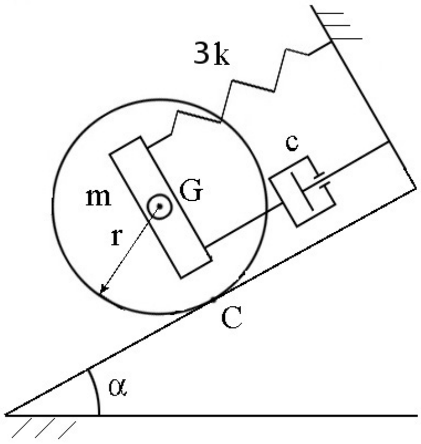
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 10 gennaio 2014

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Esercizio 1

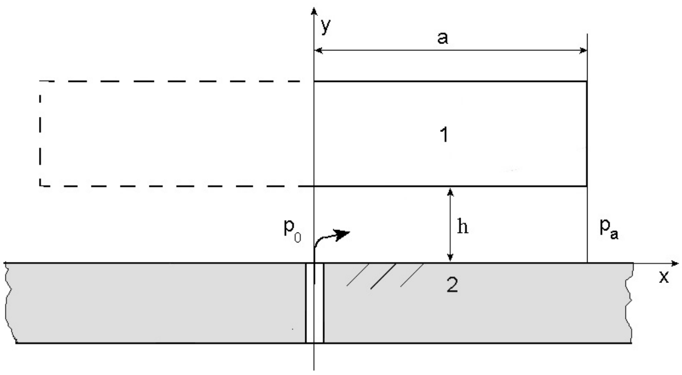


Una ruota di raggio r e massa m rotola senza strisciare su un piano inclinato di α rispetto all'orizzontale vincolata al telaio da una molla di costante elastica $3k$ ed uno smorzatore viscoso di costante c.

1. Si scriva l'equazione D'Alembert, specificando chiaramente il sistema di riferimento usato e le azioni agenti sul corpo.
2. Si ricavino le espressioni ed i relativi valori numerici della pulsazione naturale e del fattore di smorzamento, e si indichi di che tipo di moto si tratta.
3. Si ricavi la legge del moto della ruota sapendo che all'istante iniziale il sistema è nella posizione di riposo ed il baricentro G della ruota ha una velocità nota v verso il basso (parallela al piano inclinato).
4. Si determinino il periodo, il valore massimo dello spostamento dalla posizione di riposo ed il relativo istante, e si tracci il grafico dettagliato dello spostamento in funzione del tempo.

$m = 4$ kg, $k = 2$ N/m, $c = 9$ Ns/m, $v = 7$ m/s

Esercizio 2

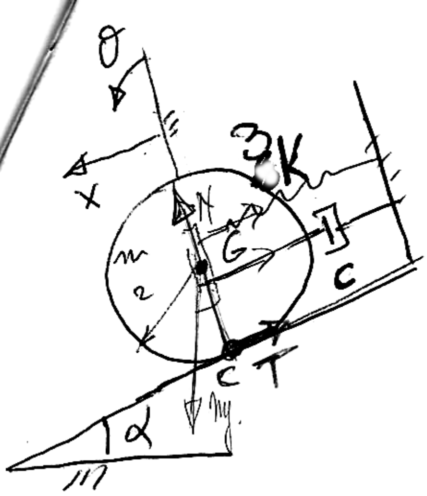


La coppia lubrificata rappresentata in figura ha la dimensione ortogonale al piano del disegno molto maggiore (teoricamente infinita) rispetto alle altre (larghezza, a, e altezza del meato, h, costante lungo la direzione x). Non vi sono movimenti relativi fra i due corpi; la pressione dell'olio è uguale a p_0 all'ingresso nel meato e a quella atmosferica p_a all'estremità della coppia. Sono noti la viscosità del lubrificante μ, la pressione p_0, la portata per unità di lunghezza q_x in direzione x e la dimensione a.

1. Usando la forma dell'equazione di Reynolds semplificata per il caso in esame, si ricavino le espressioni della pressione e del carico per unità di lunghezza in funzione dei dati del problema.
2. Si riportino in forma grafica l'andamento della sovrapressione nel meato ed i profili di velocità nelle sezioni di ingresso e di uscita nonché in quella centrale
3. Usando l'espressione velocità v_x semplificata per il caso in esame, si ricavi l'espressione della portata per unità di lunghezza in funzione delle grandezze note e di h.
4. Si calcoli il valore numerico del carico per unità di lunghezza e dell'altezza h e, data la rugosità superficiale delle due superfici R_{q1} e R_{q2}, si verifichi il regime di lubrificazione riportando adeguate giustificazioni teoriche sui regimi di lubrificazione.
5. Si ricavino le espressioni ed i valori numerici della tensione tangenziale agente lungo x sulla superficie del corpo 1, della forza d'attrito per unità di lunghezza e del coefficiente d'attrito.

μ=0.01 Pa s, a= 20 cm, p_0=1.01 10^7 N/m^2, p_a=10^5 N/m^2, q_x=0.09 mm^2/s, R_{q1}=3 µm, R_{q2}=4 µm,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right)=-6\,\mu\,U\,\frac{\partial h}{\partial x}-12\mu\,V\,, \qquad v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,y\,(h-y)-U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$



$k = 2\,N/m \quad m = 4\,kg \quad c = 9\,\frac{Ns}{m} \quad V = 7\,m/s$

$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = V = 7\,m/s$

1) $x = 0$ nella posiz. di riposo del sistema (e $\theta = 0$) $\quad x = r\theta$

$-m\ddot{x} - c\dot{x} - 3kx - T = 0$

$G: \; -\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + Tr = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\frac{r^2}{r}\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr\frac{\ddot{x}}{r}$

dalla 1° eq.: $\quad m\ddot{x} + c\dot{x} + 3kx + \frac{1}{2}m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 3kx = 0}$

OPPURE:

$C: \; -3kx\cdot r - c\dot{x}r - \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 3kx = 0$

$\left(\bar{M}_{iC} = -J_C\ddot{\theta} - \underbrace{\overline{CG}\wedge m\bar{a}_C}_{//}\right)$

2) $\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{\frac{3}{2}m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2}{4}} = 1\,rad/s$

$\chi = \frac{c}{2\sqrt{3k\cdot\frac{3}{2}m}} = \frac{c}{3\sqrt{2km}} = \frac{9}{3\sqrt{2\cdot 2\cdot 4}} = 0.75 < 1$ PERIODICO SMORZATO

3) $x(t) = Ae^{-\chi\omega_n t}\sin(\omega_s t + \varphi) \quad$ con $\omega_s = \omega_n\sqrt{1-\chi^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}\,rad/s = 0.66\,rad/s$

$x(0) = 0 \Rightarrow A\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$\dot{x}(t) = -A\chi\omega_n e^{-\chi\omega_n t}\sin(\omega_s t + \varphi) + Ae^{-\chi\omega_n t}\cos(\omega_s t + \varphi)\cdot\omega_s$

$\dot{x}(0) = -A\chi\omega_n\sin\varphi + A\omega_s\cos\varphi = V \Rightarrow A\omega_s = V \Rightarrow A = \frac{V}{\omega_s}$

$\boxed{x(t) = \frac{V}{\omega_n\sqrt{1-\chi^2}}e^{-\chi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\chi^2}\,t)} = \frac{4\cdot 7}{\sqrt{7}}e^{-0.75t}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t$

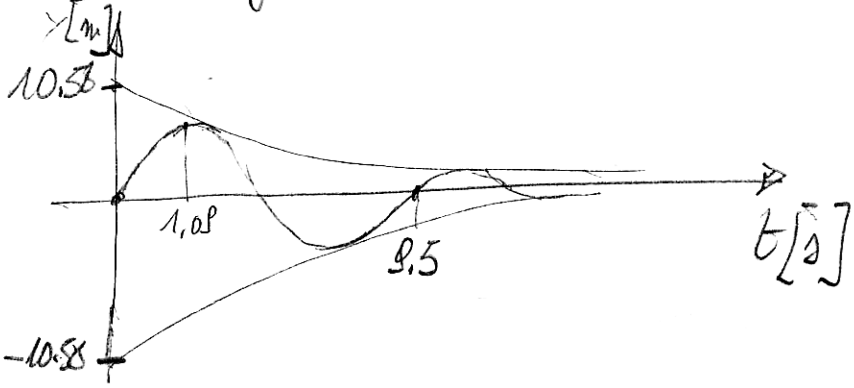
4) $x(t) = 4\sqrt{7}e^{-0.75t}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t = 10.58e^{-0.75t}\sin 0.66t$

$$\dot{x}(t) = \cancel{10.58}(-0.75)\,\cancel{e^{-0.75t}}\sin 0.66t + \cancel{10.58\,e^{-0.75t}}\cos 0.66t \cdot 0.66 = 0$$

$$-0.75\sin 0.66t + 0.66\cos 0.66t = 0$$

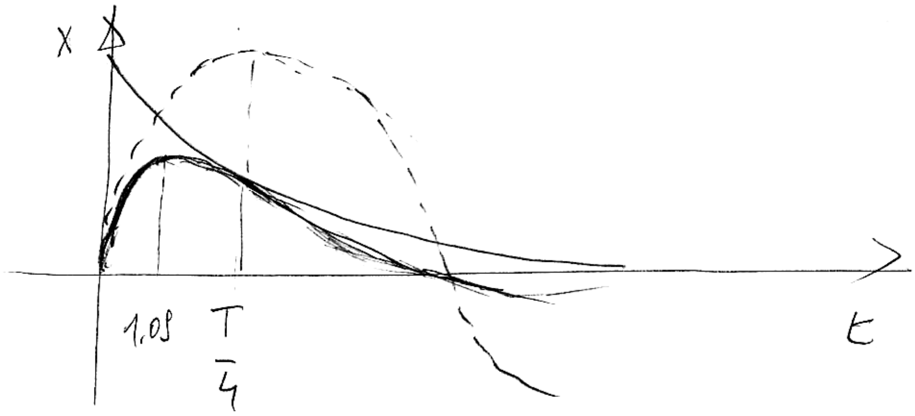
$$-0.75\,\mathrm{tg}\,0.66t + 0.66 = 0 \qquad \mathrm{tg}\,0.66t = \frac{0.66}{0.75} = 0.88$$

$$0.66t = \mathrm{arctg}\,0.88 \Rightarrow 0.72\ \mathrm{rad} \Rightarrow t = \frac{0.72\ \mathrm{rad}}{0.66\ \mathrm{rad/s}} = 1.09\ \mathrm{s}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 9.5\ \mathrm{s}$$

$$x_{max} = 10.58\, e^{-0.75 \cdot 1.09} \sin 0.66 \cdot 1.09 = 3.08\ m$$



1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}h^3\right)=0$ $\boxed{V_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\,y(h-y)}$

$\frac{dp}{dx}=c \Rightarrow \int_{p_0}^{p} dp = \int_0^x c\,dx \Rightarrow p-p_0 = cx$

per $x=\ell$ $p=p_a \Rightarrow p_a-p_0=c\ell$

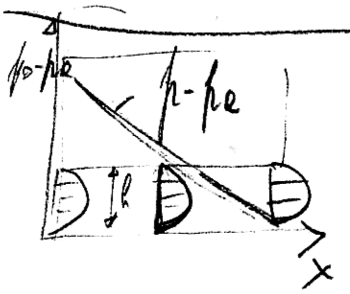
$c=\frac{p_a-p_0}{\ell}$

$p-p_0=\frac{p_a-p_0}{\ell}x \Rightarrow p = p_0 - \frac{p_0-p_a}{\ell}x$

ovvero: $p-p_a=(p_0-p_a)\left[1-\frac{x}{\ell}\right]$ SOVRAPPRESSIONE

$\boxed{P_1=(p_0-p_a)\cdot\frac{\ell}{2}}$

2)



3) $V_x = -\frac{1}{2\mu}\left(-\frac{p_0-p_a}{\ell}\right)y(h-y)=\frac{p_0-p_a}{2\mu\ell}\,y(h-y)$

$q_x=\int_0^h \frac{p_0-p_a}{2\mu\ell}(yh-y^2)\,dy=\frac{p_0-p_a}{2\mu\ell}\cdot\left[h\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^h=$

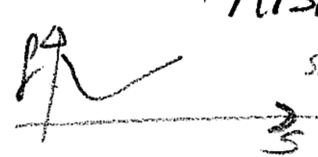
$\boxed{P_1=(101-1)10^5\cdot\frac{20\cdot10^{-2}}{2}=10^6\frac{N}{m}}$ $=\frac{p_0-p_a}{2\mu\ell}\cdot\left[\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right]=+\frac{1}{12\mu}\frac{p_0-p_a}{\ell}h^3$

4) $h^3=\frac{12\mu\ell q_x}{p_0-p_a}=\frac{12\cdot0.01\cdot2\cdot10^{-1}\cdot(9\cdot10^{-8})}{10^7}=\frac{2^2\cdot3\cdot10^{-2}\frac{Ns}{m^2}\cdot2\cdot10^{-1}m\cdot3^2\cdot10^{-8}\frac{m^2}{s}}{10^7\frac{N}{m^2}}$

$=\frac{(2\cdot3)^3\cdot10^{-11}}{10^7}m^3=\frac{6^3}{10^{18}}m^3$

$h=\sqrt[3]{\frac{6^3}{(10^6)^3}}=\frac{6}{10^6}m=6\cdot10^{-6}m=6\ \mu m=0.006\ mm$

$\Lambda=\frac{6}{\sqrt{9+16}}=\frac{6}{5}=1.2$ MISTA



5) $\tau = \mu \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\cancel{\mu}\dfrac{1}{2\cancel{\mu}}\left(-\dfrac{p_0-p_e}{l}\right)(h-2y) = \dfrac{p_0-p_e}{2l}(h-2y)$

$-\tau\Big|_{y=h} = -\dfrac{p_0-p_a}{2l}(h-2h) = \dfrac{p_0-p_e}{2l}h = \dfrac{10^7\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\cdot 10^{-6}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 20\cdot 10^{-2}} = 150\,\dfrac{N}{m^2}$

$T_1 = \dfrac{p_0-p_e}{2l}h\cdot l = \dfrac{p_0-p_a}{2}h = \dfrac{10^7\,\overset{3}{\cancel{6}}\,10^{-6}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 30\,\dfrac{N}{m}$

$f = \dfrac{T_1}{P_1} = \dfrac{30}{10^6} = 3\cdot 10^{-5}$

$f = \dfrac{\cancel{p_0-p_e}}{\cancel{2}}h\,\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{(p_0-p_e)}\,l} = \dfrac{h}{l} =$