

Pisa, 11 giugno 2013

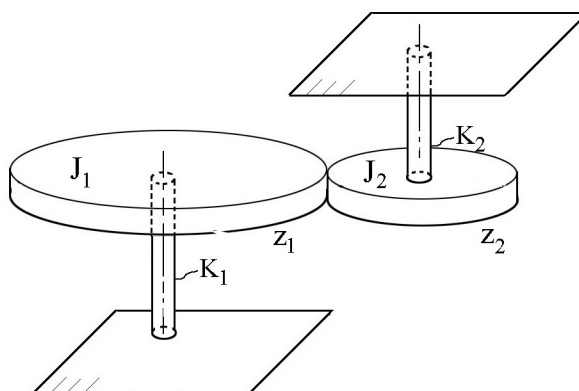
ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Esercizio 1

La ruota dentata 1, con z_1 denti e momento d'inerzia J_1 rispetto al suo asse di rotazione, collegata al telaio con una molla torsionale di costante K_1 , ingrana senza attrito con una ruota dentata 2 (z_2 denti e momento d'inerzia J_2 rispetto al suo asse di rotazione) collegata al telaio con una molla torsionale di costante K_2 . L'unico moto possibile è quello di rotazione attorno agli assi.

- 1) Si scriva l'equazione di D'Alembert del sistema.
- 2) Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della pulsazione propria del sistema.
- 3) Si scriva l'espressione della legge del moto sapendo che all'istante iniziale il sistema si trova nella posizione di riposo e la ruota 1 ha una velocità angolare pari a 4 rad/s; si tracci il grafico della funzione trovata.
- 4) Sapendo che l'angolo di pressione è 30° e che il modulo è 2mm, si ricavi l'espressione della forza scambiata fra i denti ed il suo valore massimo.

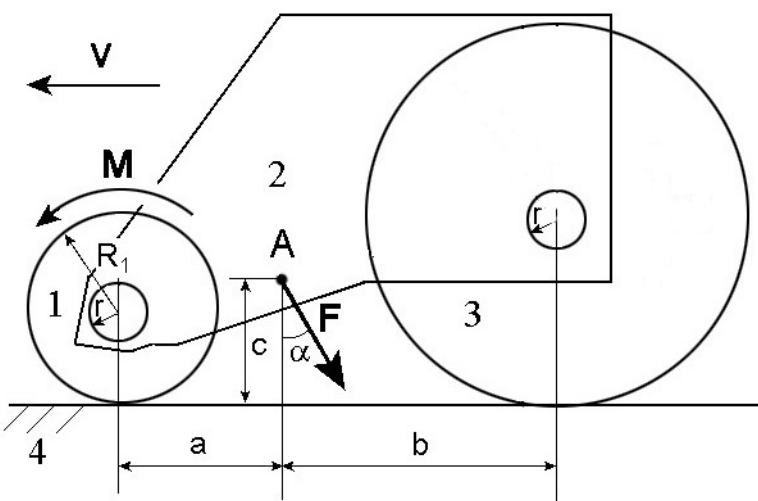


- 5) Nell'ipotesi in cui nel sistema sia presente uno smorzamento viscoso pari a 2 Nms, si verifichi il tipo di moto e se ne tracci un grafico coerente con le condizioni iniziali del punto 3.

$$K_1 = 0.8 \text{ Nm}, K_2 = 0.3 \text{ Nm}, z_1 = 40, z_2 = 20, J_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2, J_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

Esercizio 2

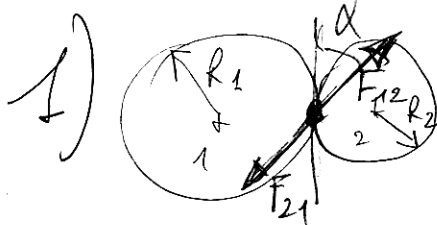
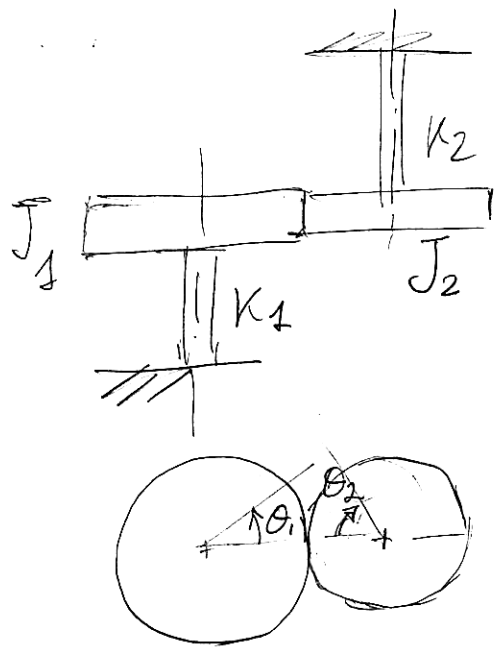
Il veicolo schematizzato in figura avanza nel verso indicato. La ruota 1 è motrice, la 3 trascinata. È nota la forza esterna F , applicata nel punto A, formante un angolo α rispetto alla verticale. Siano δ il parametro d'attrito volvente nel contatto di rotolamento fra le ruote ed il suolo 4, f il coefficiente d'attrito nelle coppie rotoidali di raggio r fra le ruote 1 e 3 ed il corpo 2, e f_a il coefficiente di aderenza fra le ruote ed il suolo.



1. Si ricavino graficamente le reazioni del suolo sul veicolo e si indichino tutte le azioni agenti sulle ruote 1 e 3 spiegando chiaramente i criteri adottati, particolarmente riguardo agli accoppiamenti con attrito.
2. Si risolva il punto precedente nel caso in cui sia trascurabile l'attrito di rotolamento fra ruote e suolo e quello di strisciamento nella coppia rotoidale fra ruota 3 e corpo 2; si ricavino inoltre le espressioni analitiche delle forze agenti sulle ruote.
3. Si ricavino l'espressione ed il valore numerico del momento motore M e del rendimento η nel caso del punto precedente.
4. Si spieghi quale condizione deve essere rispettata per non aver strisciamento nel contatto fra ruota e suolo e si verifichi se vi è strisciamento nel caso del punto 2.

$$a = 0.3 \text{ m}, b = 0.6 \text{ m}, c = 0.3(2\sqrt{3} - 3) \text{ m}, R_1 = 0.3 \text{ m}, r = 4 \text{ cm}, f_a = 1.2, f = 0.25, F = 10000 \text{ N}, \alpha = 30^\circ$$

1



$$\begin{cases} -J_1 \ddot{\theta}_1 - K_1 \theta_1 - F_{21} r_1 \cos \alpha = 0 \\ -J_2 \ddot{\theta}_2 - K_2 \theta_2 + F_{12} r_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

DAVA 2^a EQ.: $F_{12} = \frac{J_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \theta_2}{r_2 \cos \alpha}$

SOST. NELLA 1^a EQ.: $J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1 + \left(J_2 \ddot{\theta}_2 + K_2 \theta_2 \right) \frac{r_1}{r_2} = 0$
 essendo $F_{21} = F_{12}$

ESSENDO $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$ e $\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{z_1}{z_2} \theta_1$ SI OTTIENDE:

$$\left[J_1 + J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[K_1 + K_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right] \theta_1 = 0$$

$$2) \omega_n = \sqrt{\frac{K_1 + K_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2}{J_1 + J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2}}$$

$K_1 = 0.8 \text{ Nm}$ $K_2 = 0.3 \text{ Nm}$ $z_1 = 40$ $z_2 = 20$ $J_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$ $J_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{0.8 + 0.3 \cdot 4}{6 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-2} \cdot 4}} = \sqrt{\frac{2}{18 \cdot 10^{-2}}} = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$$

3) VON ESSENDECI SFIORZATORI, LA LEGGE DEL MOTORE E':

$$\theta_1(t) = A \cos(\omega_n t + \varphi)$$

$\theta_1(0) = 0$ $\dot{\theta}_1(0) = 4 \text{ rad/s}$

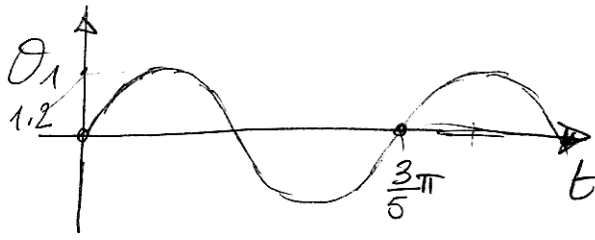
$$\dot{\theta}_1 = -A \omega_n \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$\theta_1(0) = A \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\dot{\theta}_1(0) = -A \omega_n \sin \varphi = 4 \rightarrow -A \omega_n = 4 \rightarrow A = -\frac{4}{\omega_n} = -1.2 \text{ rad}$

$$\theta_1(t) = 1.2 \cos\left(\frac{10}{3}t + \frac{\pi}{2}\right) = 1.2 \sin \frac{10}{3}t$$

②



$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi \cdot 3}{10} = \frac{3}{5}\pi \text{ s}$$

$$4) F_{21} = - \frac{J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1 \theta_1}{R_1 \cos \alpha}$$

$$\dot{\theta}_1 = 1.2 \cdot \frac{10}{3} \sin \frac{10}{3}t = 4 \sin \frac{10}{3}t$$

$$\ddot{\theta}_1 = -4 \cdot \frac{10}{3} \cos \frac{10}{3}t = -\frac{40}{3} \cos \frac{10}{3}t$$

$$m = 2 \text{ mm} \quad \alpha = 30^\circ$$

$$R_1 = \frac{m z_1}{2} = \frac{2 \cdot 40}{2} = 40 \text{ mm}$$

$$F_{21} = - \frac{6 \cdot 10^{-2} \left(-\frac{40}{3} \cos \frac{10}{3}t \right) + 0.8 \cdot 1.2 \sin \frac{10}{3}t}{40 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = - \frac{8}{\sqrt{3}} \sin \frac{10}{3}t \text{ N}$$

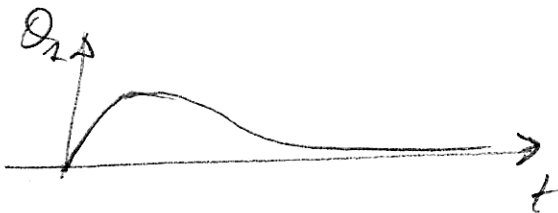
Il valore massimo è dunque $\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ N}$

NB.: segno diventa negativo
contro la rotte d'elica.

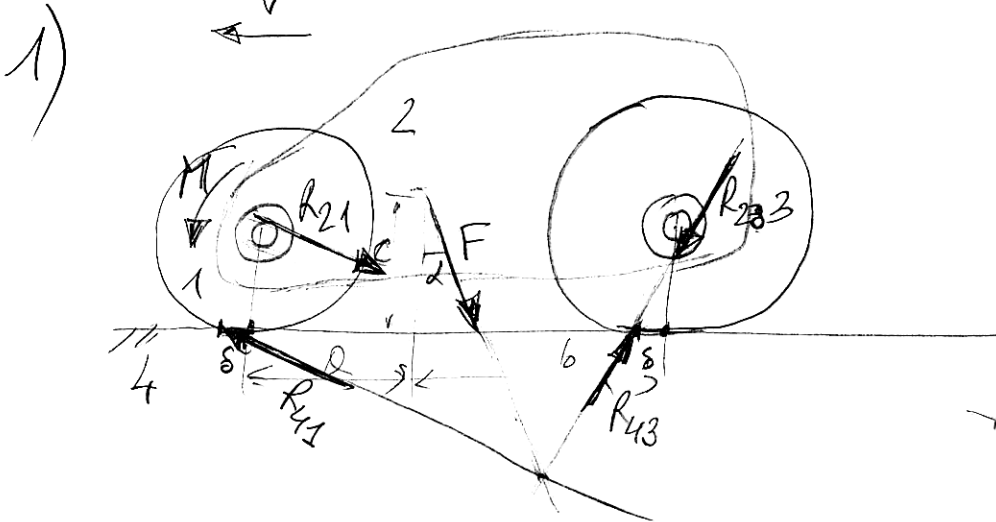
$$5) C = 2 \text{ Nms}$$

$$C_n = 2 \sqrt{\left[K_1 + K_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right] \left[J_1 + J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right]} = 2 \sqrt{218 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 6 \cdot 10^{-1} = 1.2 \text{ Nms}$$

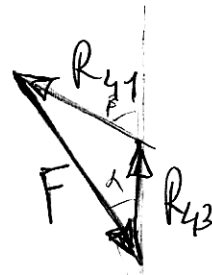
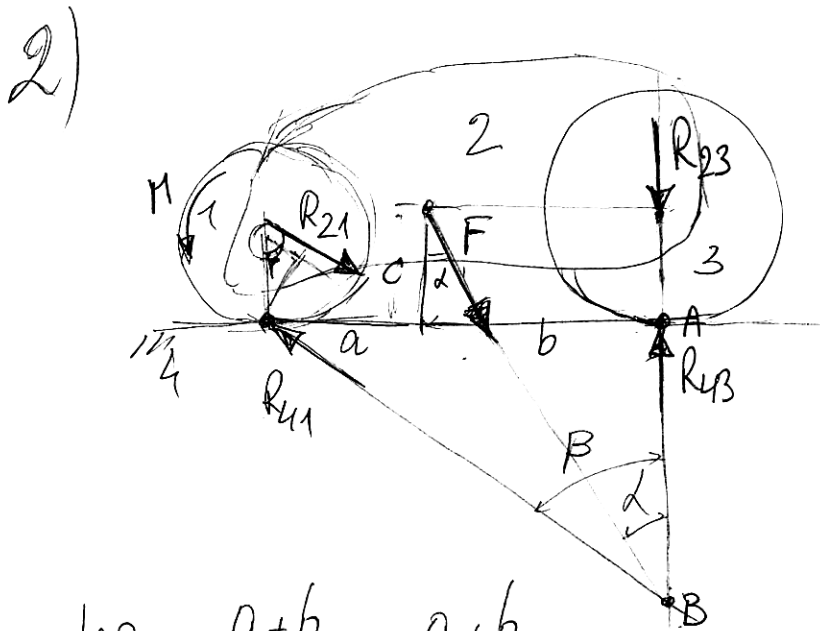
$C > C_n \Rightarrow$ MOTO APERIODICO SMORZATO



3



- SPOSTAMENTO DI δ DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA NEL CASO DI ROTOLAMENTO
- TANGENZA AL CIRCOLO DI ATTRITO DI RAGGIO $\rho = 2f$ DELLA FORZA NELLE COPPIE ROTODINAMICHE



$$\tan \beta = \frac{a+b}{AB} = \frac{a+b}{b \tan \alpha - c}$$

EQ. GLOBALE :

$$\begin{cases} \rightarrow F \cos \alpha - R_{41} \sin \beta = 0 \\ \uparrow - F \sin \alpha + R_{43} + R_{41} \cos \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow R_{41} = F \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} R_{43} &= F \cos \alpha - F \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta = F (\cos \alpha - \sin \alpha \cot \beta) = \\ &= F \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{b \tan \alpha - c}{a+b} \right) = F \frac{a \cos \alpha + c \sin \alpha}{a+b} \end{aligned}$$

$$R_{41} = \frac{F_{\text{end}} \sqrt{1 + \tan^2 \beta}}{\tan \beta} = F_{\text{end}} \frac{\sqrt{(b \tan \alpha - c)^2 + (a+b)^2}}{a+b} \quad (= 7071 \text{ N}) \quad (4)$$

$$R_{21} = R_{41} \quad R_{23} = R_{43} \quad (= 3666 \text{ N})$$

OPPORE:



$$\begin{cases} \rightarrow -R_{41x} + F_{\text{end}} = 0 \\ \uparrow R_{41y} - F_{\text{end}} + R_{43} = 0 \\ \circ - F_{\text{end}} \cdot c - F_{\text{end}} a + R_{43}(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$R_{41x} = F_{\text{end}}$$

$$R_{43} = \frac{F(c \tan \alpha + a \cos \alpha)}{a+b}$$

$$R_{41y} = F_{\text{end}} - \frac{F(c \tan \alpha + a \cos \alpha)}{a+b} = F \frac{b \cos \alpha - c \tan \alpha}{a+b} \quad (= 5000 \text{ N})$$

$$R_{41} = \sqrt{R_{41x}^2 + R_{41y}^2} = F \sqrt{\tan^2 \alpha + \left[\cos \alpha - \frac{c \tan \alpha + a \cos \alpha}{a+b} \right]^2}$$

$$3) M = R_{21} \left[R_1 \tan \beta + 2f \right] = F_{\text{end}} \frac{\sqrt{(b \tan \alpha - c)^2 + (a+b)^2}}{a+b} \left(R_1 \frac{a+b}{\sqrt{\quad}} + 2f \right) =$$

$$M = F_{\text{end}} \left(R_1 + 2f \frac{\sqrt{(b \tan \alpha - c)^2 + (a+b)^2}}{a+b} \right) \frac{a+b}{\sqrt{\quad}}$$

$$M_0 = F R_1 \tan \alpha$$

$$\eta = \frac{M_0}{M} = \frac{R_1}{R_1 + 2f \frac{\sqrt{(b \tan \alpha - c)^2 + (a+b)^2}}{a+b}}$$

$$a = 0.3 \text{ m} \quad b = 0.6 \text{ m} \quad c = 0.3(2\sqrt{3}-3) \text{ m} \quad \alpha = 30^\circ \quad F = 10'000 \text{ N} \quad f = 0.25$$

$$\tan \beta = \frac{0.3 + 0.6}{0.6\sqrt{3} - 0.6\sqrt{3} + 0.9} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$$R_1 = 0.3 \text{ m} \quad r = 4 \text{ cm}$$

$$M = 10'000 \frac{1}{2} \left(0.3 + 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0.25 \frac{\sqrt{(0.6\sqrt{3} - 0.6\sqrt{3} + 0.9)^2 + (0.3+0.6)^2}}{0.3+0.6} \right) = 5000(0.3 + 10^{-2}\sqrt{2})$$

$$M_0 = 10'000 \cdot 0.3 \frac{1}{2} = 1500 \text{ Nm}$$

$$\eta = 95.5\%$$

4) R_{41} INCLINATA MENO DI φ_2 RISPETTO A VERTICALE (NORMALE A CONTATTO) 5

$$\beta < \varphi_2$$

$$\tan \beta < f_2$$

$$1 < 1.2$$

NO STRISCIAmento