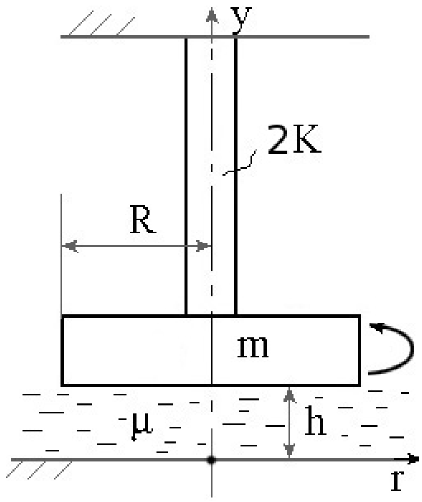
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
CIVILE E INDUSTRIALE

Pisa, 19 febbraio 2013

ESAME DI MECCANICA – SOLO SECONDA PARTE

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica e Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Esercizio 1

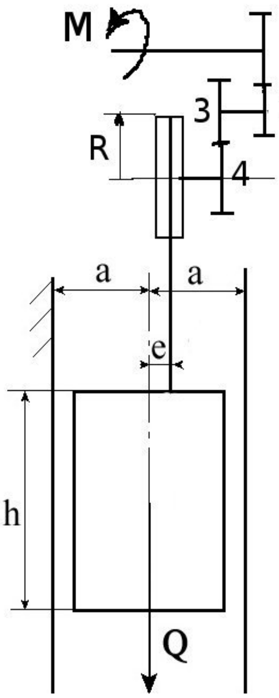


Un disco rigido di raggio R e massa m è collegato al telaio con una molla torsionale di costante $2K$. Fra la superficie inferiore del disco ed il telaio è presente del fluido con viscosità μ (altezza del meato costante ed uguale ad h). Il disco è libero di oscillare attorno al proprio asse.

1) Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della costante di smorzamento viscoso.
2) Si scriva l'equazione di D'Alembert relativa al moto del disco di massa m spiegando il significato fisico dei vari termini.
3) Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della pulsazione propria del sistema e del fattore di smorzamento viscoso.
4) Si ricavi l'espressione della legge del moto del disco sapendo che all'istante iniziale esso viene lasciato libero da una posizione ruotata di un angolo θ_0 rispetto alla posizione di riposo del sistema con una velocità angolare pari a $\dot{\theta}_0$.
5) Si tracci il grafico dell'andamento dell'oscillazione.

R = 10 cm, $h = \pi\ 10^{-1}$ mm, m = 2 kg, K = 2 Nm, μ = 0.2 Pa s, θ_0 = 1 rad, $\dot{\theta}_0 = 5\sqrt{15} - 5$ rad/s

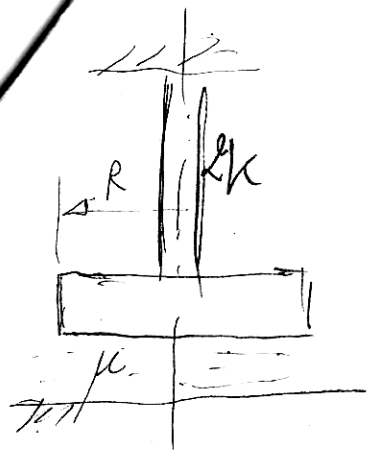
Esercizio 2



Un corpo di peso Q può scorrere entro una guida grazie all'azione di una forza motrice P verticale verso l'alto applicata ad una distanza e dalla retta d'applicazione di Q. La forza motrice è applicata tramite una fune che si avvolge su una puleggia di raggio R solidale con la ruota dentata 4 che ingrana con la ruota 3. La 3 è solidale con la 2 che ingrana con la 1.

Siano f e f_a rispettivamente il coefficiente d'attrito cinetico e statico fra il corpo e la guida. Si ricavino:

1. L'espressione della forza P in funzione di f e dei dati geometrici riportati in figura, considerando trascurabile il gioco rispetto ad a.
2. La relazione fra f e le grandezze geometriche affinché non si abbia impuntamento in relazione anche al possibile innesco del movimento.
3. L'espressione del rapporto di trasmissione τ del rotismo noti i numeri dei denti z_1, z_2, z_3, z_4 delle 4 ruote.
4. L'espressione del momento motore M da applicare alla ruota 1 sapendo anche che il rendimento del rotismo è η_t.
5. Il rendimento del sistema completo.



1) $\tau = \mu \frac{\omega r}{h}$

$$M = \int_0^R \mu \frac{\omega r}{h} 2\pi r\, dr\, r = \frac{2\pi\mu\omega}{h}\frac{R^4}{4_2} = \overbrace{\boxed{\frac{\pi\mu}{2h} R^4}}^{c}\omega$$

$$C = \frac{\pi\, \overset{0.1}{0.2}}{2\pi\, 10^{-4}}(10^{-1})^4 = 0.1 \text{ Nms}$$

2) $$-\underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta}}_{\text{MOM. FORZE D'INERZIA}} - \underbrace{c\dot{\theta}}_{\text{MOM. VISCOSO}} - \underbrace{2k\theta}_{\text{MOM. ELASTICO}} = 0$$

3) $$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{\frac{1}{2} m R^2}} = 2\sqrt{\frac{k}{mR^2}} = 2\sqrt{\frac{2}{2(10^{-1})^2}} = 2\cdot 10 = 20 \text{ rad/s}.$$

$$x = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{2k\frac{1}{2}mR^2}} = \frac{\frac{\pi\mu R^4}{2h}}{2\sqrt{kmR^2}} = \frac{0.1}{2\sqrt{2\cdot 2(10^{-1})^2}} = \frac{0.1}{4\cdot 10^{-1}} = \frac{1}{4} = 0.25 < 1$$

4) $\theta(t) = A e^{-x\omega_n t}\cos(\omega_s t + \varphi)$ con $\omega_s = \omega_n\sqrt{1-x^2} = 20\sqrt{1-\frac{1}{16}} = 5\sqrt{15}$ rad/s

$\theta(t) = A e^{-5t}\cos(5\sqrt{15}\, t + \varphi)$ $\qquad x\omega_n = \frac{1}{4}\cdot 20 = 5$ rad/s

$$\dot{\theta} = -A\cdot 5 e^{-5t}\cos(5\sqrt{15}\, t + \varphi) - A e^{-5t}\sin(5\sqrt{15}\, t+\varphi)\cdot 5\sqrt{15}$$

$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow A\cos\varphi = \theta_0 \rightarrow A = \frac{\theta_0}{\cos\varphi}$

$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \Rightarrow -5A\cos\varphi - A5\sqrt{15}\sin\varphi = \dot{\theta}_0 \rightarrow -\frac{5\theta_0}{\cos\varphi}\cos\varphi - 5\sqrt{15}\frac{\theta_0}{\cos\varphi}\sin\varphi = \dot{\theta}_0$

$$-5\theta_0 - 5\sqrt{15}\,\theta_0 \operatorname{tg}\varphi = \dot{\theta}_0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5\theta_0 + \dot{\theta}_0}{5\sqrt{15}\,\theta_0}$$

$$\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}^2\varphi \Rightarrow 1-\cos^2\varphi = \operatorname{tg}^2\varphi\cos^2\varphi \Rightarrow 1 = \cos^2\varphi\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{(5\theta_0+\dot{\theta}_0)^2}{25\cdot 15\,\theta_0^2}} = \frac{375\,\theta_0^2}{375\theta_0^2+(5\theta_0+\dot{\theta}_0)^2}$$

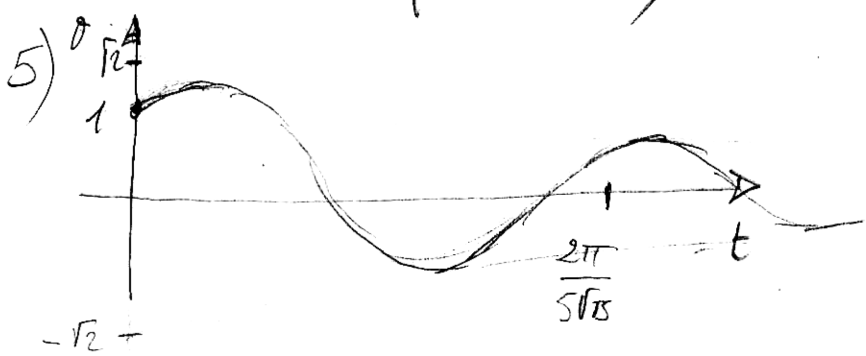
$$A = \frac{\theta_0}{\cos\varphi} = \frac{\cancel{\theta_0}}{\cancel{\theta_0}}\sqrt{\frac{375\theta_0^2+(5\theta_0+\dot{\theta}_0)^2}{375}} =$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cancel{5}+5\sqrt{15}-\cancel{5}}{5\sqrt{15}} = -1 \quad\Rightarrow\quad \varphi = -\frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

$$A = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\ \text{rad}$$

$$\theta(t) = \sqrt{2}\,e^{-5t}\cos\left(5\sqrt{15}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

5)



$$T = \frac{2\pi}{5\sqrt{15}}\ \text{s}$$

1) $\uparrow \begin{cases} P - Q - fN_A - fN_B = 0 & \rightarrow \quad N_A = \dfrac{P-Q}{2f} \\ \rightarrow \; N_A - N_B = 0 & \rightarrow \quad N_A = N_B \\ \overset{\curvearrowleft}{A} \; P(a+e) - Q(a) - N_B h - fN_B 2a = 0 & \end{cases}$

$$P(a+e) - Qa - \frac{P-Q}{2f}(h + 2af) = 0$$

$$P\left[\cancel{2fa} + 2fe - h - \cancel{2af}\right] - Q\left[\cancel{2af} - h - \cancel{2af}\right] = 0$$

$$P = Q\,\frac{-h}{2fe-h} = \frac{Q}{1 - \frac{2ef}{h}}$$

2) Si ha impuntamento se:

$$1 - \frac{2ef}{h} \leq 0 \quad \rightarrow \quad h \leq 2ef$$

3) $$\tau = \frac{\omega_4}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2}\left(-\frac{z_3}{z_4}\right) = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

4) $M_2 = PR$ applicata alla 4 $\Rightarrow \eta_t = \dfrac{PR\omega_4}{M\omega_1} = \dfrac{PR}{M}\tau$

da cui $$M = PR\frac{\tau}{\eta_t} = \frac{Q}{1 - \frac{2ef}{h}} R \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\frac{1}{\eta_t}$$

5) $$\eta = \frac{Q v^{\rightarrow \omega_4 R}}{M\omega_1} = \frac{QR}{M}\tau = \left(1 - \frac{2ef}{h}\right)\eta_t$$

oppure: $$\eta = \frac{M_0}{M} = \frac{QR\tau}{\frac{QR\tau}{\eta_t} / \left(1 - \frac{2ef}{h}\right)} = \left(1 - \frac{2ef}{h}\right)\eta_t$$