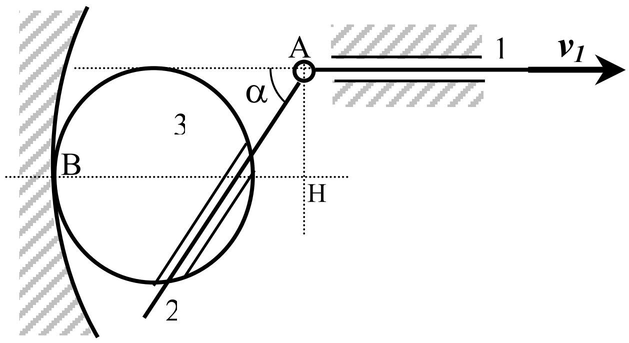
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA, NUCLEARE E DELLA PRODUZIONE

Pisa, 21 giugno 2006

# ESAME DI MECCANICA
*Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica*

## *Esercizio cinematica*



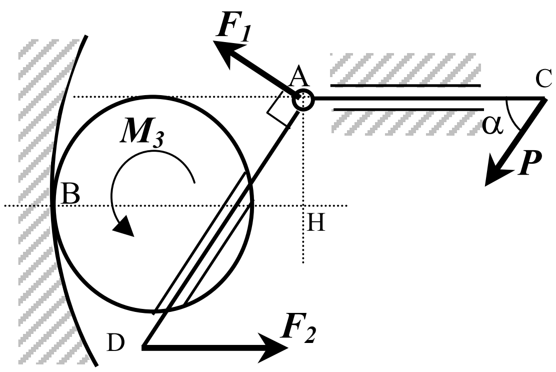

Si consideri lo schema di figura, composto da due aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta orizzontale:

1. si risolva il problema delle velocità per via grafica ed analitica (velocità di 1 $\boldsymbol{v_1}$);
2. si determinino le velocità relative di B rispetto all'asta 1 e rispetto all'asta 2;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di B e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica, accelerazione di 1 $\boldsymbol{a_1}$).

DATI: $BH$=50 cm, $AH$=$r$=16 cm, $\alpha$=30°, $v_1$=0.4 m/s, raggio del telaio=3$r$, $a_1$=1 m/s$^2$ (verso sinistra).

## *Esercizio statica*

Si consideri lo stesso sistema precedente, caricato con una forza sul perno A, ortogonale all'asta 2, una forza orizzontale in D e un momento sul disco 3 tenuti in equilibrio attraverso una forza ***P*** in C.




1. Si determini tale forza ***P*** mediante il principio di sovrapposizione degli effetti;
2. si risolvano i diagrammi di corpo libero del sistema per il caso con $\boldsymbol{F_2}$;
3. facoltativo: si determinino graficamente gli assi centrali delle due coppie prismatiche per i 3 sottocasi.

**DATI:** $F_1$=60√3 N, $F_2$=24 N, $M_3$=2 Nm, AD=AC=60 cm.

## *Esercizio dinamica*

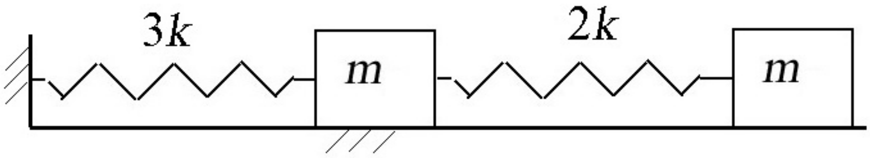
Si scrivano le equazioni della dinamica del sistema, considerando agente solo la forza ***P***, incognita, da determinare per far muovere il sistema secondo la cinematica del primo esercizio, dapprima trascurando l'inerzia dell'asta 2 e poi considerandola.

## *Esercizio oscillazioni*

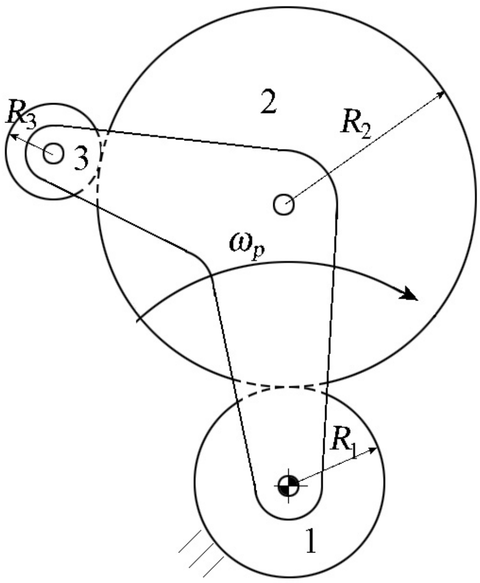
Le due masse uguali mostrate in figura, collegate rispettivamente al telaio con una molla di costante 3$K$ e fra loro con una molla di costante 2$K$, sono libere di oscillare su un piano orizzontale senza attrito.

1. Si scrivano le equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema.
2. Si ricavino le espressioni delle pulsazioni proprie del sistema.

3. Si ricavino le espressioni della legge del moto delle due masse.
4. Si ricavino le espressioni del punto 3 nel caso specifico in cui all'istante iniziale la massa centrale sia spostata verso destra di una quantità $\Delta$, la massa esterna sia spostata verso destra di una quantità $2\Delta$, ed entrambe le masse siano ferme.
5. Si spieghi cosa sono i modi principali di oscillazione del sistema e cosa comporta la condizione d'ortogonalità dei modi stessi.




***Esercizio rotismo***




Nel rotismo rappresentato in figura la ruota 1 è solidale al telaio mentre le altre due ruote sono accoppiate rotoidalmente al portasatellite che ruota con velocità angolare $\omega_p$. Sono noti i raggi $R_1$, $R_2$ e $R_3$ delle primitive delle tre ruote e l'angolo di pressione $\alpha$.

1. Supponendo movente il portasatellite, si determini il rapporto di trasmissione in funzione del numero dei denti $z_1$, $z_2$ e $z_3$ delle ruote (incogniti), ed in funzione dei dati del problema, calcolandone anche il valore numerico.
2. Si calcoli il numero di denti minimo delle tre ruote tenendo presente la condizione di non interferenza.
3. Si calcoli il modulo dei denti delle ruote.
4. Considerando il rotismo ordinario corrispondente a quello in figura, si valuti il suo rendimento conoscendo il momento motore $M_m$ applicato alla ruota 1 e quello resistente $M_r$ agente sulla 3.

$R_1$=0.1m, $R_2$ =0.2m, $R_3$ =0.05m, $\alpha$=20°, $M_m$=10 Nm, $M_r$=4.5 Nm,

$$z_{\min} = \frac{2\tau}{1-\sqrt{1-\tau(2-\tau)\sin^2\alpha}}$$

---

**RACCOMANDAZIONI:**

- precisione nelle notazioni vettori/scalari
- indicare eventuali sistemi di riferimento utilizzati
- evidenziare i risultati nell'elaborato
- <u>se ci si accorge di un risultato "strano", che si suppone errato, commentarlo</u>
- <u>non si possono consultare libri né appunti</u>

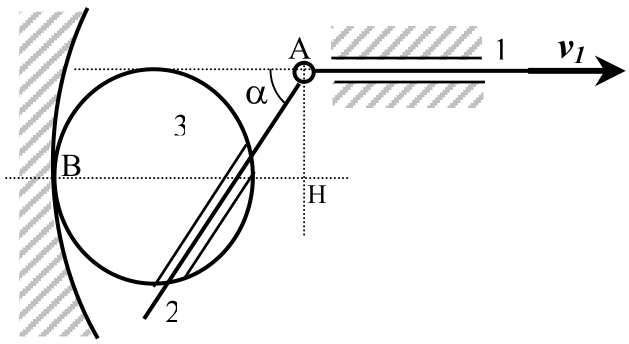
---

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA, NUCLEARE E DELLA PRODUZIONE

Pisa, 26 gennaio 2006

# ESAME DI MECCANICA

## *Esercizio cinematica*

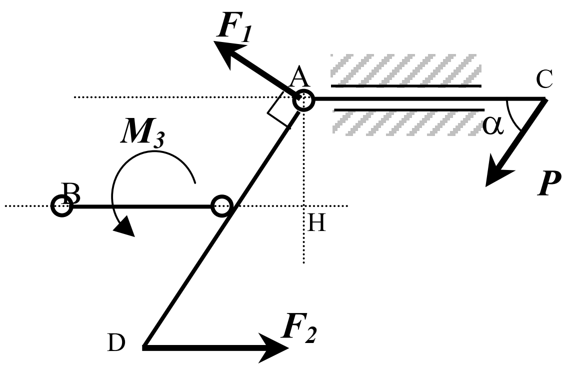



Si consideri lo schema di figura, composto da due aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta orizzontale:

1. si risolva il problema delle velocità per via grafica ed analitica;
2. si determinino le velocità relative di B rispetto all'asta 1 e rispetto all'asta 2;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di B e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).
5. 

DATI: $BH$=50 cm, $AH$=$r$=16 cm, $\alpha$=30°, $v_1$=0.4 m/s, raggio del telaio=$a_1$=1 m/s$^2$ (verso sinistra).

## *Esercizio statica*




Si consideri lo schema in figura, ottenuto modificando il precedente, caricato con una forza sul perno A, ortogonale all'asta 2, una forza orizzontale in D ue con un momento sul disco 3 tenuti in equilibrio attraverso una forza ***P*** in C.

1. Si determini tale forza ***P*** mediante il principio di sovrapposizione degli effetti;
2. si risolvano i diagrammi di corpo libero del sistema per il caso con $\boldsymbol{F_2}$;
3. facoltativo: si determinino graficamente gli assi centrali delle due coppie prismatiche per i 3 sottocasi.

**DATI:** $F_1$=60 N, $F_2$=20√3 N, $M_3$=*2* Nm, AD=AC=60 cm.

## *Esercizio dinamica*

Si scrivano le equazioni della dinamica del sistema, considerando agente solo la forza ***P***, incognita, da determinare per far muovere il sistema secondo la cinematica del primo esercizio, dapprima trascurando l'inerzia dell'asta 2 e poi considerandola.

---

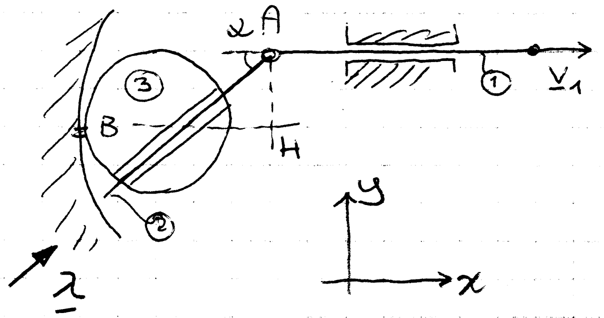
**RACCOMANDAZIONI:**

- precisione nelle notazioni vettori/scalari
- indicare eventuali sistemi di riferimento utilizzati
- evidenziare i risultati nell'elaborato
- <u>se ci si accorge di un risultato "strano", che si suppone errato, commentarlo</u>

- non si possono consultare libri né appunti

# COMPITO 21 GIUGNO 2006

1)




gdl = 1 (verificare)

① moto traslatorio
② moto rototraslatorio
③ " rototrasl. (rot. at B)

$$\underline{v}_{P\in 1} = \underline{v}_1 = v_1\,\underline{i} = 0.4\,\underline{i}$$

$$\underline{v}_{R\in ②} = \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AR} \qquad \text{dove} \quad \underline{v}_A = \underline{v}_1 \quad (\underline{v}_{A\in ①} = \underline{v}_{A\in ②})$$

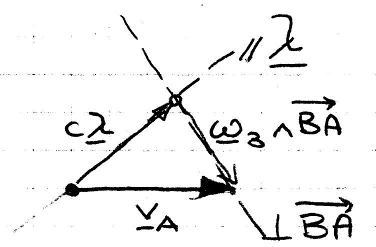
$$\underline{v}_{S\in ③} = \underline{v}_B + \underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{BS} \qquad \text{dove} \quad \underline{v}_B = \underline{0} \quad \text{r.s.s.}$$

$\Sigma_{③}$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_A^{(tr)} + \underline{v}_A^{(rel)}$$

$$\underline{v}_A = \underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{BA} + c\,\underline{\lambda}$$

$$\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_3$$




$(c > 0\ ,\ \omega_3 < 0)$

$$\overrightarrow{BA} \equiv (0.5, 0.16)$$

$$\underline{\lambda} = (\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3\ 0.16 \\ \omega_3\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5\sqrt{3}\ c \\ 0.5\ c \end{bmatrix} \longrightarrow c = -\omega_3 \rightarrow \omega_3 = -\frac{v_1}{(r + \cos\alpha)}$$

$$\omega_3 \simeq -0.39\ \text{rad/s} \qquad c = 0.39\ \text{m/s}$$

2)

$$\Sigma_{①} \quad \underline{v}_B = \underline{v}_B^{(tr)} + \underline{v}_B^{(rel)} = \underline{0} \longrightarrow \underline{v}_B^{(rel)} = -\underline{v}_B^{(tr)} = -\underline{v}_1$$

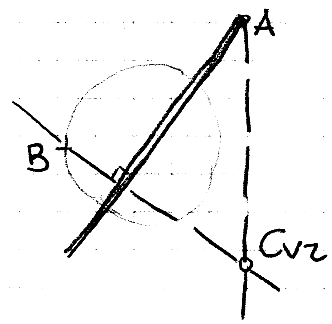
$$\Sigma_{②} \quad \underline{v}_B = \underline{v}_B^{(tr)} + \underline{v}_B^{(rel)} = \underline{0} \longrightarrow \underline{v}_B^{(rel)} = -\underline{v}_B^{(tr)} = -(\underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB})$$
$$= -c\,\underline{\lambda}$$

3)

$C_{v1}$ non esiste

$C_{v3} \equiv B$

$C_{v2}$ in figura



4)
$$\underline{a}_B = -D\omega^2 \underline{n} = -D\omega_3^2 \underline{i}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = -\frac{2}{3r} \quad ; \qquad D = -0.24\ m$$

$$\underline{a}_B = 0.0365\,\underline{i}\ m/s^2$$

$$\underline{a}_{P\in 1} = -a_1 \underline{i} = \underline{a}_A$$
$$\underline{a}_{S\in 2} = \underline{a}_A + \underline{\dot\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AS} - \omega_2^2 \overrightarrow{AS}$$
$$\underline{a}_{R\in 3} = \underline{a}_B + \underline{\dot\omega}_3 \wedge \overrightarrow{BR} - \omega_3^2 \overrightarrow{BR}$$

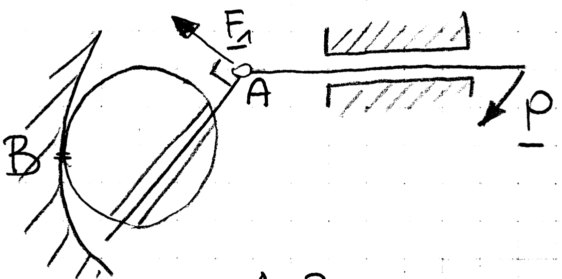
$$\Sigma_3 \qquad \underline{a}_A = \underline{a}_A^{(tr)} + \underline{a}^{(rel)} + \underline{a}^{(cor)}$$
$$-a_1 \underline{i} = \underline{a}_B + \underline{\dot\omega}_3 \wedge \overrightarrow{BA} - \omega_3^2 \overrightarrow{BA} + \dot c\, \underline{\lambda} + 2\,\underline{\omega}_3 \wedge c\,\underline{\lambda}$$

nelle incognite $\underline{\dot\omega}_3$ e $\dot c$ _

Inoltre $\Sigma_3$ $\quad \underline{\dot\omega}_3 = \underline{\dot\omega}_2$

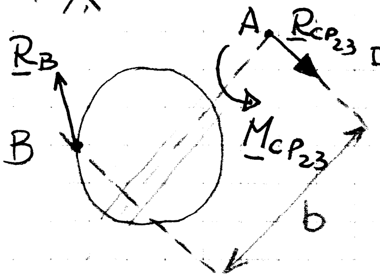
---

ESERCIZIO DI STATICA




PRIMO SOTTOSISTEMA ($\underline{F}_1$ e $\underline{P}$)

si inizia dai corpi scarichi 2 e 3 _ (oss. B tipo cerniera)
DIREZ. $\underline{R}_B$ NON NOTA




DISCO SCARICO

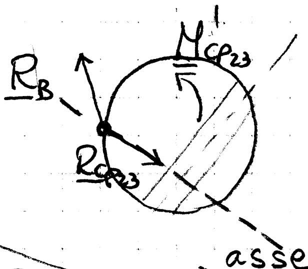
coppia prismatica come $(A, \underline{R}_{CP_{23}}) + \underline{M}_{CP_{23}}$

[altro polo comodo B : $(B, R_{CP_{23}}) + \underline{M}'_{CP_{23}}$]

$$\begin{cases} \underline{R}_B + \underline{R}_{CP_{23}} = \underline{0} \\ \overset{\curvearrowleft}{B})\ \ M_{CP_{23}} - b\,R_{CP_{23}} = 0 \end{cases}$$

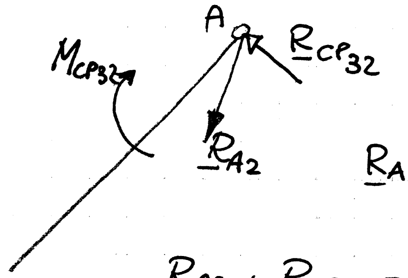
$$\begin{cases} \underline{R}_B + \underline{R}_{CP_{23}} = \underline{0} \\ M_{CP_{23}}' = 0 \end{cases}$$

da cui




asse centrale C.P.

OSSERVA CHE È COME SE IN B CI FOSSE UNA COPPIA ROTOIDALE



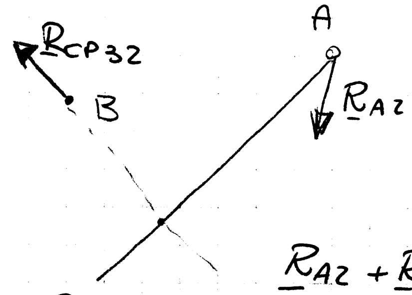

$\underline{R}_{A2}$ INCOGNITA IN DIREZIONE

$$\underline{R}_{A2} + \underline{R}_{CP32} = \underline{0}$$

$$(A) \quad -M_{CP32} = 0$$

da cui

$$M_{CP32} = R_{CP32} = R_{A2} = 0$$



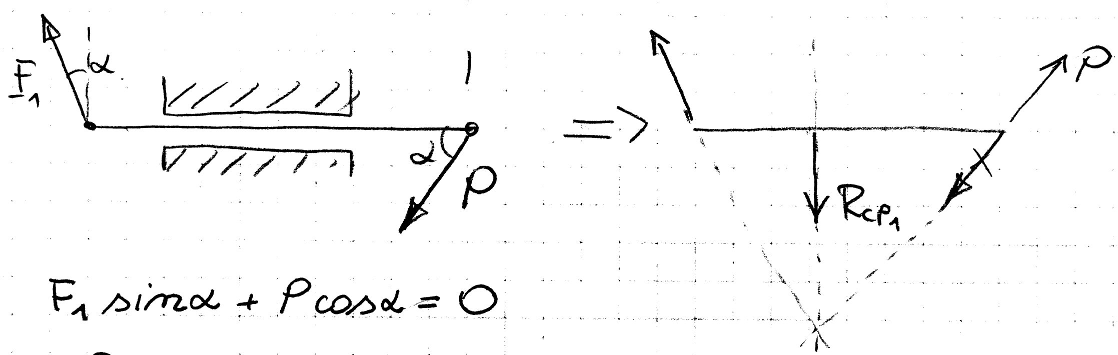

$$\underline{R}_{A2} + \underline{R}_{CP32} = \underline{0}$$

$$(A) \quad b\, R_{CP32} = 0$$

da cui

$$R_{CP32} = M_{CP32} = R_{A2} = 0$$

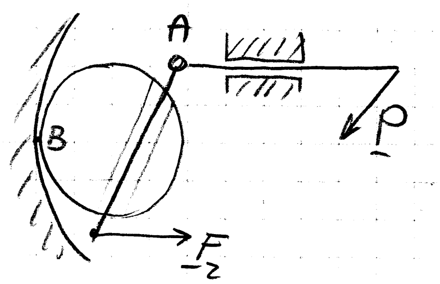
corpi ② e ③ non contribuiscono all'equilibrio




$$F_1 \sin\alpha + P\cos\alpha = 0$$

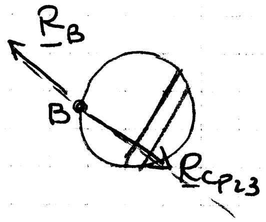
$$P = -F_1 \operatorname{tg}\alpha = -60\,N$$

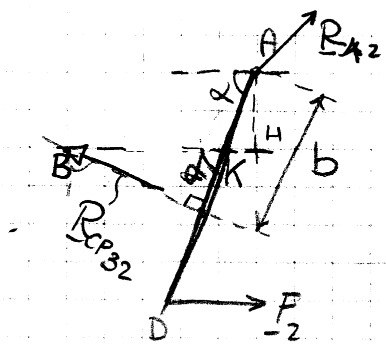
SECONDO SOTTOSISTEMA $(\underline{F}_2, \underline{P})$




si inizia da disco scarico ripetendo caso precedente si ha $(B, \underline{R}_{CP23})$ e $\underline{M}'_{CP23} = \underline{0}$

(provare con $(A, \underline{R}_{CP23}), \underline{M}_{CP23}$)




$$\underline{R}_{A2} + \underline{R}_{CP32} + \underline{F}_2 = \underline{0}$$

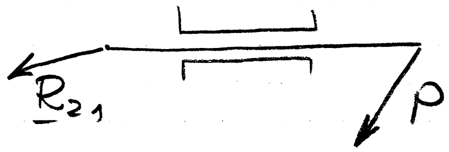
$$(A) \quad F_2\, \overline{AD} \sin\alpha - R_{CP32}\, b = 0$$

$$b = \overline{AK} + \overline{BK}\cos\alpha$$

$$\overline{AK} = \overline{AH} / \sin\alpha = 0.32\ m$$

$$\overline{BK} = \overline{BH} - \overline{HK} = 0.5 - \overline{AK}\cos\alpha = 0.223\ m$$

$$b = 0.32 + 0.223\cos\alpha \simeq 0.513\ m \quad \rightarrow \quad R_{CP32} = \frac{F_2\, \overline{AD} \sin\alpha}{b} \simeq 14N$$

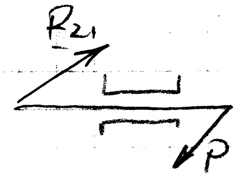



per determinare $\underline{P}$ è sufficiente calcolalare la $R_{21x} = R_{12x}$

$$P\cos\alpha + R_{21x} = 0$$

da equilibrio ②

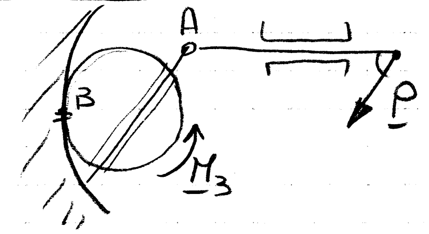
$$R_{12x} + F_2 - R_{CP_{32}} \sin\alpha = 0$$




$$R_{12x} = R_{CP_{32}} \sin\alpha - F_2 \simeq -17\ N$$

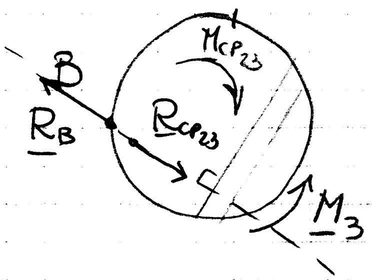
$$P = -\frac{R_{21x}}{\cos\alpha} = 19.6\ N$$

TERZO SOTTOSISTEMA $(\underline{P}, \underline{M}_3)$



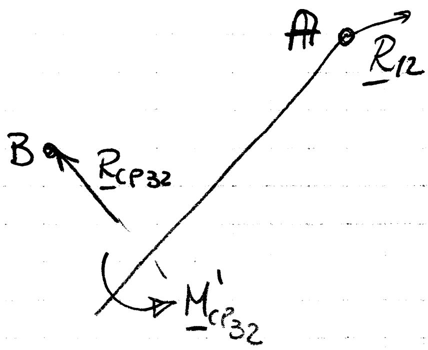

anche qui considero azioni della coppia prismatica tra 2 e 3 equivalenti a

$$(B, \underline{R}_{CP_{23}}) + \underline{M}'_{CP_{23}}$$




$$\underline{R}_B + \underline{R}_{CP_{23}} = 0$$

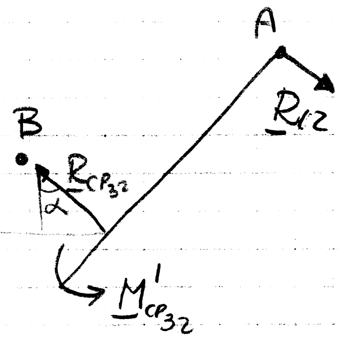
$$M'_{CP_{23}} = M_3 = 2\ Nm$$



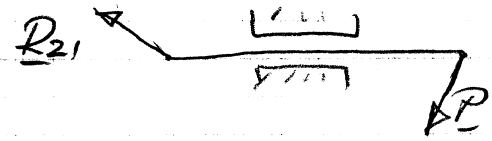

$$\underline{R}_A + \underline{R}_{CP_{32}} = \underline{0}$$

$$\curvearrowleft A \quad M_{CP_{32}} - R_{CP_{32}}\, b = 0$$

$$R_{CP_{32}} = 3.89\ N$$




$$P\cos\alpha + R_{21x} = 0$$




$$P = -\frac{R_{21x}}{\cos\alpha} = -\frac{R_{12x}}{\cos\alpha} = -\frac{R_{CP_{32}}\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

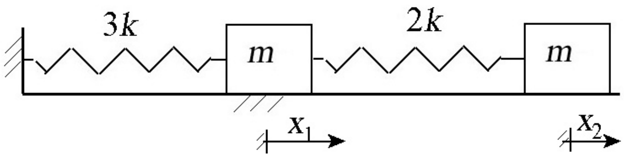
$$= -2.25\ N$$

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} = -60 + 19.6 - 2.25 = -42.65\ N$$

**COMPITO DI MECCANICA 21/06/06 – Esercizi seconda parte**

**Esercizio vibrazioni**

**1.**




Fissati gli assi di referimento con origine nelle posizioni occupate dalle masse nalla posizione di riposo del sistema, si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 + 2k(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

**2.**

Ipotizzando soluzioni del tipo:

$x_1 = A\cos(\omega_n t + \varphi), \quad x_2 = B\cos(\omega_n t + \varphi)$

sostituendo nel sistema di equazioni e ponendo uguale a 0 il determinante dei coefficienti per trovare soluzione diversa dalla banale (*A*=0 e *B*=0) si ottiene l'equazione caratteristica

$m^2\omega_n^4 - 7km\omega_n^2 + 6k^2 = 0$

da cui si ricavano le pulsazioni proprie

$\omega_{n1} = \sqrt{k/m}$ e $\omega_{n2} = \sqrt{6k/m}$

**3.**

Sostituendo le due pulsazioni naturali alternativamente in una qualsiasi delle due equazioni del sistema, si ottengono i rapporti fra le ampiezze dei moti delle due masse:

$A_1/B_1 = 1/2$ e $A_2/B_2 = -2$

per cui le leggi del moto delle due masse sono

$x_1 = A_1\cos\left(\sqrt{k/m}\ t + \varphi_1\right) + A_2\cos\left(\sqrt{6k/m}\ t + \varphi_2\right)$

$x_2 = 2A_1\cos\left(\sqrt{k/m}\ t + \varphi_1\right) - (A_2/2)\cos\left(\sqrt{6k/m}\ t + \varphi_2\right)$

**4.**

Notando che il rapporto fra gli spostamenti iniziali coincide con quello fra le ampiezze ricavate usando $\omega_{n1}$ al punto precedente e che le velocità iniziali delle due masse sono nulle, è possibile riconoscere che si tratta del primo modo di vibrare (vedi punto succesivo) e quindi porre $A_2$=0 da cui segue con facili sostituzioni che $A_1=\Delta$ e $\varphi_1$=0.

In alternativa possono essere imposte le condizioni iniziali usando le espressioni complete:

1) $x_1(0) = A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2) = \Delta$

2) $x_2(0) = 2A_1\cos(\varphi_1) - (A_2/2)\cos(\varphi_2) = 2\Delta$

3) $\dot{x}_1(0) = -A_1\sqrt{k/m}\ \sin(\varphi_1) - A_2\sqrt{6k/m}\ \sin(\varphi_2) = 0$

4) $\dot{x}_2(0) = -2A_1\sqrt{k/m}\ \sin(\varphi_1) + (A_2/2)\sqrt{6k/m}\ \sin(\varphi_2) = 0$

Per risolvere questo sistema di 4 equazioni in 4 incognite ($A_1$, $A_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$) è più conveneniente usare prima le equazioni con 0 a secondo membro, oppure cercare di combinarle fra loro eliminando dei termini. Usando la prima strada, dalla 4) si ottiene $A_2 = \frac{4}{\sqrt{6}} A_1 \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}$ e sostituendo nella 3) si ricava $A_1\sin(\varphi_1) = 0$ che implica $A_1$=0 oppure $\varphi_1$=0. La prima soluzione implicherebbe anche $A_2$=0, soluzione non accettabile (sistema sempre fermo), per cui è $\varphi_1$=0. Sostituendo quindi $\varphi_1$=0 nella 4) si ricava $A_2$=0, mentre le 1) e 2) sono evidentemente soddisfatte se $A_1=\Delta$. Le espressioni richieste sono dunque:

$x_1 = \Delta\cos\left(\sqrt{k/m}\ t\right)$ e $x_2 = 2\Delta\cos\left(\sqrt{k/m}\ t\right)$

**5.**

I modi principali o naturali di oscillazione sono quelli in cui le due masse oscillano sinusoidalmente con la stessa

pulsazione. Si verificano quando le condizioni iniziali sono tali da annullare le ampiezze di uno dei due termini nelle espressioni generali delle leggi del moto ($A_1$=0 o $A_2$=0) (proprio come al punto precedente).
Nei sistemi a due gradi di libertà la condizione di ortogonalità comporta che i rapporti fra le ampiezze delle oscillazioni delle due masse $m_1$ e $m_2$ abbiano segno opposto in corrispondenza dei modi principali di vibrare.
È infatti possibile ricavare la relazione $m_1/m_2 + R_1R_2 = 0$, avendo indicato con $R_1$ e $R_2$ ripettivamente i rapporti $B_1/A_1$ e $B_2/A_2$ . Essendo le masse evidentmente positive, $R_1$ e $R_2$ devono avere segno opposto.

## Esercizio rotismo

**1.**

Si indichi con $\tau$ il rapporto di trasmissione del rotismo epicicloidale e con $\tau_0$ quello del rotismo ordinario corrispondente. Si ha:

$$\tau_0 = -\frac{z_1}{z_2}\left(-\frac{z_2}{z_3}\right) = \frac{z_1}{z_3}$$ , e usando la formula di Willis $$\tau_0 = \frac{\omega_3 - \omega_p}{-\omega_p} = \frac{z_1}{z_3}$$ (essendo $\omega_1$=0) da cui è facile ricavare

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_p} = \frac{z_3 - z_1}{z_3} = 1 - \frac{z_1}{z_3}$$

Poiché le ruote che ingranano fra loro devono avere lo stesso passo (e quindi modulo) e la ruota 2 ingrana con entrambe le altre ruote, tutte le ruote hanno lo stesso modulo ed il rapporto fra numero di denti è esprimibile come rapporto fra raggi delle primitive. In funzione dei dati del problema è dunque:

$$\tau = 1 - \frac{R_1}{R_3}$$ da cui è immediato ricavare in base ai dati numerici anche $$\tau = 1 - \frac{0.1}{0.05} = 1 - 2 = -1$$

**2.**

La formula del numero di denti minimo riguarda le ruote che ingranano fra loro. Per poterla applicare correttamente è quindi necessario considerare il rapporto di trasmissione di ogni singolo accoppiamento. Si ricava rispettivamente per gli accoppiamenti fra le ruote 1 - 2 e 2 - 3:

$$\tau_{12} = \frac{R_1}{R_2} = 0.5 \quad \text{e} \quad \tau_{23} = \frac{R_2}{R_3} = 4$$

Tenendo presente che devono essere usati valori compresi fra –1 e 1, scegliendo valori negativi per ruote che ingranano esternamente (come in questo caso) in base alla convenzione usata nel testo da cui è tratta la formula fornita (pag. 160 –161), i valori da usare nella formula sono:

$$\tau_{12} = -0.5 \quad \text{e} \quad \tau_{23} = -0.25$$

Inserendo i valori numerici si ricavano rispettivamente i numeri di denti minimi (ognuno riferito alla ruota più piccola di ogni coppia):

$$z_{\min 1} = 14.2 \Rightarrow 15 \quad \text{e} \quad z_{\min 3} = 15.5 \Rightarrow 16$$

E' evidente che la ruota 3 è la più piccola del gruppo, quindi se la condizione è soddisfatta per questa ruota lo è anche per tutte le altre (d'altra parte è facile verificare che scegliendo $z_1$=15 si otterrebbe $z_3$=7.5, valore di denti non ammissibile in quanto non intero e non soddisfacente la condizione di non interferenza per l'accoppiamneto 2 – 3). I numeri di denti minimi per le tre ruote sono dunque:
$z_3$=16 , $z_2$=$z_3R_2/R_3$=64 , $z_1$=$z_2R_1/R_2$=32

**3.**

Uno volta trovati i numeri di denti delle ruote, conoscendo i raggi delle primitive e avendo prima specificato che i moduli delle tre ruote sono uguali, è immediato ricavare, impiegando i valori numerici di una qualsiasi delle tre ruote:

$$m = \frac{2R_1}{z_1} = \frac{2R_2}{z_2} = \frac{2R_3}{z_3} = 6.25\,\text{mm}$$

**4.**

Dalla definizione di rendimento, usando ad esempio le potenze, si ha:

$$\eta = \frac{M_r\omega_r}{M_m\omega_m} = \frac{M_r}{M_m}\tau_0 = \frac{M_r}{M_m}\frac{R_1}{R_3} = \frac{4.5}{10}2 = 0.9$$