}}\,t\right)$$

5) COND. ORTOG.

- RAPPORTI UNO POSITIVO E UNO NEGATIVO
- LEGGI SINUSOIDALI (UNO DEI 2 TERMINI MANCANTI)



CORPI DI MASSA TRASCURABILI

DATI:

$\omega = 1$ rad/s

$m = 4$ mm

$Z = 20$

$\ell = 20$ mm $\quad b = 1$ m

$\nu = (10^{-4}\ m^2/s) = 1\ cm^2/s$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$h = 200\ \mu m$

$\eta = 0.90$

$$\boxed{V = \omega R = \omega \cdot \frac{mZ}{2}}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3\mu V}{h^2}(2x-\ell)$$

1) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}h^3\right) = -12\mu V = -12\rho\nu V$$

$$\frac{d^2p}{dx^2}h^3 = -\frac{12\mu V}{h^3} \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu V}{h^3}x + C_1 \qquad p = -\frac{12\mu V}{h^3}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$\cancel{p_e} = -\frac{12\mu V}{h^3}\frac{\ell^2}{2} + C_1\ell + \cancel{p_e} \qquad C_1 = \frac{6\mu V\ell}{h^3} \qquad p - p_e = \frac{6\mu V}{h^3}x(\ell - x) = \frac{3\rho\nu\omega m Z}{h^3}x(\ell-x)$$

2) $$P_1 = \int_0^a (p-p_e)\,dx = \frac{6\mu V}{h^3}\int_0^\ell (\ell x - x^2)\,dx = \frac{6\mu V}{h^3}\left[\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\ell = \frac{6\mu V}{h^3}\,\frac{3\ell^3 - 2\ell^3}{6} = \frac{\mu V \ell^3}{h^3}$$

$$P = \frac{\mu V\ell^3 b}{h^3}$$

3) $$M_0 = P\cdot R = \frac{\rho\nu V\ell^3 b}{h^3}\,\frac{mZ}{2} = \frac{\rho\nu\ell^3 b}{h^3}\cdot\frac{m^2Z^2}{4}\cdot\omega$$

4) $$= \frac{1000\ \frac{kg}{m^3}\cdot 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}\cdot(2\cdot10^{-2})^3\ m^3\cdot 1\ m\cdot(4\cdot10^{-3})^2\ m^2\cdot(20)^2\cdot 1\ \frac{rad}{s}}{(200\cdot10^{-6})^3\ m^3\cdot 4} = \frac{8\cdot10^{-4}\cdot4\cdot1}{8\cdot10^{-12}\cdot4}$$

$$= \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 16\ Nm \qquad \eta = \frac{M_0}{M} \Rightarrow M = \frac{M_0}{\eta} = \frac{16}{0.90} = 17.8\ Nm$$

$$v_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\, y(h-y)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^3}(\ell - 2x)$$

$$u = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{6\mu V}{h^3}(\ell-2x)\, y(h-y) = -\frac{3V(\ell-2x)\,y(h-y)}{h^3}$$

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = -\frac{3\mu V}{h^3}(\ell-2x)(h-2y)$$

$$\tau\big|_{y=h} = \frac{3\mu V}{h^2}(\ell - 2x)$$ sulla paratia è l'opposto:

$$\tau = \frac{3\mu V}{h^2}(2x - \ell)$$