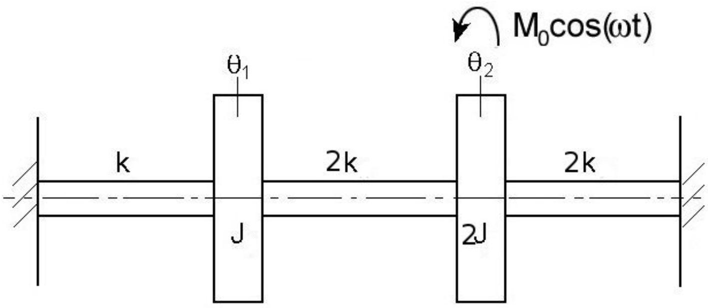
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 18 febbraio 2014

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

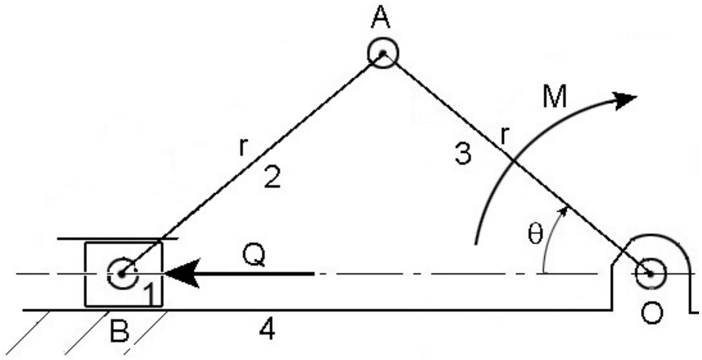
Esercizio 1



Il sistema mostrato in figura è libero di oscillare attorno ad un asse fisso. Il disco con momento d'inerzia rispetto all'asse J è collegato al telaio con una molla torsionale di costante k e al disco con momento d'inerzia 2J mediante una molla torsionale di costante 2k; il secondo disco è a sua volta collegato al telaio con una molla torsionale di costante 2k ed è soggetto all'azione di un momento $M_0\cos\omega t$.

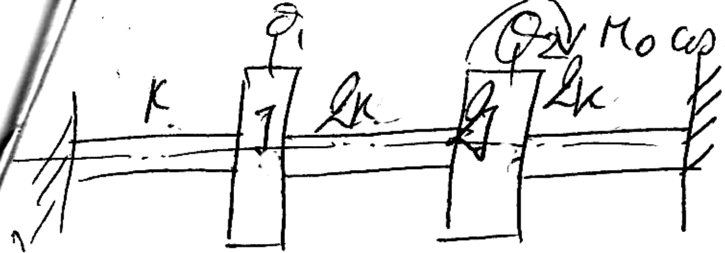
1) Si scrivano le equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema spiegando chiaramente il significato fisico dei singoli termini.
2) Si ricavino le espressioni delle ampiezze delle oscillazioni dei due dischi a regime.
3) Si realizzino i grafici dettagliati delle ampiezze delle oscillazioni del punto precedente al variare della pulsazione ω del momento eccitatore.
4) Si ricavi l'espressione della legge del moto del disco 1 per il valore della pulsazione ω per cui il disco 2 sta fermo e se ne realizzi il grafico dettagliato utilizzando i dati: M_O=12 Nm, raggio del disco 5 cm, massa del disco 2 kg, k=3 Nm.

Esercizio 2



Il manovellismo schematizzato in figura ha biella e manovella di uguale lunghezza *r*. Sulla manovella 3 agisce un momento resistente noto *M*. Si considerino le masse trascurabili. Per un generico angolo di manovella θ compreso fra 0 e $\pi/2$:

1) si rappresentino graficamente le azioni agenti su ogni corpo nei casi: a) di assenza di attrito; b) ci sia attrito solo nelle coppie rotoidali in A e B; c) ci sia attrito solo fra il corsoio 1 ed il telaio 4;
2) nel caso in cui ci sia attrito solo fra il corsoio ed il telaio (coefficiente d'attrito noto *f*) si ricavino le espressioni della forza motrice *Q* in presenza ed in assenza di attrito;
3) si ricavi l'espressione del rendimento del sistema nel caso del punto precedente e se ne calcoli il suo valore numerico con $\theta = \pi/4$ e f=0.25.
4) Si dimostri come, partendo dalla definizione di rendimento basata sui lavori, si possa ricavare l'espressione del rendimento istantaneo basata sul rapporto fra moduli di forze.



1)
$$\begin{cases} \underbrace{-k\theta_1 - 2k(\theta_1-\theta_2)}_{\text{MOMENTI ELASTICI}} \underbrace{-J\ddot{\theta}_1}_{\text{MOM. DELLE FORZE D'INERZIA}} = 0 \\ -2k(\theta_2-\theta_1) - 2k\theta_2 - 2J\ddot{\theta}_2 + \underbrace{M_0\cos\omega t}_{\text{MOM. ESTERNO}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + 3k\theta_1 - 2k\theta_2 = 0 \\ 2J\ddot{\theta}_2 + 4k\theta_2 - 2k\theta_1 = M_0\cos\omega t \end{cases}$$

2) Hp. sol.: $\theta_1(t) = A\cos\omega t \rightarrow \ddot{\theta}_1 = -A\omega^2\cos\omega t$

$\theta_2(t) = B\cos\omega t \rightarrow \ddot{\theta}_2 = -B\omega^2\cos\omega t$

$$\begin{cases} (3k-J\omega^2)A - 2kB = 0 \\ -2kA + (4k-2J\omega^2)B = M_0 \end{cases}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2k \\ M_0 & 4k-2J\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3k-J\omega^2 & -2k \\ -2k & 4k-2J\omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{2kM_0}{12k^2-6kJ\omega^2-4kJ\omega^2+2J^2\omega^4-4k^2} =$$

$$= \frac{2kM_0}{2J^2\omega^4-10kJ\omega^2+8k^2} = \frac{kM_0}{J^2\omega^4-5kJ\omega^2+4k^2}$$

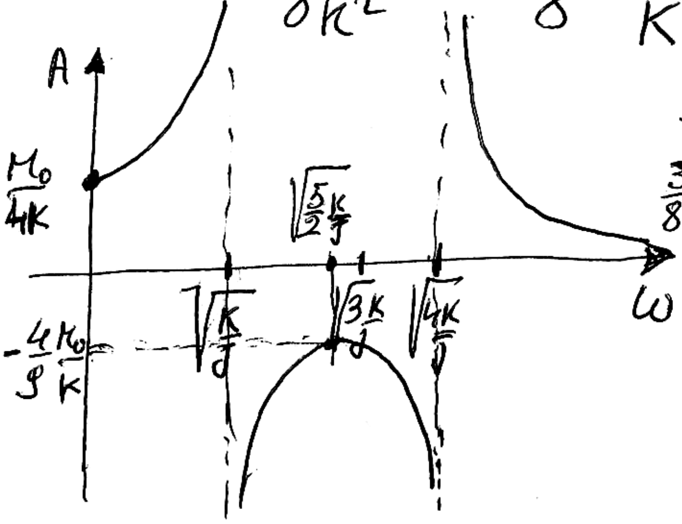
$$B = \frac{\begin{vmatrix} 3k-J\omega^2 & 0 \\ -2k & M_0 \end{vmatrix}}{2J^2\omega^4-10kJ\omega^2+8k^2} = \frac{M_0(3k-J\omega^2)}{2J^2\omega^4-10kJ\omega^2+8k^2}$$

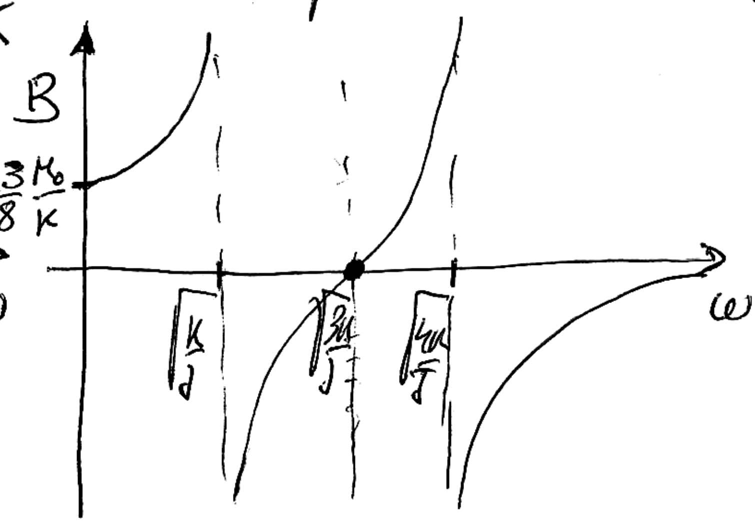
3) $J^2\omega^4 - 5kJ\omega^2 + 4k^2 = 0$ $\qquad \omega^2 = \dfrac{5kJ \pm \sqrt{25k^2J^2 - 16k^2J^2}}{2J^2}$

$$\omega^2 = \frac{5kJ \pm 3kJ}{2J^2} = \begin{cases} \dfrac{k}{J} \\ 4\dfrac{k}{J} \end{cases}$$

$$A(0) = \frac{kM_0}{4k^2} = \frac{M_0}{4K}$$

$$B(0) = \frac{M_0 3k}{8k^2} = \frac{3}{8}\frac{M_0}{K} \qquad B = 0 \text{ pu } 3k - J\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{J}}$$





A_{MAX} PRA LOS 2 PULS. NAT.:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \qquad \frac{-(4J^2\omega^3 - 10kJ\omega)kM_0}{(J^2\omega^4 - 5kJ\omega^2 + 4k^2)^2} = 0 \Rightarrow 2J^2\omega^3 - 5kJ\omega = 0$$

$$2J\omega^2 = 5k \qquad \omega^2 = \frac{5k}{2J}$$

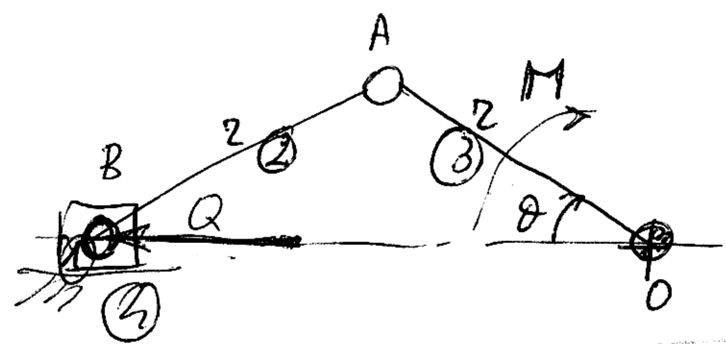
$$A_{MAX} = \frac{kM_0}{J^2\frac{25}{4}\frac{k^2}{J^2} - 5kJ\frac{5}{2}\frac{k}{J} + 4k^2} = \frac{kM_0}{\frac{25-50+16}{4}k^2} = -\frac{4}{9}\frac{M_0}{K}$$

4) $$A\left(\sqrt{\frac{3k}{J}}\right) = \frac{kM_0}{J^2\frac{9k^2}{J^2} - 5kJ\frac{3k}{J} + 4k^2} = -\frac{M_0}{2k}$$

$$J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}2(5\cdot10^{-2})^2 = 25\cdot10^{-4}\ \text{kg m}^2$$

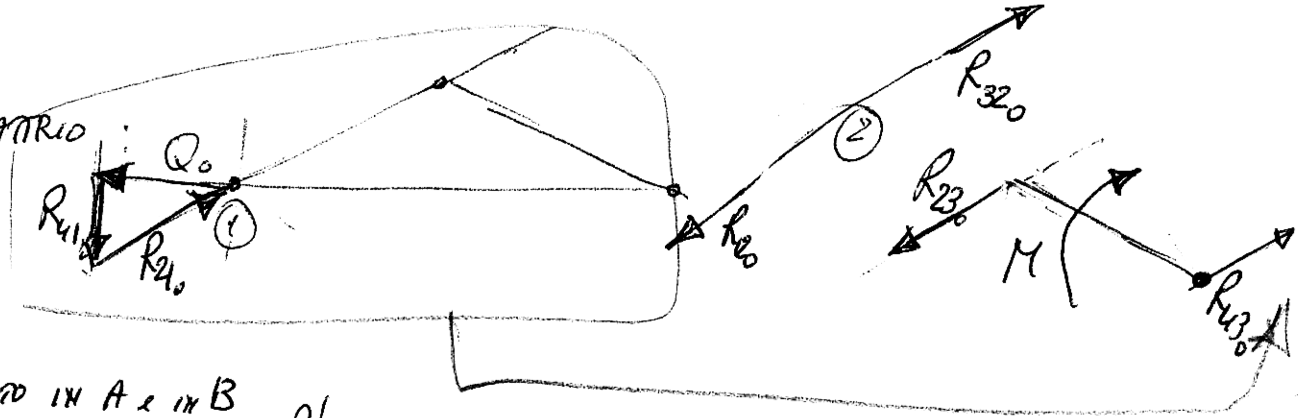
$$\theta_1(t) = -\frac{M_0}{2k}\cos\sqrt{\frac{3k}{J}}\,t = -\frac{12}{2\cdot3}\cos\sqrt{\frac{3\cdot3}{25\cdot10^{-4}}}\,t = -2\cos 60t \text{ rad}$$

$$T = \frac{2\pi}{60}\text{ s} \simeq 0.1\text{ s}$$

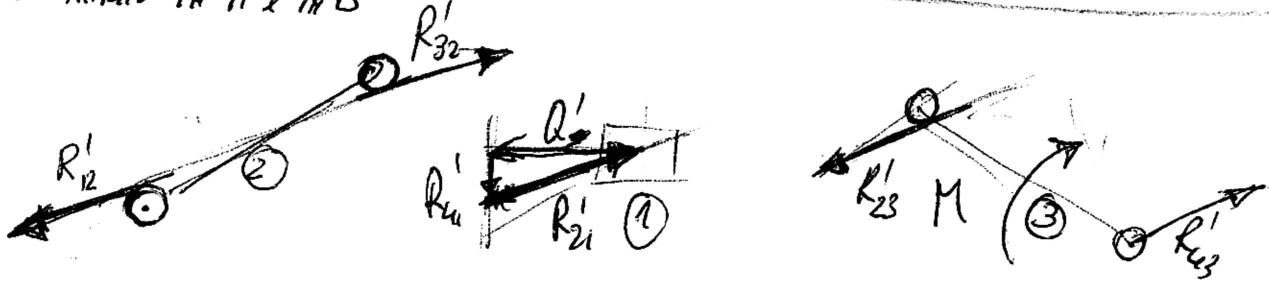


1)

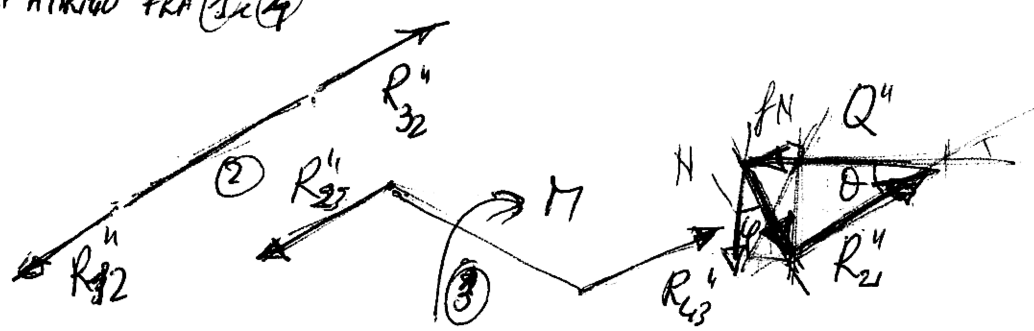
SENZA ATTRITO



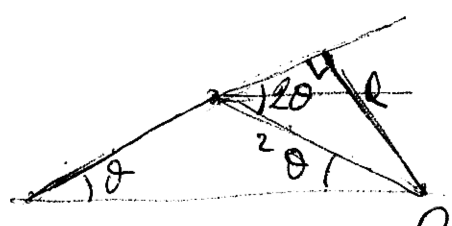
CON ATTRITO IN A e IN B



CON ATTRITO FRA 1 e 4



2)



$$Q = r\sin 2\theta$$

↺ 3 $\quad R_{23}\, r\sin 2\theta - M = 0 \Rightarrow R_{23} = \dfrac{M}{r\sin 2\theta}$

1 $\quad \begin{cases} \rightarrow\ R_{21}\cos\theta + \overbrace{R_{41}\sin\varphi}^{fN} - Q = 0 \\ \uparrow\ R_{21}\sin\theta - \overbrace{R_{41}\cos\varphi}^{N} = 0 \Rightarrow R_{41} = R_{21}\dfrac{\sin\theta}{\cos\varphi} \Rightarrow N = R_{21}\sin\theta \end{cases}$

dalla 1ª eq.: $\quad Q = R_{21}\cos\theta + R_{21}\sin\theta\, tg\varphi \Rightarrow Q = R_{21}(\cos\theta + f\sin\theta)$

me $R_{21}=R_{12}=R_{32}=R_{23}$, [illegible]:

$$Q=\frac{M}{2\sin 2\theta}\left(\cos\theta+\sin\theta\, \cancel{tg\varphi}^{\,f}\right)=\frac{M}{2r\sin\theta}+\frac{fM}{2r\cos\theta}$$

$$Q_0=\frac{M}{2\sin 2\theta}\cos\theta$$

3) $$\eta=\frac{Q_0}{Q}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta\, tg\varphi}=\boxed{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+f\sin\theta}}=\frac{1}{1+f\,tg\,\theta}$$ $\theta=\pi/4$

$f=0.25$

$$\eta=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\,0.25}=\frac{1}{1+0.25}$$ $$\frac{1}{1.25}=0.8$$

4) $$\eta=\frac{|L_r|}{L_m}=\frac{L_{m0}}{L_m}=\frac{\bar{Q}_0\cdot\bar{s}}{\bar{Q}\cdot\bar{s}}=\frac{Q_0\cancel{s}}{Q\cancel{s}}$$