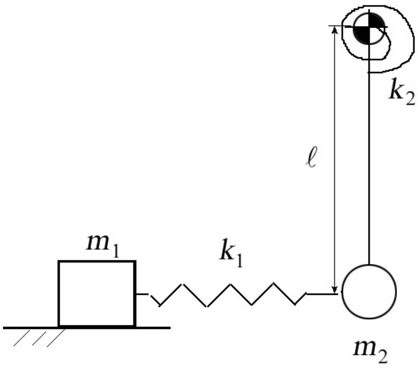
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 29 gennaio 2014

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

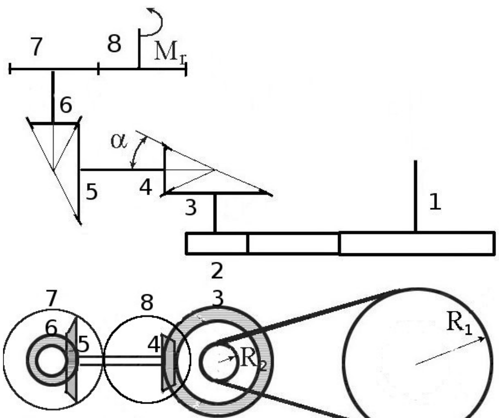
Esercizio 1



Il sistema mostrato in figura è libero di oscillare su un piano verticale (piccole oscillazioni, assenza di attrito). L'asta è di massa trascurabile.

1) Si scrivano le equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema indicando chiaramente i sistemi di riferimento scelti ed il significato fisico dei singoli termini.
2) Si ricavino le espressioni delle pulsazioni proprie del sistema, spiegando il procedimento seguito, nel caso in cui m_1=m_2=m, k_1=$2k$ e k_2=$3k\ell^2$ e si possa trascurare la forza peso.
3) Si ricavino le espressioni generali della legge del moto delle due masse nell'ipotesi semplificativa del punto 2.
4) Si ricavi la legge del moto delle due masse nel caso in cui all'istante iniziale la massa m_1 si trovi nella posizione di riposo, l'asta collegata alla massa m_2 sia ruotata in senso antiorario di un angolo 2α rispetto alla condizione di riposo, ed entrambe le masse siano ferme.

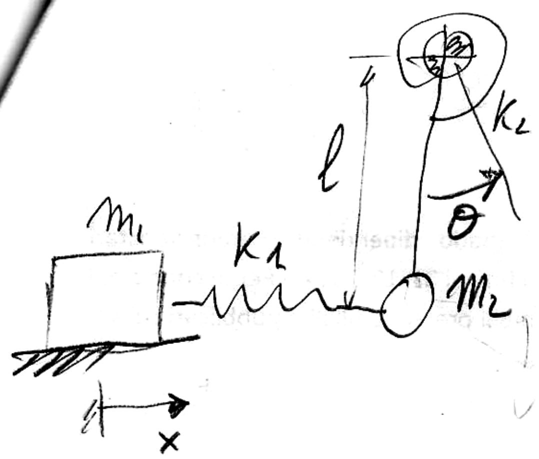
Esercizio 2



La trasmissione in figura è costituita da una trasmissione con cinghia, due coppie di ruote coniche ed una coppia di ruote cilindriche. L'ingresso del moto avviene dall'albero della puleggia 1; il momento resistente utile noto M_r agisce sull'albero della ruota 8 ingranante con la 7 il cui albero è solidale con la ruota conica 6 che ingrana con la 5. La ruota conica 4 è solidale con la 5 ed ingrana con la 3 il cui albero è solidale con la puleggia 2.
Sono noti i raggi R_1 e R_2 delle pulegge, collegate mediante una cinghia piatta, il coefficiente d'attrito f fra cinghia e pulegge, l'angolo di strisciamento β, l'angolo α di semiapertura del cono primitivo della ruota 4 (gli assi delle ruote 3 e 4 sono ortogonali fra loro), il numero di denti delle ruote 5, 6, 7 e 8, il rendimento del rotismo η_r. In funzione delle grandezze note:

1. si riportino le espressioni dei rapporti di trasmissione della trasmissione con cinghia (τ_c=ω_2/ω_1) e dell'ingranaggio costituito dalle ruote coniche 3 e 4 (τ_i=ω_4/ω_3); si ricavino inoltre l'espressione ed il valore numerico del rapporto di trasmissione totale (τ=ω_8/ω_1);
2. si ricavino le espressioni ed i valori numerici del momento prodotto dalla ruota dentata sull'albero 3 e del momento motore da applicare all'albero 1;
3. si ricavino le espressioni ed i valori numerici delle forze agenti nei due rami della trasmissione con cinghia (si trascuri l'effetto della forza centrifuga).
4. Si descrivano gli aspetti fondamentali della lubrificazione del contatto fra denti di ruote dentate.

$R_1 = 20$ cm, $R_2 = 10$ cm, $\alpha = 30$, $z_5 = 40$, $z_6 = z_7 = 25$, $z_8 = 20$, $\eta_r = 90\%$, $M_r = 9$ Nm, $\beta = \pi/2$, $f = 0.3$



$$K_1 = 2k$$
$$K_2 = 3kl^2$$
$$m_1 = m_2 = m$$

1) ORIG. IN POS. RIPOSO SISTEMA

FORZA D'IN. — F. ELASTICA

① $$-m_1\ddot{x} - k_1(x - l\theta) = 0$$

② $$-m_2 l^2\ddot{\theta} - k_1(l\theta - x)l - k_2\theta - m_2 g\, l\theta = 0$$

MOM. FORZ D'IN. — MOM. ELAST. — MOM. EL. TORS. — MOM. FORZA PESO

2) $$\begin{cases} m\ddot{x} + 2k(x - l\theta) = 0 \\ m l^2\ddot{\theta} + 2k(l\theta - x)l + 3kl^2\theta = m l^2\ddot{\theta} + 5kl^2\theta - 2klx = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = X\cos(\omega_n t + \varphi)$$
$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\begin{cases} (2k - m\omega_n^2)X - 2kl\Theta = 0 \\ -2kX + (5kl - ml\omega_n^2)\Theta = 0 \end{cases}$$

SIST. OMOGENEO ; PER SOLUZ. ≠ DA BANALE ⇒ DET. COEF. = 0

$$(2k - m\omega_n^2)(5k - m\omega_n^2)\cancel{l} - 4k^2\cancel{l} = 0$$

$$10k^2 - 2km\omega_n^2 - 5km\omega_n^2 + m^2\omega_n^4 - 4k^2 = 0$$

$$m^2\omega_n^4 - 7km\omega_n^2 + 6k^2 = 0$$

$$\omega_n^2 = \frac{7km \pm \sqrt{49k^2m^2 - 24k^2m^2}}{2m^2} = \frac{(7\pm 5)k\cancel{m}}{2m^{\cancel{2}}} = \begin{cases} \dfrac{K}{m} \\ 6\dfrac{K}{m} \end{cases}$$

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega_{n_2} = \sqrt{6\frac{K}{m}}$$

$$\left(2k - m\frac{k}{m}\right)X_1 - 2kl\Theta_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 2l\Theta_1$$

$$\left(2k - m\frac{6k}{m}\right)X_2 - 2kl\Theta_2 = 0 \Rightarrow X_2 = -\frac{l}{2}\Theta_2$$

$$\theta(t) = \Theta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) + \Theta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$$

$$x(t) = 2l\Theta_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) - \frac{l}{2}\Theta_2 \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$$

4) $\dot\theta(0) = \dot x(0) = 0$

$x(0) = 0 \quad \theta(0) = 2\alpha$

$$\dot\theta = -\Theta_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) - \Theta_2\sqrt{\frac{6k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t + \varphi_2\right)$$

$$\dot x = -2l\Theta_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\quad) + \frac{l}{2}\Theta_2\sqrt{\frac{6k}{m}}\sin(\quad)$$

$$\begin{cases} \dot\theta(0) = -\Theta_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi_1 - \Theta_2\sqrt{\frac{6k}{m}}\sin\varphi_2 = 0 \rightarrow \Theta_1 = -\Theta_2\sqrt{6}\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \\ \dot x(0) = -2l\Theta_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi_1 + \frac{l}{2}\Theta_2\sqrt{\frac{6k}{m}}\sin\varphi_2 = 0 \rightarrow +2\cancel{\sin\varphi_1}\Theta_2\sqrt{6}\frac{\sin\varphi_2}{\cancel{\sin\varphi_1}} + \frac{\Theta_2}{2}\sqrt{6}\sin\varphi_2 = 0 \\ x(0) = 2l\Theta_1\cos\varphi_1 - \frac{l}{2}\Theta_2\cos\varphi_2 = 0 \\ \theta(0) = \Theta_1\cos\varphi_1 + \Theta_2\cos\varphi_2 = 2\alpha \end{cases}$$

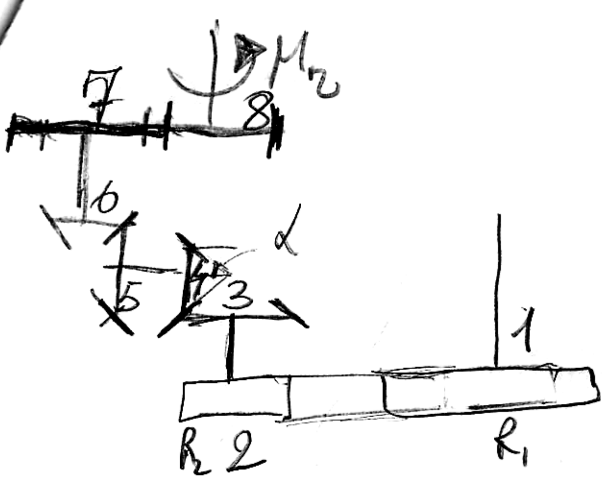
$\Theta_2(3\sqrt{6})\sin\varphi_2 = 0$ → $\varphi_2 = 0$ / $\Theta_2 = 0$

SOST. nella 1ª: $\Theta_1\sin\varphi_1 = -\Theta_2\sqrt{6}\cdot 0 = 0$ → $\cancel{\Theta_1 = 0}$ / $\varphi_1 = 0$

$$\begin{cases} \text{III} \Rightarrow 2\Theta_1 - \frac{\Theta_2}{2} = 0 \Rightarrow \Theta_2 = 4\Theta_1 \Rightarrow \Theta_2 = \frac{8}{5}\alpha \\ \text{IV} \Rightarrow \Theta_1 + \Theta_2 = 2\alpha \Rightarrow \Theta_1 + 4\Theta_1 = 2\alpha \Rightarrow \Theta_1 = \frac{2\alpha}{5} \end{cases}$$

$$\theta(t) = \frac{2}{5}\alpha\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{8}{5}\alpha\cos\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t$$

$$x(t) = \frac{4}{5}\alpha l\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \frac{4}{5}\alpha l\cos\sqrt{\frac{6k}{m}}\,t$$



$R_1 = 20$ cm
$R_2 = 10$ cm
$\alpha = 30°$
$z_5 = 40$
$z_6 = 25$
$z_7 = 25$
$z_8 = 20$

$\eta_r = 90\%$
$M_r = 9$ Nm
$\beta = \pi/2$
$f = 0.3$

1) $R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau_c = \frac{R_1}{R_2}$

$\tau_i = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4} = \frac{\cos\alpha_4}{\sin\alpha_4} = ctg\,\alpha$ $\quad \tau_r = ctg\,\alpha \frac{z_5}{z_6}\frac{z_7}{z_8} = \frac{\omega_8}{\omega_3}$ con $\omega_3 = \omega_2$

$\tau = \frac{\omega_8}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2} ctg\,\alpha \frac{z_5}{z_6}\frac{z_7}{z_8} = \frac{\cancel{20}}{\cancel{10}}\sqrt{3}\,\frac{\cancel{40}}{\cancel{25}}\frac{\cancel{25}}{\cancel{20}} = 4\sqrt{3} = 6.93$

2) $\frac{M_r\omega_8}{M_3\omega_3} = \eta_r \Rightarrow M_3 = \frac{M_r\omega_8}{\eta_r\omega_3} = M_r\frac{\tau_r}{\eta_r} = M_r\frac{ctg\,\alpha}{\eta_r}\frac{z_5}{z_6}\frac{z_7}{z_8} =$

$= \cancel{9}\sqrt{3}\,\frac{\cancel{40}}{\cancel{25}}\frac{\cancel{25}}{\cancel{20}}\frac{1}{0.9} = 20\sqrt{3}$ Nm $= 34.64$ Nm

$M_1\omega_1 = M_2\omega_2 \Rightarrow M_1 = M_2\frac{\omega_2}{\omega_1} = M_3\frac{R_1}{R} = M_r\frac{ctg\,\alpha}{\eta_r}\frac{z_5z_7}{z_6z_8}\frac{R_1}{R_2} = 40\sqrt{3}$ Nm $= 69.28$ Nm

3) $\boxed{M_2 = M_3 = (T_1 - T_2)R_2}$ oppure: $M_1 = (T_1 - T_2)R_1$

$T_1 = T_2 e^{f\beta}$

$T_2(e^{f\beta}-1)R_2 = M_r\frac{ctg\,\alpha}{\eta_r}\frac{z_5z_7}{z_6z_8} \Rightarrow T_2 = \frac{M_r\,ctg\,\alpha\,\frac{z_5z_7}{z_6z_8}}{R_2\eta_r}\frac{1}{(e^{f\beta}-1)} = 575.5$ N

$T_1 = \frac{M_r}{R_2}\frac{ctg\,\alpha}{\eta_r}\frac{z_5z_7}{z_6z_8}\frac{e^{f\beta}}{e^{f\beta}-1} = \frac{9}{0.1}\frac{\sqrt{3}}{0.9}\frac{40\cdot 25}{25\cdot 20}\frac{e^{0.3\pi/2}}{e^{0.3\pi/2}-1} = 921.9$ N

4) LUBRIF. EHL

- HD
- $\mu = \mu_0 e^{\alpha p}$
- DEFORMAZIONI