UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA, NUCLEARE E DELLA PRODUZIONE

Pisa, 11 luglio 2006

ESAME DI MECCANICA

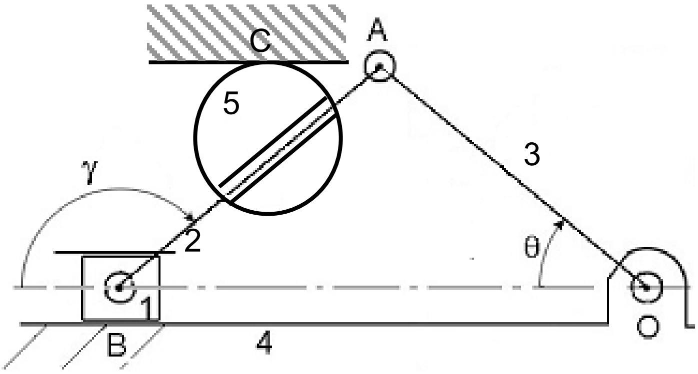
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio cinematica

Il manovellismo schematizzato in figura ha biella e manovella di uguale lunghezza r. Alla biella 2 è collegato attraverso una coppia prismatica un disco, che è in contatto di rotolamento con il telaio. Determinare che tipo di rotolamento ci deve essere in C affinché il sistema abbia 1 gdl.

Sapendo che la velocità angolare della manovella $\omega = \dot{\theta}$ (oraria) è costante,

1) si determinino (per valori di θ compresi fra 0 e $\pi/2$) le espressioni esatte di spostamento, velocità ed accelerazione del corsoio;
2) si utilizzi l'approccio vettoriale per risolvere le velocità del manovellismo e si confrontino i risultati con quelli del punto 1), prima per un θ generico poi facendo riferimento alla configurazione $\theta=\pi/6$;
3) si determinino la velocità angolare del corpo 5 e la velocità di C (noti AC e il raggio del disco) (caso $\theta=\pi/6$);
4) si individuino i centri delle velocità dei corpi, la velocità angolare di 5 rispetto a 3 e la velocità di C relativa ad 1;
5) si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni per il sistema.



DATI: r=200 mm, , ω=1 rad/s, AC=20√3 mm, r_{Disco}=30 mm

(Anche se il disco "ostacolerebbe" il raggiungimento di θ=0°, si studi comunque il manovellismo nel campo indicato ed il disco a 30°).

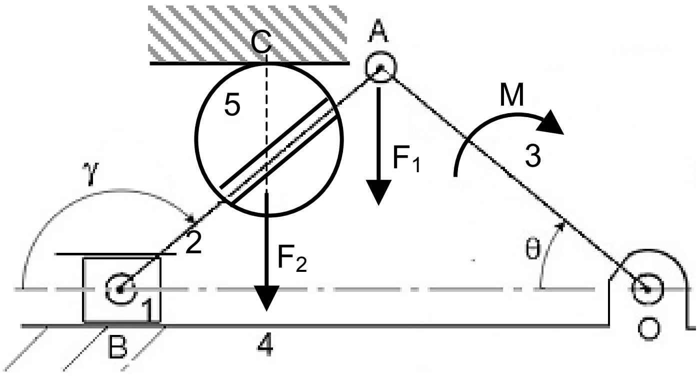
Esercizio statica

Si studi l'equilibrio del sistema precedente, determinando, con il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento ***M*** da applicare alla manovella per equilibrare le forze ***F₁*** e ***F₂***.

Si faccia attenzione alla reazione in C, in base al tipo di rotolamento, a quanto ottenuto dalla cinematica sulla velocità di C… sapendo inoltre che l'angolo di attrito in C è 10° (che tipo di attrito?).

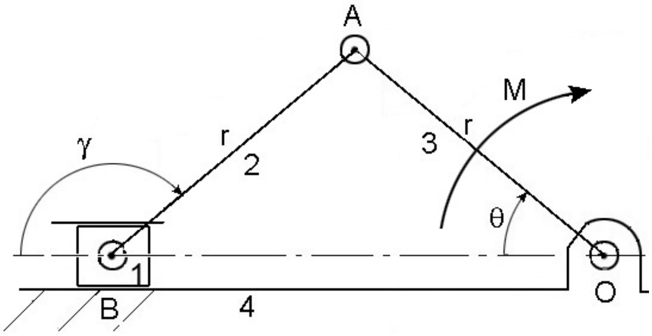
Facoltativa: ci sono sottosistemi isostatici?

F_1=10√3 N, F_2=10 N



Esercizio dinamica

Si consideri ancora il manovellismo precedente (si è eliminato il disco), in cui il corsoio 1 ha massa m_1, la biella 2 massa m_2 e momento d'inerzia J_2 rispetto al baricentro (posizionato in mezzeria); la massa della manovella 3 è trascurabile. La cinematica corrispondente all'esercizio 1 è ottenuta grazie ad un momento ***M*** (incognito), applicato alla manovella. Si determino:

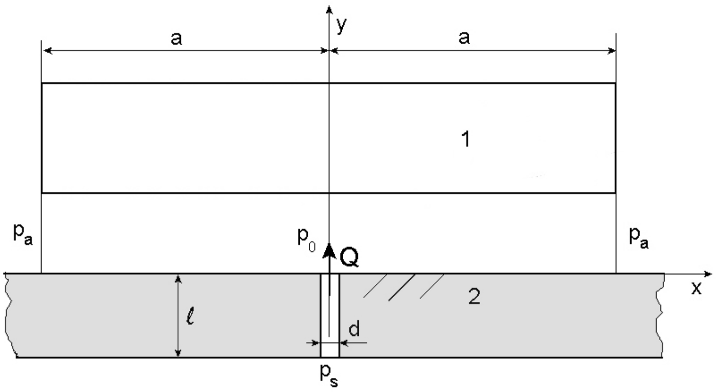


1. forze e momenti agenti su ogni elemento, incluso il telaio, per via grafica ed analitica, usando le masse di sostituzione della biella e la sovrapposizione degli effetti;
2. i valori numerici delle forze agenti sul telaio e del momento M per $\theta=\pi/6$.

m_1=0.2 kg, m_2= 0.4 kg, J_2= 0.01 kgm^2

Esercizio lubrificazione

La coppia lubrificata rappresentata in figura ha la dimensione ortogonale al piano del disegno molto maggiore (teoricamente infinita) rispetto alle altre (larghezza, $2a$, e altezza del meato, h - costante lungo la direzione x). Non vi sono movimenti relativi fra i due corpi; la pressione dell'olio è uguale a quella atmosferica p_a alle estremità della coppia. Sono date le espressioni generiche dell'equazione di Reynolds e dell'andamento della velocità del lubrificante lungo l'asse x, nonché la formula di Poiseuille. Sono noti la lunghezza l ed il diametro d del condotto di adduzione dell'olio nel meato, la portata Q, la viscosità del lubrificante μ, la pressione di alimentazione p_s, l'altezza del meato h e la dimensione a.

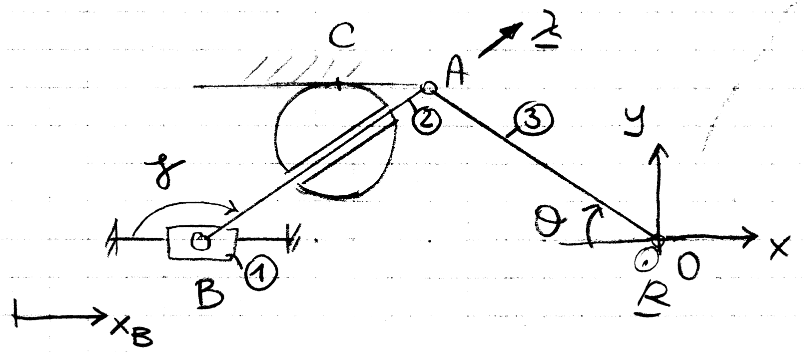


1. Si ricavino le forme dell'equazione di Reynolds e della velocità v_x relativamente al caso in esame.
2. Si ricavino le espressioni della pressione e del carico per unità di lunghezza e si calcoli il valore numerico di quest'ultima grandezza.
3. Si riportino in forma grafica l'andamento della pressione nel meato ed i profili di velocità nelle due sezioni di uscita e nella centrale.
4. Si ricavi l'espressione della tensione tangenziale agente lungo x in corrispondenza della superficie del corpo 2 e si calcoli la forza d'attrito totale in tale direzione.
5. Data la rugosità superficiale delle due superfici R_{q1} e R_{q2}, si verifichi il regime di lubrificazione riportando adeguate giustificazioni teoriche sui regimi di lubrificazione.

μ=0.1 Pas, a= 10 cm, $l=\pi/10$ m, d=2 mm, h=30µm, $p_s=10^6$ N/m^2, $p_a\approx 10^5$ N/m^2, Q=1 cm^3/s, R_{q1}=3 µm, R_{q2}=4 µm,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}h^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}h^3\right)=-6\,\mu U\frac{\partial h}{\partial x}-12\mu V\,,\quad v_x=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y\,(h-y)-U\left(1-\frac{y}{h}\right),\quad p_s-p_0=128\,\frac{l\mu Q}{\pi d^4}$$

COMPITO 11 LUGLIO



CINEMATICA

1) SI INTRODUCE UN RIFERIMENTO x_B CON ORIGINE NELLA POSIZIONE DI B PER $\theta = 0°$

$\longmapsto x_B$

PER UN GENERICO θ

$$x_B = 2r - \overline{AO}\cos\theta - \overline{AB}\cos(\pi - \gamma) = 2r(1-\cos\theta)$$

essendo $\pi - \gamma = \theta$, triangolo $O\hat{A}B$ isoscele

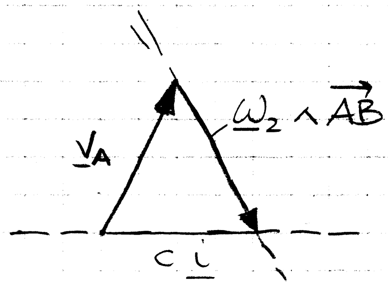
$$\dot{x}_B = 2r\omega\sin\theta \qquad \ddot{x}_B = 2r\omega^2\cos\theta$$

2) in C rotol. con strisc.

$$\underline{v}_{B\in 1} = \underline{v}_{B\in 2} = c\,\underline{i} = \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = \underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{OA} + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$c\,\underline{i} = \underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{OA} + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB}$$

$c > 0$
$\omega_2 > 0$



$$\underline{\omega}_3 \equiv (0, 0, -\dot{\theta}) \qquad \overrightarrow{OA} \equiv (-r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

$$\underline{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{OA} = \dot{\theta}\, r\,(\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j}) = \underline{v}_A$$

$$\underline{\omega}_2 \equiv (0, 0, \omega_2) \qquad \overrightarrow{AB} \equiv (-r\cos\theta, -r\sin\theta, 0)$$

$$\underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = r\omega_2(\sin\theta\,\underline{i} - \cos\theta\,\underline{j})$$

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\omega_2\sin\theta \\ r\omega_2\cos\theta \end{pmatrix} \rightarrow \omega_2 = \dot{\theta} \rightarrow c = 2r\dot{\theta}\sin\theta$$

(COERENTI CON 1) E GRAF)

OSSERVA infatti che triangolo è isoscele $\forall\theta$ per cui

$$\underline{\omega}_2 = -\underline{\omega}_3 = \dot{\theta}\,\underline{k} = 1\,(\text{rad/s})\,\underline{k}$$

per $\theta = \pi/6$

$\omega_2 = +1$ rad/s $\qquad\qquad \underline{v}_B = 0.2\,(m/s)\,\underline{i}$

3) $\Sigma_{②}$ $\qquad \underline{v}_{T\in⑤} = \underline{v}_T^{(rel)} + \underline{v}_T^{(tr)} = d\,\underline{\lambda} + \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AT}$

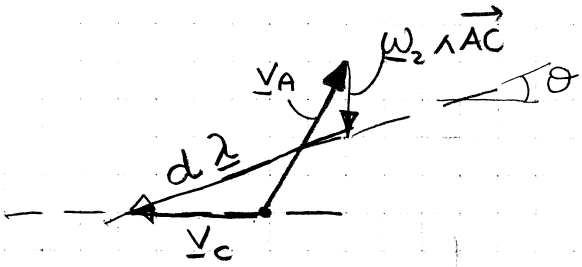
inoltre

$$\underline{\omega}_5 = \underline{\omega}^{(rel)} + \underline{\omega}^{(tr)} = \underline{0} + \underline{\omega}_2$$

- $T \equiv C \qquad \underline{v}_C = e\,\underline{i} = d\,\underline{\lambda} + \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AC}$

$\underline{\lambda} \equiv (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \underline{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AC} = -0.02\sqrt{3}\ \underline{j}$

$$\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sqrt{3}/2 \\ d/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.02\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow d = -0.16\sqrt{3}\ (m/s) \qquad e = -0.14\ (m/s)$$

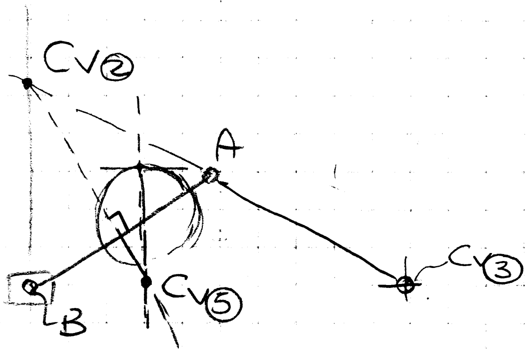


$d<0$
$e<0$ | OK

4) $C_{v①}\ \nexists$, $C_{v③} \equiv O$,

$C_{v②}$ INTERSEZIONE OA E VERTICALE PER B

$C_{v⑤}$ INTERSEZIONE VERT PER C E ORTOG A $\overline{AB}$ PER $C_{v②}$



$\Sigma_{③}$ $\qquad \underline{\omega}_5 = \underline{\omega}^{(tr)} + \underline{\omega}^{(rel)} \rightarrow \underline{\omega}^{(rel)} = \underline{\omega}_5 - \underline{\omega}^{(tr)} = \underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_3 = 2\underline{\omega}_2$

$\Sigma_{①}$ $\qquad \underline{v}_C = \underline{v}_C^{(rel)} + \underline{v}_C^{(tr)} \rightarrow \underline{v}_C^{(rel)} = e\,\underline{i} - c\,\underline{i} = -0.34\,(m/s)\,\underline{i}$

5) per manovellismo

$$\underline{a}_B = \underbrace{\dot{c}}_{INC}\,\underline{i} = \underline{a}_A + \dot{\underline{\omega}}_2 \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_2^2\,\overrightarrow{AB} = -\omega_3^2\,\overrightarrow{OA} + \underbrace{\dot{\underline{\omega}}_2}_{INC} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_2^2\,\overrightarrow{AB}$$

ma essendo $\underline{\omega}_2(t) = -\underline{\omega}_3(t)$ e $\dot{\underline{\omega}}_3 = \underline{0} \Rightarrow \dot{\underline{\omega}}_2 = \underline{0}$

per il disco 5 ; $\underline{a}_c$ non nota, si considera centro del disco O_5

$$\Sigma_{②} \quad \underline{a}_{O_5} = \underline{a}^{(tr)} + \underline{a}^{(rel)} + \underline{a}^{(cor)} = \underline{a}_A + \cancel{\dot{\underline{\omega}}_2 \wedge \overrightarrow{AO_5}} - \omega_2^2 \overrightarrow{AO_5} + \dot{d}\,\underline{\lambda} + + 2\underline{\omega}_2 \wedge d\,\underline{\lambda}$$

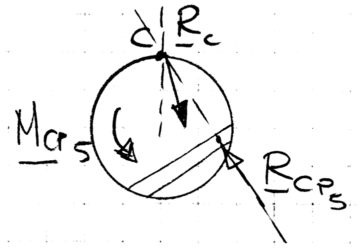
(è $\underline{v}_{O_5}^{(rel)} = \underline{v}_c^{(rel)}$) da cui

$$\underline{a}_{O_5} = f\,\underline{i} = -\omega_3^2\,\overrightarrow{OA} - \omega_2^2\,\overrightarrow{AO_5} + \ddot{d}\,\underline{\lambda} + 2\underline{\omega}_2 \wedge d\,\underline{\lambda}$$

$$\Sigma_{②} \quad \dot{\underline{\omega}}_5 = \dot{\underline{\omega}}_2$$

$\boxed{\text{STATICA}}$

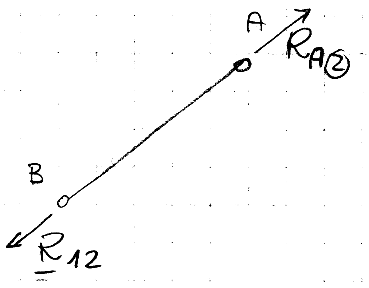
1) $\underline{F}_1$ e $\underline{M}$

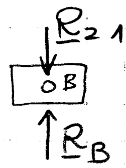


$C)$ $\quad M_{CP_5} = 0$

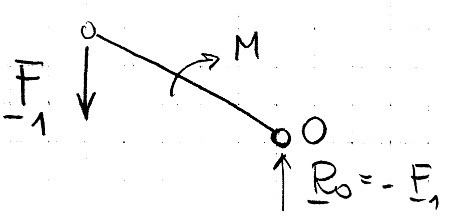
$\underline{R}_c + \underline{R}_{CP_5} = \underline{0}$ solo se $\underline{R}_c = \underline{R}_{CP_5} = \underline{0}$ avendo direzione diversa

oss. infatti che disco è un sottosist. isostatico





quindi AB è un'asta scarica dall'equilibrio di ① e di ② dovendo essere $\underline{R}_{12} = -\underline{R}_{21}$ (aventi direzioni diverse) $\quad \underline{R}_{12} = \underline{R}_{A②} = \underline{R}_{21} = \underline{R}_B = \underline{0}$



resta solo asta 3

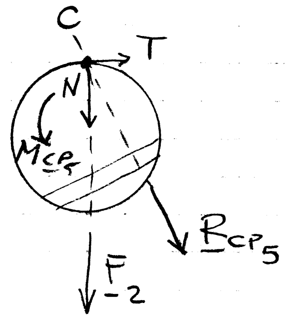
$$\underline{R}_0 = -\underline{F}_1$$

$$O) \quad M - F_1\,\overline{OA}\cos\theta = 0$$

$$M = 10\sqrt{3} \cdot 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\ Nm$$

oss. senza disco anche ① + ② sono sottosist. isostatico e ancora anche ① + ② + ⑤ → da cui si poteva considerare solo asta ③

2) $\underline{F}_2$ e $\underline{M}$



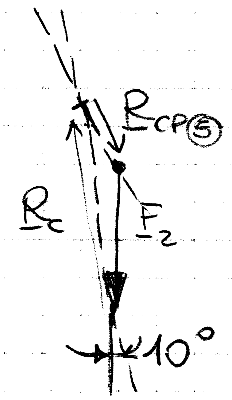
azioni coppia prism $(C, \underline{R}_{CP_5}) + \underline{M}_{CP_5}$

in C $\quad N$ e T (opposta a $\underline{v}_c$) con

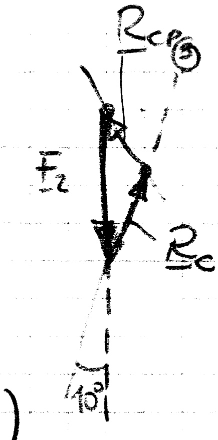
$$T = f\,N = tg\,10°\,N$$

$$\circlearrowleft C \quad M_{CP5} = 0$$

$$\begin{cases} N + F_2 + R_{CP_5}\cos\theta = 0 \\ T + R_{CP_5}\sin\theta = 0 \\ T = f|N| \quad \text{provo} \quad T = f\,N \end{cases}$$

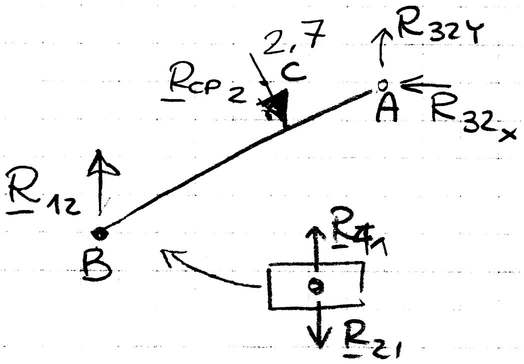


da costruzione grafica osservo che così otterrei T concorde con $\underline{v}_c$ allora $T = -f\,N$



$R_{CP_5} = -2.7$ N $\qquad N = -7.66$ N $\qquad T = 1.35$N

(si ottiene un risultato comunque "strano" con N diretta verso il telaio ...)

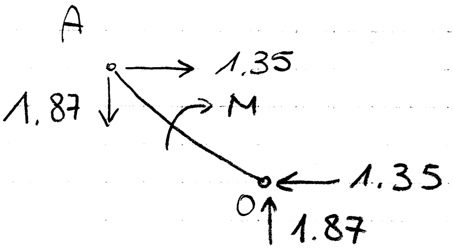


$$\overset{\curvearrowright}{A} \quad \overline{AB}\,\cancel{\cos\theta}\,R_{12} - \overline{AC}\,\cancel{\cos\theta}\,R_{CP_2} = 0$$

$$R_{12} = \frac{\cancel{0.02}\sqrt{3}}{\cancel{0.2}\,10} \cdot 2.7 \simeq 0.47\text{ N}$$

$$R_{32x} = R_{CP_2}\sin\theta = 1.35\text{ N}$$

$$R_{32Y} = R_{CP_2}\cos\theta - R_{12} = 1.87\text{ N}$$

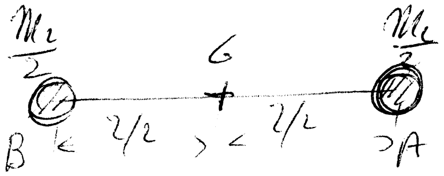


$$\overset{\curvearrowright}{O} \quad M + R_{23x}\,\overline{OA}\sin\theta - R_{23Y}\,\overline{OA}\cos\theta = 0$$

$$M = \overline{OA}\left(R_{23Y}\cos\theta - R_{23x}\sin\theta\right) = 0.19\ \text{Nm}$$

$$M_{TOT} = M^{(1)} + M^{(2)} = 3 + 0.19 = 3.19\ \text{Nm}$$

BIELLA



$$m_A + m_B = m_2$$

$$-\frac{m_B}{2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{m_A}{2}\cdot\frac{l}{2} = 0 \rightarrow m_A = m_B$$

$$\left(\frac{m_2}{2}\cdot\frac{l^2}{4}\right) + \frac{m_2}{2}\frac{l^2}{4} + J_0 = J_2$$

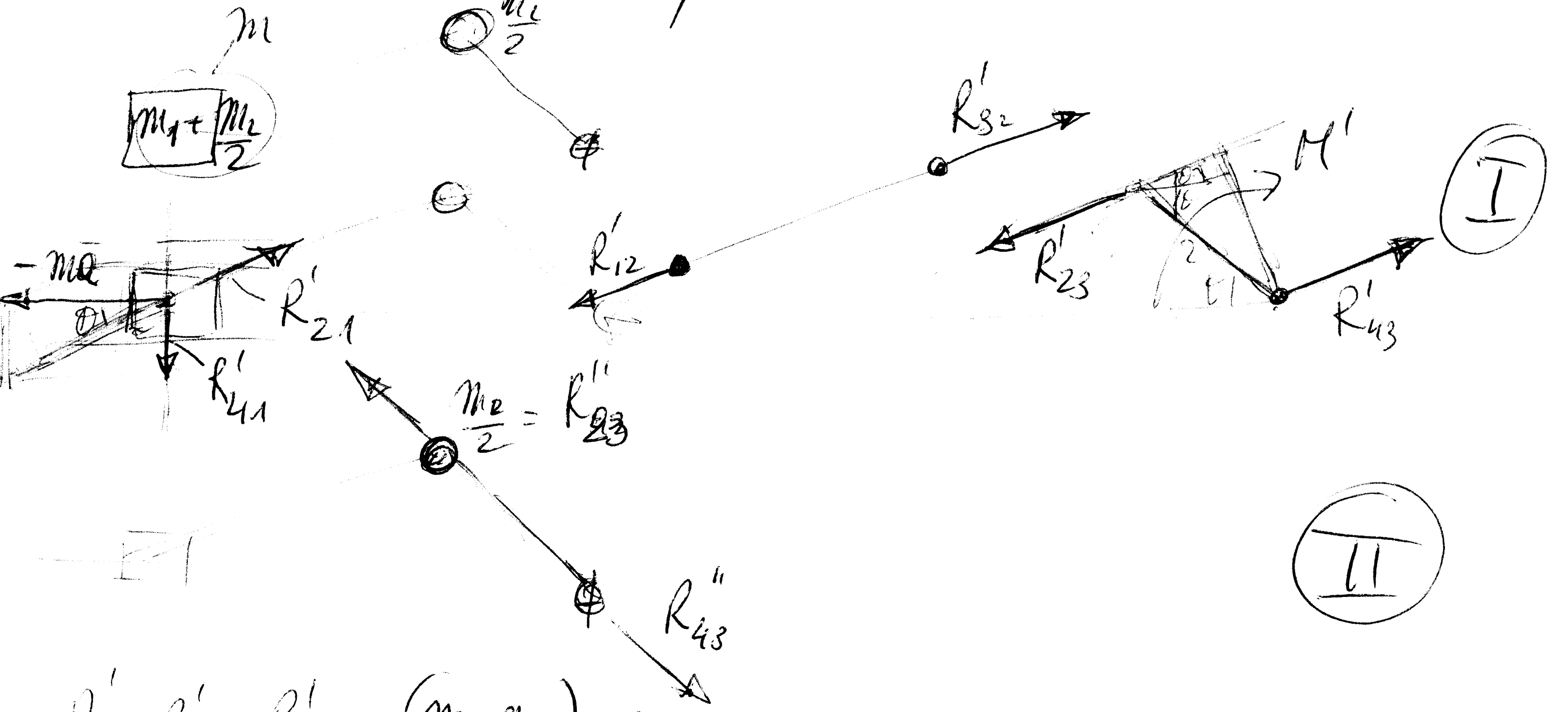
$$J_0 = J_2 - \frac{m_2}{2}\frac{l^2}{2} = 0.01 - \frac{0.4}{2}\cdot\frac{(0.2)^2}{2} =$$

$$= 0.01 - 0.1\cdot 4\cdot 10^{-2} = 0.01 - 0.004 = 0.006$$

PIANO ORIZZONTALE

SUPERFLUO: evidente che $m_A = m_B = \frac{m_2}{2}$

e J_0 non necessario ai fini dinamici, essendo $\ddot{\theta} = 0$



$$R'_{21} = R'_{32} = R'_{43} = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\cdot \underline{2r\omega^2 \cos\theta}$$

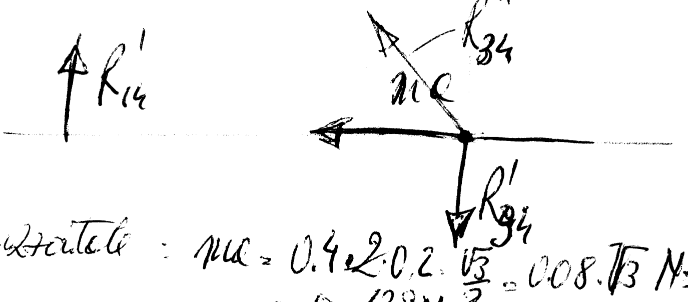
$$M' = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\cdot 2r\omega^2 \cdot 2r\sin 2\theta$$

e poiché il caso II non produce momento, coincide con M.

$$M = (0.2 + 0.2)\cdot 2\cdot 0.2\cdot 1\cdot 0.2\cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= 0.4\cdot 2\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\cdot 2\cdot 2\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-1}\sqrt{3} = 16\cdot 10^{-3}\sqrt{3} = \underline{0.028}\ \mathrm{Nm}$$

Sul telaio:



$$R'_{14} = R'_{34} = R'_{21}\sin\theta = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) 2r\omega^2 \sin\theta =$$

$$= (0.2 + 0.2)\, 2\cdot 0.2\cdot 1\cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 0.4\cdot 0.2 = 0.08\ \mathrm{N}$$

e le forze formano una coppia di braccio $2r\cos\theta$

$$M_T = 0.08\cdot 2\cdot 0.2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.016\sqrt{3} = \underline{0.028}\ \mathrm{Nm}$$

orizzontale: $m a = 0.4\cdot 2\cdot 0.2\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.08\sqrt{3}\ \mathrm{N} = 0.139\ \mathrm{N}$ = fisch.

in direzione verticale: $R''_{34} = \frac{m_2}{2}\cdot\omega^2 r = 0.2\cdot 0.2 = 0.04\ \mathrm{N}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}h^3\right)=0 \rightarrow \frac{d^2p}{dx^2}h^3=0 \rightarrow \frac{dp}{dx}=C$$

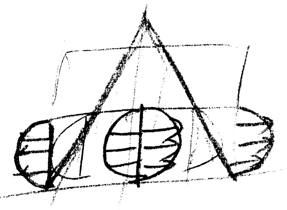
$$\boxed{p_0 = p_1 - \frac{128\mu Q}{\pi d^4} =}$$

$$\int_{p_a}^{p} dp = C\int_{x}^{a} dx \rightarrow p_a - p = C(l-x)$$

$$\text{pu } x=0 \quad p=p_0 \quad : \quad p_a - p_0 = Cl \rightarrow C = \frac{p_e-p_0}{a}$$

$$p - p_a = \left(\frac{p_a-p_0}{\cancel{a}}\right)\left(\frac{x-l}{l}\right) = (p_a-p_0)\left(\frac{x}{l}-1\right)$$

$$p - p_a = (p_0-p_a)\left(1-\frac{x}{l}\right)$$



$$P_1 = (p_0-p_a)\frac{l}{\cancel{2}} = 8.2\cdot10^5\cdot0.1 = 82000\,\frac{N}{m}$$

$$\tau = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{u} \quad v_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y(h-y) = -\frac{1}{2\mu}(p_0-p_a)\left(-\frac{1}{a}\right)y(h-y) =$$

$$= \frac{1}{2\mu l}(p_0-p_a)\,y(h-y)$$

$$\tau = \cancel{\mu}\cdot\frac{1}{2\cancel{\mu}l}(p_0-p_a)(h-2y)$$

$$\tau_{y=0} = (p_0-p_l)\frac{h}{2l} \qquad T=0$$

$$\frac{128\cdot\overset{\pi\cdot10^{-1}}{\cancel{0.1}}\cdot0.1\cdot10^{-6}}{\cancel{\pi}\,(2\cdot10^{-3})^4} = \frac{\overset{8}{\cancel{128}}\cdot10^{-8}}{\underset{1}{\cancel{16}}\cdot10^{-12}} = 8\cdot10^4\ Pa$$

$$p_0 = 10^6 - 8\cdot10^4 = 10^4(100-8) = 92\cdot10^4 = 9.2\cdot10^5\,\frac{N}{m^2}$$

$$\lambda = \frac{10}{\sqrt{9+16}} = \frac{30}{5} = 6$$