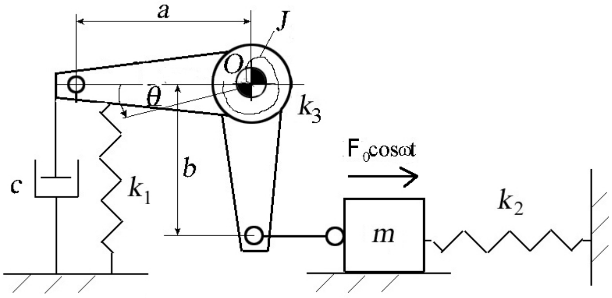
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 14 settembre 2017

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



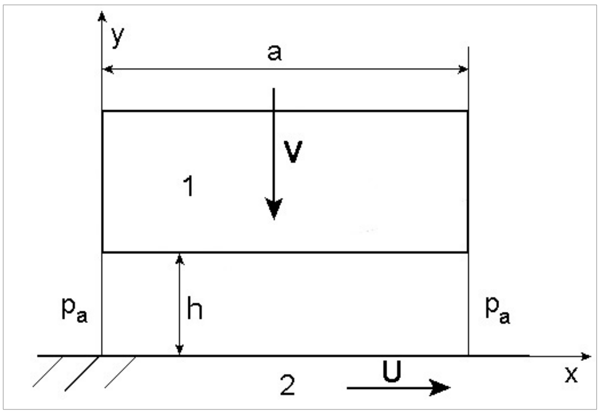
Un corpo cilindrico con momento d'inerzia J rispetto all'asse di rotazione è accoppiato rotoidalmente al telaio in presenza di una molla torsionale di costante k_3. Il cilindro è collegato rigidamente a due bracci rigidi di massa trascurabile. All'estremità del braccio orizzontale sono collegate una molla di costante elastica k_1 ed uno smorzatore viscoso di costante c. All'estremità del braccio verticale è incernierata un'asta di massa trascurabile collegata a sua volta con una massa m libera di muoversi senza attrito su un piano orizzontale e collegata al telaio tramite una molla di costante k_2. Alla massa è applicata una forza $F_0\cos\omega t$ che produce piccole oscillazioni del sistema.

1. Si ricavi l'equazione di D'Alembert del sistema, specificando chiaramente il sistema di riferimento usato e il significato dei vari termini.
2. Si ricavino le espressioni ed i valori numerici della pulsazione naturale del sistema e del fattore di smorzamento.
3. Si ricavino le espressioni di ampiezza e fase dell'oscillazione a regime.
4. Si traccino i grafici delle espressioni del punto precedente in funzione della pulsazione ω della forza eccitatrice sapendo che Fo=2 N; si tracci infine il grafico della legge del moto θ(t) quando ω=1 rad/s.

Dati: a=5 cm, b=10 cm, m=1 kg, J=0.03 kgm^2, k_1=4 N/m, k_2=1 N/m, k_3=0.02 Nm, c=6.4 Ns/m

Esercizio 2

La coppia lubrificata rappresentata in figura ha dimensione b lungo la direzione z ortogonale al piano del disegno, larghezza a e altezza del meato h costante lungo le direzioni x e z. Si supponga che siano trascurabili il flusso e la caduta di pressione lungo la direzione z (ovvero b>>a) e sia μ la viscosità dinamica del lubrificante. Il corpo 1 si muove con velocità V diretta lungo y mentre il corpo 2 è fermo (U=0); la pressione è uguale a quella atmosferica p_a alle estremità della coppia.

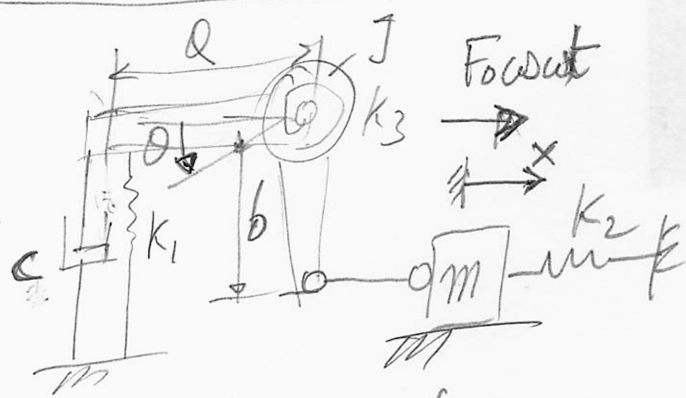


1. Si ricavi l'espressione della pressione e si riporti in forma grafica il suo andamento.
2. Si ricavino le espressioni della velocità nella sezioni con x=0, a/4, a/2, 3/4a e a in funzione delle grandezze note e se ne disegnino i relativi profili nel meato.
3. Si ricavino le espressioni del carico totale e della portata totale Q che esce lateralmente lungo la direzione x.
4. Si ricavino le espressioni della tensione tangenziale agente lungo x sulla superficie del corpo 1 e su quella del corpo 2 nonché la forza tangenziale totale agente su ognuno dei 2 corpi.

Dati: equazione di Reynolds e andamento della velocità del lubrificante (da semplificare per il caso in esame)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right)=-6\,\mu\,U\,\frac{\partial h}{\partial x}-12\mu\,V\quad,\qquad v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\,y\,(h-y)-U\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

COMPITO 14/09/17



$a = 5\,cm$ $m = 1\,kg$

$b = 10\,cm$ $J = 0.03\,kg\,m^2$

$k_1 = 4\,N/m$

$k_2 = 1\,N/m$ $F_0 = 2\,N$

$k_3 = 0.02\,Nm$

$c = 6.4\,Ns/m$

1

1) $x = b\theta$ ORIGINE IN POSIZ. RIPOSO IN ASSENZA DI ECCITAZIONE

$$T - m\ddot{x} - k_2 x + F_0\cos\omega t = 0 \rightarrow T = m\ddot{x} + k_2 x - F_0\cos\omega t$$

$$-Tb - J\ddot{\theta} - k_3\theta - k_1 a\theta a - c a\dot{\theta} a = 0$$

$$(m\ddot{x} + k_2 x - F_0\cos\omega t)b + J\ddot{\theta} + k_3\theta + k_1 a^2\theta + c a^2\dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{\underbrace{(J+mb^2)\ddot{\theta}}_{\text{MOM. FORZE D'INERZIA}} + \underbrace{ca^2\dot{\theta}}_{\text{MOM. VISCOSO}} + \underbrace{(k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3)\theta}_{\text{MOM. ELASTICO}} = \underbrace{F_0 b\cos\omega t}_{\text{MOM. ECCIT.}}}$$

2) $$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3}{J + mb^2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 25\cdot 10^{-4} + 10^{-2} + 2\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-2} + 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{4\,10^{-2}}{4\,10^{-2}}} = 1\,rad/s$$

$$\zeta = \frac{ca^2}{2\sqrt{(k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3)(J + mb^2)}} = \frac{6.4\cdot 25\,10^{-4}}{2\sqrt{4\,10^{-2}\,4\,10^{-2}}} = \frac{64\cdot 10^{-1}\,25\,10^{-4}}{2\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 200\,10^{-3} = 0.2$$

3) SOLUZ. A REGIME: $\theta(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$

$J^* = J + mb^2$

$C^* = ca^2$

$K^* = k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3$

$M_0^* = F_0 b$

$\dot{\theta} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi)$ $\ddot{\theta} = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi)$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE DI D'ALEMBERT:

$$-A\omega^2 J^*\cos(\omega t - \varphi) - C^* A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) + K^* A\cos(\omega t - \varphi) = M_0^*\cos\omega t$$

$\cos(\omega t - \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) = \mathrm{sen}\,\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi$

②

$$\begin{cases} A\left\{(K^*-J^*\omega^2)\cos\varphi + C^*\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\right\} = M_0^* \\ A\left\{(K^*-J^*\omega^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi - C^*\omega\cos\varphi\right\} = 0 \end{cases}$$

QUADRANDO e SOMMANDO:

$$A^2\left[(K-J^*\omega^2)^2+(C^*\omega)^2\right] = M_0^{*2}$$

$$A = \frac{M_0}{K^*}\,\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2x\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{F_0\,b\,/\,(K_1a^2+K_2b^2+K_3)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2x\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

DALLA SECONDA EQUAZIONE:

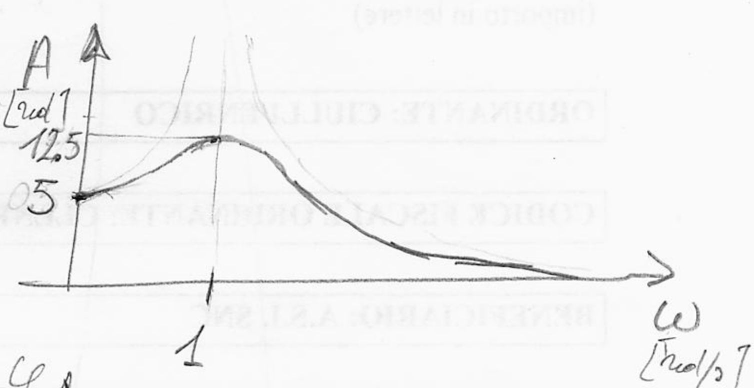
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{C^*\omega}{K^*-J^*\omega^2} = \frac{2x\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

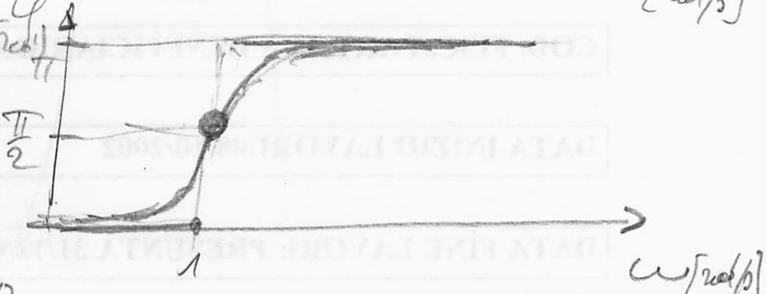
4) $$A = \frac{5}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.4\omega)^2}}$$

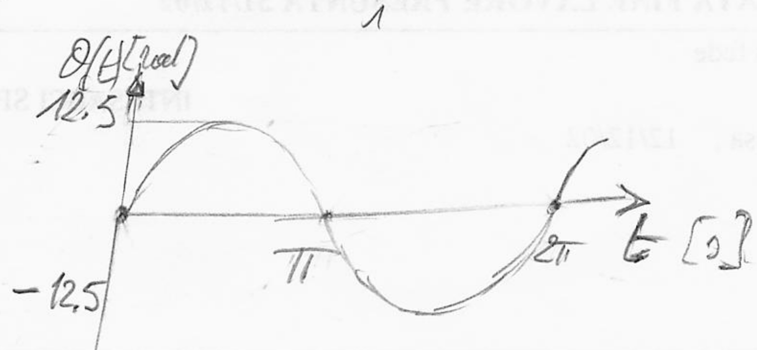
$$A(1) = \frac{5}{0.4} = 12.5\ \mathrm{rad}$$

$$\omega = 1\ \mathrm{rad/s}$$

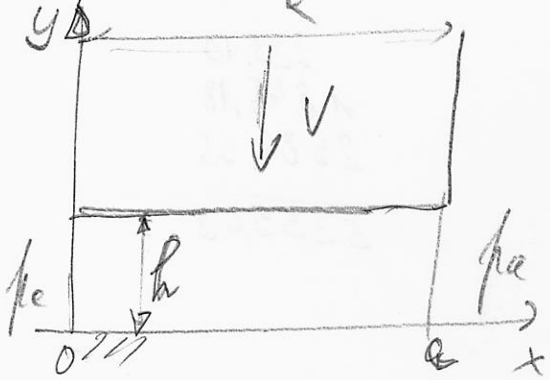
$$\theta(t) = 12{,}5\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = 12{,}5\,\mathrm{sen}\,t$$







3



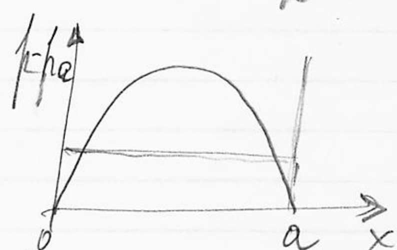
1) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}h^3\right) = -12\mu V$$

$$\frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{12\mu V}{h^3} \to \frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu V}{h^3}x + C_1 \to p = -\frac{12\mu V x^2}{2h^3} + C_1 x + C_2$$

$$p(0) = p_e \qquad p(a) = p_e$$

$$C_2 = p_a \qquad -6\mu V\frac{a^2}{h^3} + C_1 a + p_e = p_e \to C_1 = 6\mu\frac{Va}{h^3}$$

$$p = -6\mu\frac{Vx^2}{h^3} + \frac{6\mu V a}{h^3}x + p_e \to (p - p_e) = \frac{6\mu V x}{h^3}(a - x)$$



2) $$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^3}(a - 2x)$$

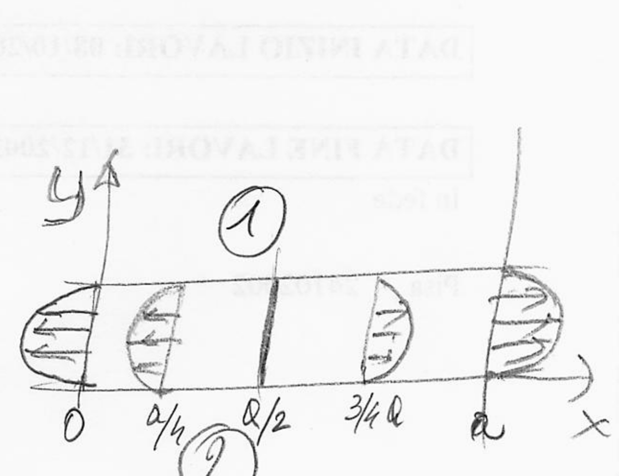
$$V_x = -\frac{1}{\cancel{2}\cancel{\mu}}\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cancel{\mu}V}{h^3}(a-2x)\,y(h-y)$$

$$V_x|_0 = -\frac{3V}{h^3}a\,y(h-y)$$

$$V_x|_{a/4} = -\frac{3}{2}\frac{V}{h^3}a\,y(h-y)$$

$$V_x|_{a/2} = 0$$

$$V_x|_{3/4a} = \frac{3}{2}\frac{V}{h^3}a\,y(h-y) \qquad V_x|_a = \frac{3V}{h^3}a\,y(h-y)$$



3) $P = b\int_0^a (p - p_e)\,dx = b\int_0^a \frac{6\mu V}{h^3}(ax - x^2)\,dx = \frac{6\mu V b}{h^3}\left[\frac{a\,a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right] =$

$= \frac{\mu V b a^3}{h^3}$

$Q = 2b\int_0^h v_x\big|_a\,dy = 2b\int_0^h \frac{3V}{h^3}a(hy - y^2)\,dy = \frac{6bVa}{h^3}\left[\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right] =$

$= bVa$ (NB: È IL VOLUME SCHIACCIATO NELL'UNITÀ DI TEMPO)

4) $\tau = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu\left(-\frac{3V}{h^3}\right)(a-2x)(h-2y)$

$\tau_{y=0} = -\frac{3\mu V}{h^3}(a-2x)h = -\frac{3\mu V}{h^2}(a-2x)$

$\tau_{y=h} = -\frac{3\mu V}{h^3}(a-2x)(-h) = \frac{3\mu V}{h^2}(a-2x)$

SULLA PARETE 1 È ESERCITATA: $-\tau_{y=h} = -\frac{3\mu V}{h^2}(a-2x)$

$T_1 = T_2 = b\int_0^a -\frac{3\mu V}{h^2}(a-2x)\,dx = -\frac{3\mu V}{h^2}b\left[ax - \frac{2x^2}{2}\right]_0^a = 0$

(IL FLUIDO AGISCE IN MANIERA OPPOSTA SULLE PARETI PER $x < \frac{a}{2}$ E $x > \frac{a}{2}$, QUINDI LE FORZE AGENTI SULLE DUE METÀ SI EQUILIBRANO)