



Pisa, 11 gennaio 2006

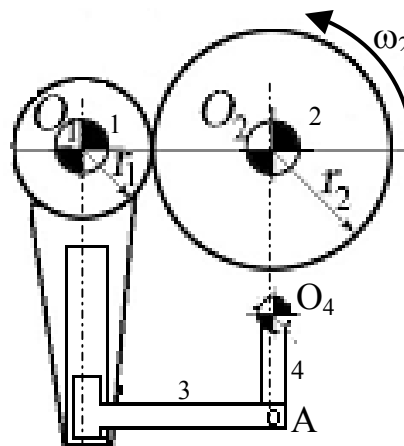
ESAME DI MECCANICA – A.A. 2004-05
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio cinematica

La ruota dentata 2 ingrana con un settore dentato di una ruota 1 che è solidale ad un braccio rigido nel quale è ricavata una guida per coppia prismatica in cui scorre il corpo 3. Una asta 4 è collegata con coppia rotoidale al telaio e al corpo 4. Considerando nota la legge di moto della ruota 2 (motrice):

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità relativa tra 3 e 4 (grafica e analitica);
2. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
3. si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).

DATI: $r_1=1\text{ cm}$, $r_2=2\text{ cm}$, $O_2O_4=3\text{ cm}$, $AO_4=2\text{ cm}$, $\omega_2=1.7\text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_2=1\text{ rad/s}^2$ (antioraria).

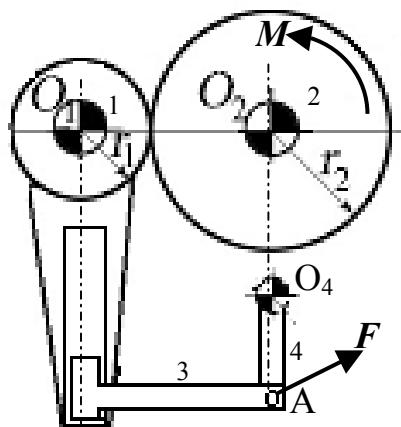


Esercizio statica

Si consideri ancora il meccanismo dell'esercizio precedente e se ne studi l'equilibrio nel caso in cui sia applicata una forza F sul perno A (nota) ed un momento sulla ruota 2.

Si determini innanzitutto il momento necessario per l'equilibrio nella configurazione di figura. Si calcolino poi tutte le azioni nei vincoli rappresentando i diagrammi di corpo libero risolti dei vari elementi. (Per le ruote dentate si consideri un angolo di pressione α).

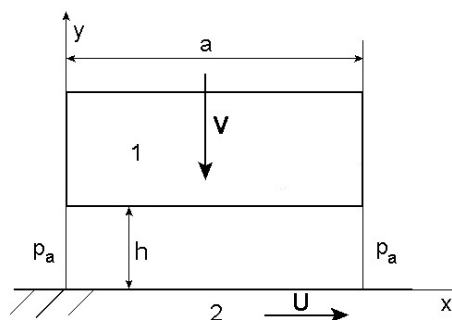
DATI: $F=120\text{ N}$ inclinata di 30° rispetto all'orizzontale, $\alpha=20^\circ$.



Esercizio

La coppia lubrificata rappresentata in figura ha la dimensione ortogonale al piano del disegno molto maggiore (teoricamente infinita) rispetto alle altre (larghezza, a , e altezza del meato, h - costante lungo la direzione x). Il corpo 1 si muove con velocità V diretta lungo y mentre il corpo 2 è fermo ($U=0$); la pressione è uguale a quella atmosferica p_a alle estremità della coppia. Sono date le espressioni generiche dell'equazione di Reynolds e dell'andamento della velocità del lubrificante lungo l'asse x .

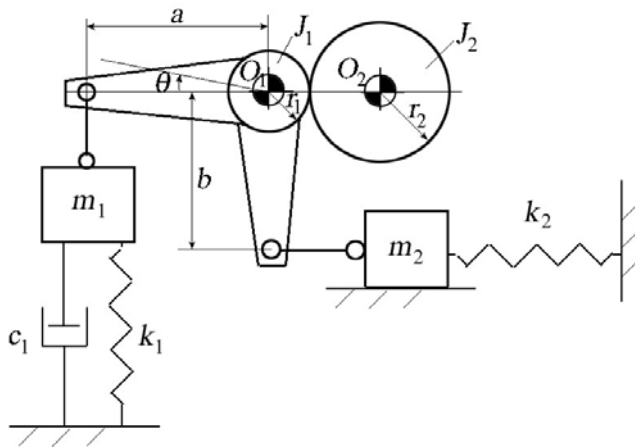
1. Si ricavino le forme dell'equazione di Reynolds e della velocità v_x relativamente al caso in esame.
2. Si ricavino le espressioni della pressione e del carico per unità di lunghezza e si calcoli il valore numerico di quest'ultima grandezza.
3. Si riportino in forma grafica l'andamento della pressione nel meato ed i profili di velocità nelle due sezioni di uscita e nella centrale.





4. Si ricavi l'espressione della portata in direzione x per unità di lunghezza e si calcoli il valore della portata totale uscente lateralmente (sempre per unità di lunghezza).
5. Si ricavi l'espressione della tensione tangenziale agente lungo x in corrispondenza della superficie del corpo 2 e si calcoli la forza d'attrito totale in tale direzione.

$$\mu=0.1\text{Pas}, V=0.2\text{m/s}, a=1\text{cm}, h=100\mu\text{m}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3\right) = -6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} - 12\mu V, v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(h-y) - U\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$



Esercizio Dinamica

Il sistema mostrato è libero di muoversi nel piano di figura compiendo piccole oscillazioni. La ruota dentata 2 (con raggio primitiva r_2 e momento d'inerzia J_2 rispetto all'asse di traccia O_2) ingrana con un settore dentato (raggio primitiva r_1) solidale con due bracci rigidi (il momento d'inerzia rispetto all'asse di traccia O_1 dell'intero gruppo è J_1). Alle estremità dei bracci sono incernierate delle aste (di massa trascurabile) collegate a loro volta con due masse, m_1 e m_2 . La massa m_1 è collegata al telaio con una molla di costante

elastica k_1 ed uno smorzatore viscoso di costante c_1 , la massa m_2 tramite una molla di costante k_2 .

1. Si scriva l'equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema.
2. Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della pulsazione propria del sistema.
3. Si ricavino l'espressione ed il valore numerico del fattore di smorzamento, individuando il tipo di moto.
4. Si indichi l'espressione generica della legge del moto e se ne determini l'espressione nel caso specifico in base alle condizioni iniziali $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$.

$$r_1=1\text{cm}, r_2=2\text{cm}, a=10\text{cm}, b=5\text{cm}, m_1=0.25\text{kg}, m_2=1\text{kg}, J_1=0.01\text{kgm}^2, J_2=0.02\text{kgm}^2, k_1=1\text{N/m}, k_2=4\text{N/m}, c_1=2\text{Ns/m}$$



Pisa, 11 gennaio 2006

ESAME DI MECCANICA – A.A. 2003-2004

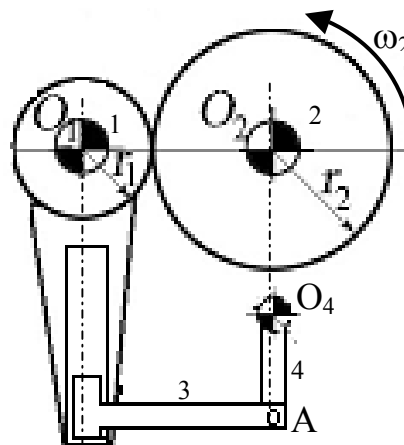
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio cinematica

La ruota dentata 2 ingrana con un settore dentato di una ruota 1 che è solidale ad un braccio rigido nel quale è ricavata una guida per coppia prismatica in cui scorre il corpo 3. Una asta 4 è collegata con coppia rotoidale al telaio e al corpo 4. Considerando nota la legge di moto della ruota 2 (motrice):

4. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità relativa tra 3 e 4 (grafica e analitica);
5. si determini la velocità angolare relativa tra 4 e 2 e la velocità relativa di O_4 rispetto al corpo 2;
6. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
7. si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).

DATI: $r_1=1\text{cm}$, $r_2=2\text{cm}$, $O_2O_4=2.5\text{ cm}$, $AO_4=1.5\text{ cm}$, $\omega_2=3\text{ rad/s}$, $\dot{\omega}_2=1\text{ rad/s}^2$ (antioraria).

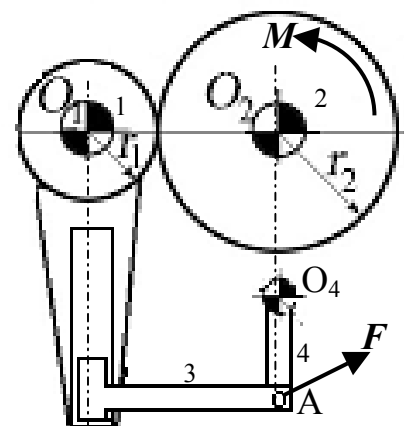


Esercizio statica

Si consideri ancora il meccanismo dell'esercizio precedente e se ne studi l'equilibrio nel caso in cui sia applicata una forza F sul perno A (nota) ed un momento sulla ruota 2.

Si determini innanzitutto il momento necessario per l'equilibrio nella configurazione di figura. Si calcolino poi tutte le azioni nei vincoli rappresentando i diagrammi di corpo libero risolti dei vari elementi. (Per le ruote dentate si consideri un angolo di pressione α).

DATI: $F=120\text{ N}$ inclinata di 30° rispetto all'orizzontale, $\alpha=20^\circ$.



Esercizio di Dinamica

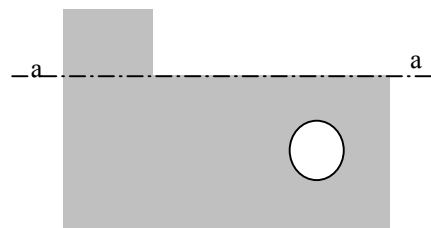
Si impostino le equazioni della dinamica nel caso in cui il meccanismo, soggetto alla forza F (nota) e al momento M (incognito) si debba muovere con legge di moto imposta.

Si scriva l'energia cinetica del sistema (facendo riferimento ai dati della cinematica).

DATI: $m_1=0.25\text{kg}$, $m_2=1\text{kg}$, $m_3=0.2\text{kg}$, $m_4=0.1\text{kg}$, $J_1=0.01\text{kgm}^2$ (rispetto ad O_1), $J_2=0.02\text{kgm}^2$ (rispetto ad O_2), $J_3=0.01\text{kgm}^2$ (rispetto ad O_1), $J_4=0.01\text{kgm}^2$.

Esercizio

Individuare il baricentro e il momento di inerzia rispetto alla retta a-a della lastra omogenea di figura (densità superficiale 3 kg/dm^2).





Pisa, 26 gennaio 2006

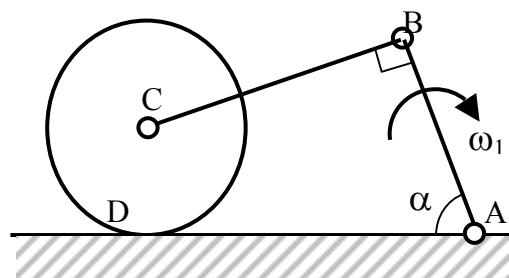
ESAME DI MECCANICA (A.A. 2003-04)

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da due aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta AB:

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità del punto C (grafica e analitica);
2. si determinino le velocità relative di D rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di D e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).

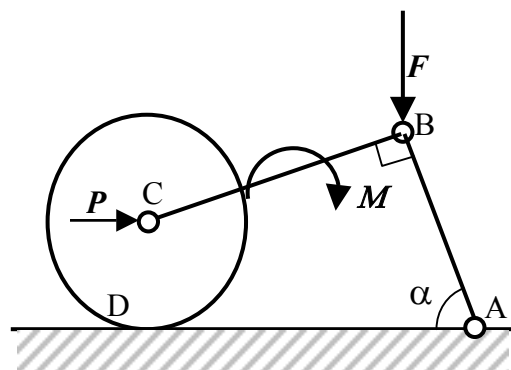
DATI: $AB=20$ cm, $AD=28$ cm, $r=4\sqrt{3}$ cm, $\alpha=60^\circ$, $\omega_1=6$ rad/s (oraria), $\dot{\omega}_1=1$ rad/s² (antioraria).



Esercizio statica

Si consideri lo stesso sistema precedente, caricato con una forza verticale sul perno B e con un momento sull'asta BC, entrambi noti. Si determini, mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, la forza orizzontale P da applicare in C per l'equilibrio del sistema.

Si determinino poi le forze che si scambiano i corpi e si rappresentino i diagrammi di corpo libero risolti.



DATI: $F=127$ N, $M=19$ Nm

Esercizio dinamica

Si scrivano le equazioni della dinamica del sistema, considerando agente solo la forza P , incognita, da determinare per far muovere il sistema secondo la cinematica del primo esercizio. Calcolare l'energia cinetica del sistema.

DATI: $m_1=m_2=2$ kg, $I_1=I_2=0.025$ kg m², $m_3=5$ kg, $I_3=0.15$ kg m² (1=asta AB, 2=asta BC, 3=disco, tutti i corpi sono omogenei)

Domanda facoltativa

Descrivere il funzionamento e le relazioni fondamentali del freno a ceppo.



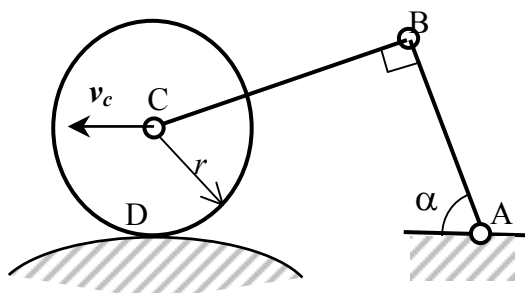
Pisa, 26 gennaio 2006

ESAME DI MECCANICA – A.A. 2004-05
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da due aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Considerando nota la legge di moto del punto C:

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi (grafica e analitica);
2. si determinino le velocità relative di D rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di D e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).

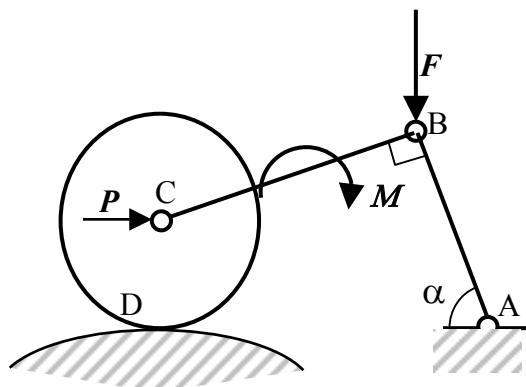


DATI: $AB=20$ cm, $AD=28$ cm, $r=4\sqrt{3}$ cm,
 $\alpha=60^\circ$, $v_C=10\sqrt{3}$ cm/s (orizzontate verso sinistra),
 $a_{Ctang}=8\sqrt{3}$ cm/s², raggio del telaio 10 cm.

Esercizio statica

Si consideri lo stesso sistema precedente, caricato con una forza verticale sul perno B e con un momento sull'asta BC, entrambi noti. Si determini, mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, la forza orizzontale P da applicare in C per l'equilibrio del sistema.

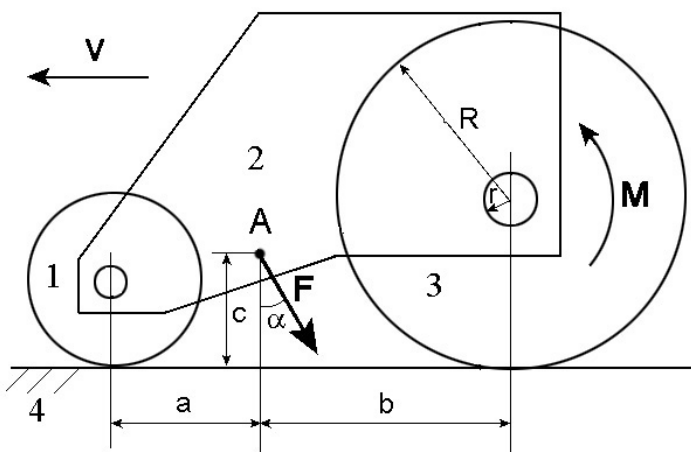
Si determinino poi le forze che si scambiano i corpi e si rappresentino i diagrammi di corpo libero risolti.



DATI: $F=127$ N, $M=19$ Nm

Esercizio

Il veicolo schematizzato in figura avanza nel verso indicato. La ruota 1 è trascinata, la 3 motrice. È nota la forza esterna F applicata nel punto A e formante un angolo α rispetto alla verticale. Si considerino privi di attrito gli accoppiamenti fra la ruota 1 ed i corpi 2 e 4 (il suolo), mentre con attrito quelli fra 3 e 4 (contatto di rotolamento con parametro d'attrito volvente δ) e fra 3 e 2 (coppia rotoidale di raggio r con coefficiente d'attrito f).





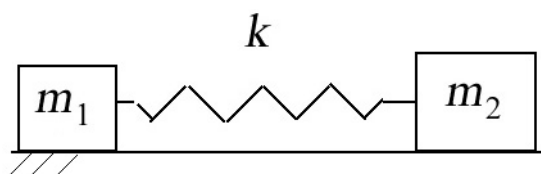
1. Si espongano brevemente gli aspetti fondamentali dell'attrito di rotolamento e quelli e dell'attrito di strisciamento nelle coppie rotoidali
2. Si ricavino graficamente ed analiticamente le reazioni del suolo sul veicolo e se ne calcolino i valori numerici
3. Si ricavino l'espressione ed il valore numerico del momento motore M
4. Si spieghi in quali condizioni non si ha strisciamento nel contatto fra la ruota motrice 3 ed il suolo
5. *Facoltativo*: dato il coefficiente di aderenza f_a fra ruota e suolo si verifichi se vi è strisciamento.
6. *Facoltativo*: si impostino le equazioni nel caso in cui il veicolo stia accelerando verso sinistra con accelerazione a (considerando note masse ed inerzie dei corpi).

$$a=0.5\text{m}, b=a\sqrt{3}, c=0.38\text{m}, R=0.6\text{m}, r=\sqrt{2}/10\text{m}, \delta=120\text{mm}, f_a=1.2, f=0.3, F=1000\text{N}$$

Esercizio

Due masse m_1 e m_2 collegate fra loro da una molla di rigidezza k sono libere di muoversi lungo una direzione su un piano senza attrito.

1. Si scrivano le equazioni di D'Alembert di equilibrio del sistema.
2. Si ricavino le pulsazioni proprie del sistema
3. Si ricavino le espressioni generiche della legge del moto delle due masse.
4. Si ricavino le espressioni del punto 3 nel caso specifico in cui all'istante iniziale le due masse siano ferme e la molla sia allungata di Δ rispetto alla condizione di riposo.



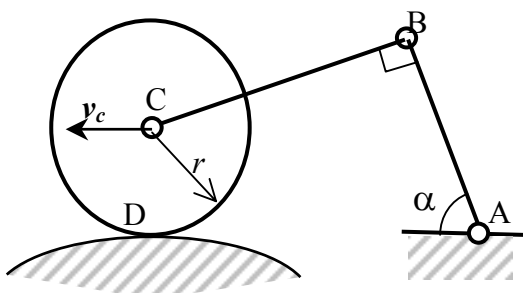
COMPITINO DI MECCANICA – A.A. 2004-05

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da due aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Considerando nota la legge di moto del punto C:

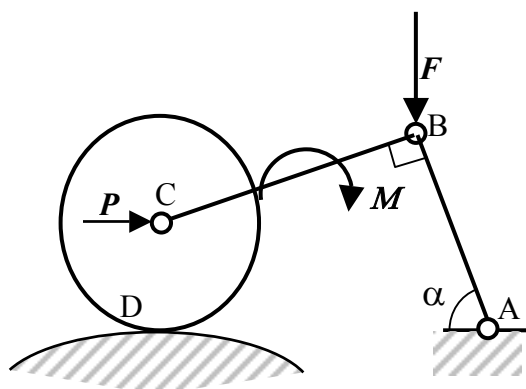
1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi (grafica e analitica);
2. si determinino le velocità relative di D rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli la accelerazione di D e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni (facoltativa soluzione grafica/analitica).



DATI: $AB=20$ cm, $AD=28$ cm, $r=4\sqrt{3}$ cm,
 $\alpha=60^\circ$, $v_C=10\sqrt{3}$ cm/s (orizzontale verso sinistra),
 $a_{Ctang}=8\sqrt{3}$ cm/s², raggio del telaio 10 cm.

Esercizio statica

Si consideri lo stesso sistema precedente, caricato con una forza verticale sul perno B e con un momento sull'asta BC, entrambi noti. Si determini, mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, la forza orizzontale P da applicare in C per l'equilibrio del sistema.



Si determinino poi le forze che si scambiano i corpi e si rappresentino i diagrammi di corpo libero risolti.

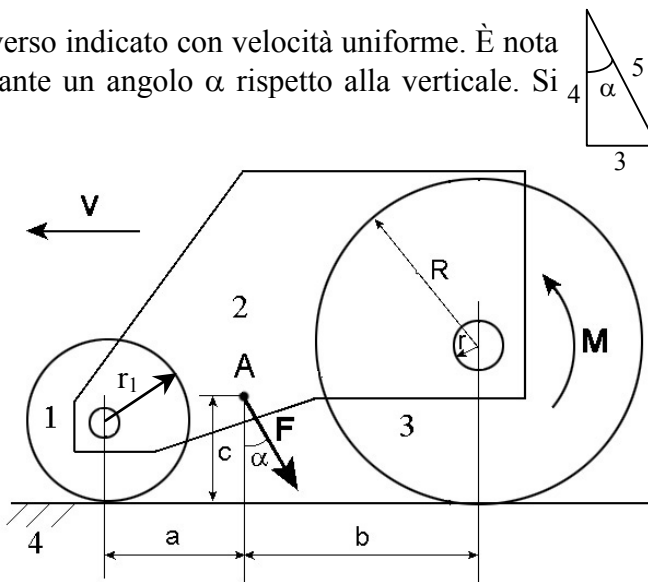
DATI: $F=127$ N, $M=19$ Nm

Esercizio

Il veicolo schematizzato in figura avanza nel verso indicato con velocità uniforme. È nota la forza esterna F applicata nel punto A e formante un angolo α rispetto alla verticale. Si consideri che le ruote rotolano senza strisciare.

1. Si ricavino graficamente ed analiticamente le reazioni del suolo sul veicolo e se ne calcolino i valori numerici
2. Si ricavi il momento motore M
3. Si spieghi in quali condizioni non si ha strisciamento nel contatto fra la ruota motrice ed il suolo

DATI $a=0.6$ m, $b=0.11$ m, $c=0.15$ m, $R=0.15$ m, $r_1=0.1$ m, $f_s=1.2$, $F=1000$ N, (ATTENZIONE DISEGNO NON IN PROPORZIONE CON I DATI).





Esercizio dinamica

Facendo riferimento all'esercizio precedente, si consideri il caso in cui il veicolo sia in fase di accelerazione, con a diretta verso sinistra (come v). Si studi la dinamica del sistema impostando le equazioni in forma letterale in funzione di a . Si verifichi che per $a=0$ si ritorna al caso precedente statico e si calcoli il momento corrispondente ad $a=8 \text{ m/s}^2$.

Si calcoli inoltre l'energia cinetica del sistema per una velocità di avanzamento v .

DATI i corpi sono omogenei, il baricentro del corpo 2 coincide con A, $m_1=20 \text{ kg}$, $m_2=140 \text{ kg}$, $m_3=30 \text{ kg}$, $v=10 \text{ km/h}$.

RACCOMANDAZIONI:

- precisione nelle notazioni vettori/scalari
 - indicare eventuali sistemi di riferimento utilizzati
 - evidenziare i risultati nell'elaborato, (in statica/dinamica precisare anche verso "definitivo" di forze/momenti)
 - cercare di presentare elaborato chiaro e ordinato
-



Pisa, 26 gennaio 2006

COMPITINO DI MECCANICA – A.A. 2005-06

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio vettori

Si determini l'equazione dell'asse centrale del seguente sistema di vettori:

$\mathbf{v}_1(1,2)$ in $P_1(0,3)$, $\mathbf{v}_2(2,-5)$ in $P_2(1,1)$, $\mathbf{v}_3(0,3)$ in $P_3(0,3)$, $\mathbf{M}(0,0,6)$

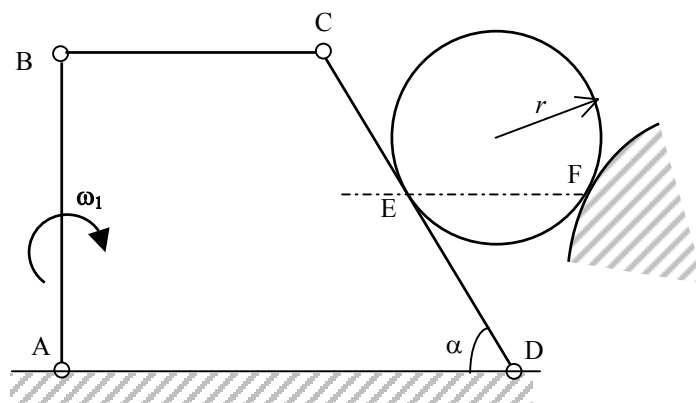
si verifichi la soluzione con una rappresentazione grafica.

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da tre aste e da un disco che rotola senza strisciare sul telaio. Individuare il tipo di rotolamento in E affinché il sistema abbia 1gdl. Considerando nota la legge di moto dell'asta AB:

1. si determinino le velocità angolari delle aste (grafica e analitica);
2. si determini le velocità angolare del disco e la velocità del suo punto E (grafica e analitica);
3. si determinino le velocità relative di C rispetto all'asta AB e di F rispetto all'asta CD;
4. si individuino i centri delle velocità dei corpi assoluti e relativi;
5. si determini la accelerazione di F e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni

DATI: $AB=30$ cm, $BC=20$ cm, $DE=EC$, $r=6$ cm, $\alpha=60^\circ$, $\omega_1=2\sqrt{3}$ rad/s (oraria), raggio telaio 10 cm.



Esercizio statica

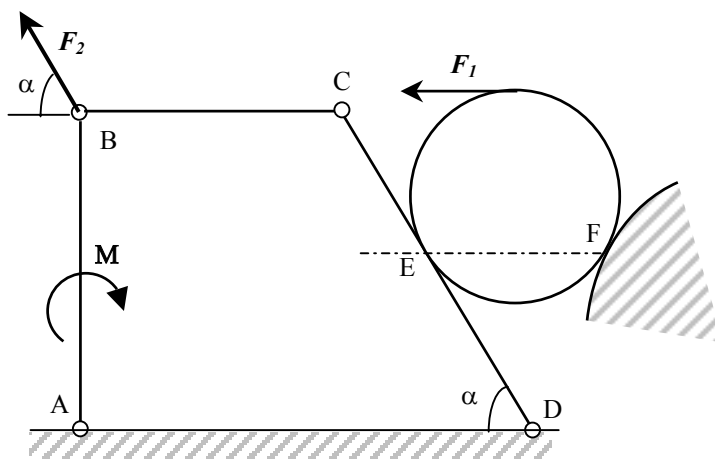
Si consideri lo schema precedente e se ne studi l'equilibrio nella configurazione di figura. In particolare di applichi il principio di sovrapposizione degli effetti per determinare il momento \mathbf{M} da applicare all'asta AB quando agiscono sul sistema le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 note (entrambe pari a 100 N).

Si rappresentino per ciascun caso i diagrammi di corpo libero dei corpi.

Osservazioni: si assuma nullo l'attrito in E e elevato quello in F da poter assimilare il vincolo ad una coppia rotoidale.

Facoltative:

- sono presenti sottosistemi isostatici?
- quanto deve valere il coefficiente di attrito in F affinché non si abbia incipiente movimento?
- cosa cambierebbe in caso di attrito non nullo in E?



Esercizio dinamica

Si impostino le equazioni della dinamica del sistema precedente, considerando agente il solo momento motore M (incognito) da determinare affinché il sistema si muova con cinematica imposta (nota).

Si determini inoltre l'energia cinetica del sistema facendo riferimento ai dati della cinematica.

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}, m_3 = m_4 = 3 \text{ kg}, I_1 = I_2 = 0.01 \text{ kg m}^2, I_3 = I_4 = 0.02 \text{ kg m}^2$$

RACCOMANDAZIONI:

- precisione nelle notazioni vettori/scalari
 - indicare eventuali sistemi di riferimento utilizzati
 - evidenziare i risultati nell'elaborato, (in statica/dinamica precisare anche verso "definitivo" di forze/momenti)
 - cercare di presentare elaborato chiaro e ordinato
-



ESAME DI MECCANICA (A.A. 2003-04) del 26/1/2006

Esercizio cinematica

1) velocità angolari dei corpi

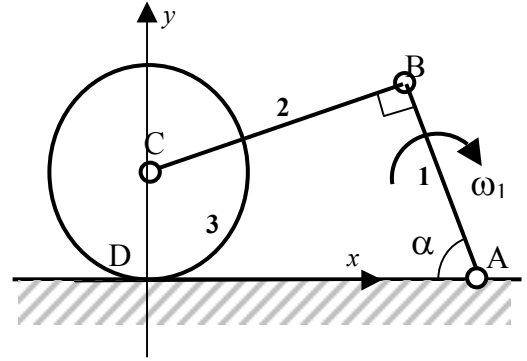
Ad esempio ponendo

$$\mathbf{v}_{C \in 2} = \mathbf{v}_{C \in 3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{DC} = c \mathbf{i}$$

costruzione grafica dà un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° , da cui

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{10}{3} \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_3 = -20 \mathbf{k} \quad \mathbf{v}_C = 0.8\sqrt{3} \mathbf{i} \text{ (m/s)}$$



2) velocità relative di D rispetto all'asta AB e all'asta BC

$$\Sigma_1 \mathbf{v}_D^{(rel)} = -\mathbf{v}_D^{(tr)} = -\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AD} = -1.68 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

$$\Sigma_2 \mathbf{v}_D^{(rel)} = -\mathbf{v}_D^{(tr)} = -(\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{CD}) = -\frac{2.8\sqrt{3}}{3} \mathbf{i} \text{ (m/s) oppure}$$

$$\Sigma_2 \mathbf{v}_D^{(rel)} = \boldsymbol{\omega}^{(rel)} \wedge \overrightarrow{CD} = (\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \overrightarrow{CD}$$

3) si individuino i centri delle velocità dei corpi

$CV_1 \equiv A$, $CV_3 \equiv D$, CV_2 dall'intersezione del prolungamento di AB con il prolungamento di CD

4) si calcoli l'accelerazione di D e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni

$$\mathbf{a}_D = -D \omega_3^2 \mathbf{j} \quad \text{dove} \quad \frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = -\frac{1}{0.04\sqrt{3}} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{a}_D = 5773 \mathbf{j}$$

equazione risolutiva ad esempio ponendo

$$\mathbf{a}_{C \in 2} = \mathbf{a}_{C \in 3}$$

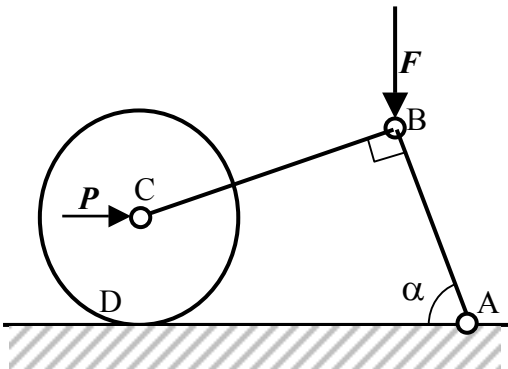
$$\mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_2^2 \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \wedge \overrightarrow{DC} - \omega_3^2 \overrightarrow{DC} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \wedge \overrightarrow{DC} = c^* \mathbf{i}$$

$$\text{con } \mathbf{a}_B = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_1^2 \overrightarrow{AB}$$

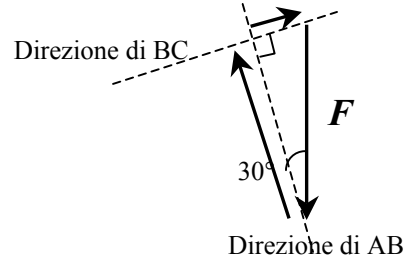


Esercizio statica

Primo sottosistema, solo F



Le aste AB e BC sono aste scariche, quindi sono note le direzioni delle loro azioni sul perno B

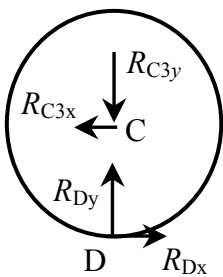


Da cui (vers=versore)

$$R_{2B} = \frac{F}{2} \text{vers}(\overrightarrow{CB}) \quad R_{1B} = \frac{\sqrt{3}F}{2} \text{vers}(\overrightarrow{AB})$$

in modulo $R_{2B} = 63.5 \text{ N}$ $R_{1B} = 63.5\sqrt{3} \text{ N}$

La ruota 3 riceve due forze, una dal terreno ed una dal perno C:



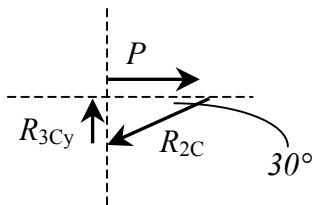
$$R_{C3x} = R_{Dx} = 0 \text{ N} \quad R_{C3y} = R_{Dy}$$

Per l'equilibrio del perno C si ha lo schema:

essendo $R_{2B} = R_{2C}$

si ottiene

$$P = \frac{R_{2C}\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} \quad R_{C3y} = \frac{R_{2C}}{2} \mathbf{j}, \text{ ossia in modulo}$$



$$P = F\sqrt{3}/4 \approx 55 \text{ N}, \quad R_{3Cy} = F/4 = 31.75 \text{ N}$$

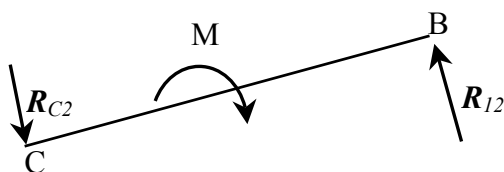
Secondo sottosistema, solo M

L'asta AB è ancora scarica, l'asta BC no; restano valide le equazioni per la ruota.

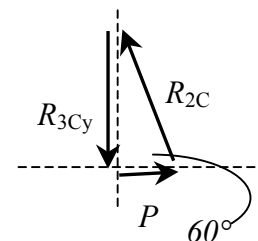
Dall'equilibrio dell'asta BC

$$R_{12} = R_{C2} = M/BC = 91.4 \text{ N}$$

e dall'equilibrio del perno



$$P = M/(2BC) \approx 45.7 \text{ N}, \quad R_{3Cy} = M\sqrt{3}/(2BC) = 79.2 \text{ N}$$



Esercizio dinamica

Ecinetica totale=37.19 joule



COMPITINO DI MECCANICA (A.A. 2004-05) del 26/1/2006

Esercizio cinematica

Analogamente a 2003-04, con input diverso

1) velocità angolari dei corpi

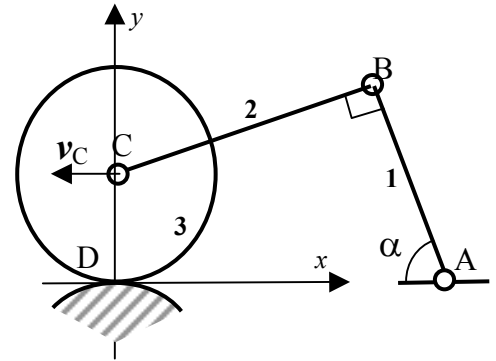
Ad esempio ponendo

$$\mathbf{v}_{C \in 2} = \mathbf{v}_{C \in 3}$$

$$\omega_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \omega_2 \wedge \overrightarrow{BC} = \omega_3 \wedge \overrightarrow{DC} = c \mathbf{i}$$

costruzione grafica dà un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, da cui

$$\omega_1 = 0.75 \mathbf{k} \quad \omega_2 = -\frac{5}{12} \mathbf{k} \quad \omega_3 = 2.5 \mathbf{k}$$



2) velocità relative di D rispetto all'asta AB e all'asta BC

$$\Sigma_1 \quad \mathbf{v}_D^{(rel)} = -\mathbf{v}_D^{(tr)} = -\omega_1 \wedge \overrightarrow{AD} = 21 \mathbf{j} \text{ (cm/s)}$$

$$\Sigma_2 \quad \mathbf{v}_D^{(rel)} = -\mathbf{v}_D^{(tr)} = -(\mathbf{v}_C + \omega_2 \wedge \overrightarrow{CD}) = \frac{35}{12} \mathbf{i} \text{ (cm/s) oppure}$$

$$\Sigma_2 \quad \mathbf{v}_D^{(rel)} = \omega^{(rel)} \wedge \overrightarrow{CD} = (\omega_3 - \omega_2) \wedge \overrightarrow{CD}$$

3) si individuino i centri delle velocità dei corpi

$CV_1 \equiv A$, $CV_3 \equiv D$, CV_2 dall'intersezione del prolungamento di AB con il prolungamento di CD

4) si calcoli l'accelerazione di D e si imposti la soluzione del problema delle accelerazioni

$$\mathbf{a}_D = -D \omega_3^2 \mathbf{j} \quad \text{dove} \quad \frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{-10} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{a}_D = 25.6 \mathbf{j} \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

equazione risolutiva ad esempio ponendo

$$\mathbf{a}_{C \in 2} = \mathbf{a}_{C \in 3} = \mathbf{a}_{C \text{ tang}} + \frac{(\mathbf{v}_C)^2}{R_C} (-\mathbf{j}) \quad \text{con } R_C = r_{\text{telaio}} + r_{\text{disco}}$$

$$\mathbf{a}_B + \dot{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_2^2 \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}_D + \dot{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{DC} - \omega_3^2 \overrightarrow{DC}$$

$$\text{con } \mathbf{a}_B = \dot{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_1^2 \overrightarrow{AB}$$

Esercizio statica

Uguale a 2003-2004

Esercizio statica

Uguale a 2003-2004



Esercizio statica veicolo

Sono tre corpi. Dall'equilibrio delle ruote rispetto ai loro assi:

$$T_1 = 0 \text{ e } T_2 = M/R$$

Dall'equilibrio del veicolo complessivo

$$F \sin \alpha - T_2 = 0$$

$$N_1 + N_2 - F \cos \alpha = 0$$

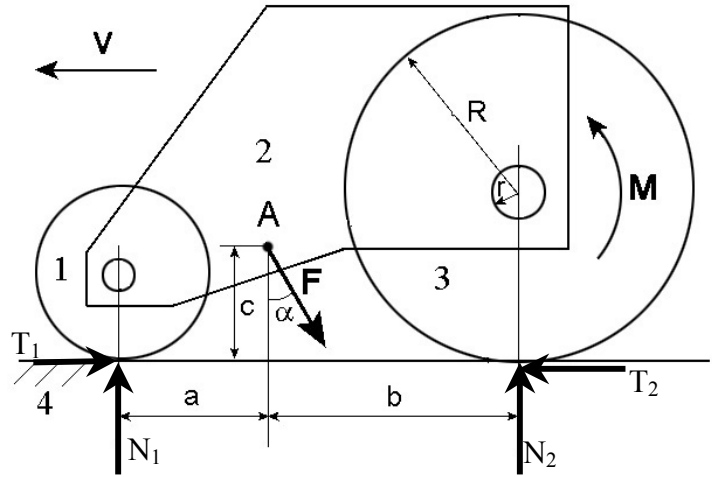
$$N_1(a+b) - F \cos \alpha b + F \sin \alpha c = 0$$

e quindi

$$F \sin \alpha - T_2 = 0$$

$$N_1 + N_2 - F \cos \alpha = 0$$

$$N_1(a+b) - F \cos \alpha b + F \sin \alpha c = 0$$



Esercizio dinamica veicolo

Per la ruota 1

$$R_{21x} - T_1 = m_1 \vec{a}$$

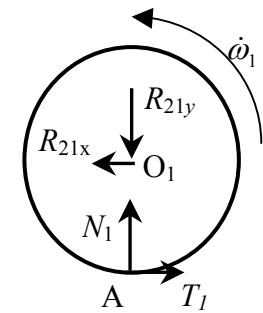
$$R_{21y} - N_1 = 0$$

$$T_1 r_1 = I_1 \dot{\omega}_1$$

$$\dot{\omega}_1 = |\vec{a}| / r_1$$

da cui, ponendo $I = m r^2 / 2$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{a}| \\ R_{21x} = \frac{3}{2} m_1 |\vec{a}| \\ R_{21y} - N_1 = 0 \end{cases}$$



Per l'abitacolo

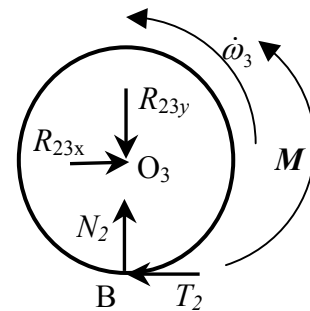
$$-R_{12x} + R_{32x} - F \sin \alpha = m_2 \vec{a}$$

$$R_{23y} + R_{32y} - F \cos \alpha = 0$$

$$R_{32y} b - R_{12y} a + R_{12x} (c - r_1) = I_2 \dot{\omega}_2$$

$$\dot{\omega}_2 = 0$$

da cui si possono calcolare R_{32x} , R_{32y} e R_{12y}



Infine, per la ruota 3

$$-R_{31x} + T_2 = m_3 \vec{a}$$

$$R_{23y} - N_2 = 0$$

$$M - T_2 R = I_3 \dot{\omega}_3 \quad \text{da cui si possono calcolare } N_2, T_2 \text{ e } M$$

$$\dot{\omega}_3 = |\vec{a}| / R$$



COMPITINO DI MECCANICA (A.A. 2006-06) del 26/1/2006

Esercizio vettori

Asse centrale $y=4/3$

Esercizio cinematica

1 asta AB, 2 asta BC, 3 asta CD, 4 disco. Sfruttando costruzione grafica con triangoli rettangoli e angoli di 60° le prime due risposte si trovano subito:

1) $\omega_2 = 3\mathbf{k} \quad \omega_3 = \omega_1 = -2\sqrt{3}\mathbf{k}$

2) $\omega_4 = -\frac{20\sqrt{3}}{3}\mathbf{k} \quad \mathbf{v}_E^{(rel)} = 60\sqrt{3}\lambda \quad \lambda(-0.5, 0.5\sqrt{3})$

Analogo a 03-04

3) $\mathbf{v}_C^{(re-1)} = 20(3 + 2\sqrt{3})\mathbf{j} \quad \mathbf{v}_C^{(re-3)} = -2\sqrt{3}(15\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j})$

4) $\mathbf{a}_F = -D\omega_4^2\mathbf{n}$ dove $\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{-10} - \frac{1}{6}$

con \mathbf{n} normale al telaio in F diretta verso il centro del disco, da cui

$\mathbf{a}_F = 500\mathbf{n}$

equazioni risolutive per le accelerazioni:

prima quadrilatero, ad esempio in C,

$\mathbf{a}_{C \in 2} = \mathbf{a}_{C \in 3}$

$\mathbf{a}_B + \dot{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_2^2 \overrightarrow{BC} = \dot{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{DC} - \omega_3^2 \overrightarrow{DC}$

con $\mathbf{a}_B = \dot{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_1^2 \overrightarrow{AB}$

poi centro del disco con osservatore su asta 3

$\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_F + \dot{\omega}_4 \wedge \overrightarrow{FO} - \omega_4^2 \overrightarrow{FO} = \mathbf{a}_O^{(tr)} + \mathbf{a}_O^{(rel)} + \mathbf{a}_O^{(Cor)}$

$\mathbf{a}_O^{(tr)} = \dot{\omega}_3 \wedge \overrightarrow{DO} - \omega_3^2 \overrightarrow{DO} \quad (\text{nota})$

$\mathbf{a}_O^{(rel)} = d^*\lambda$

$\mathbf{a}_O^{(Cor)} = 2\omega_3 \wedge \mathbf{v}_O^{(rel)} \quad \mathbf{e} \mathbf{v}_O^{(rel)} = \mathbf{v}_E^{(rel)} + \boldsymbol{\omega}^{(rel)} \wedge \overrightarrow{EO}$

Esercizio statica

Sottosistema con solo \mathbf{F}_1

$M^{(1)} = 30 \text{ Nm}$

Sottosistema con solo \mathbf{F}_2 (sono nulle le forze agenti sul disco ed anche quelle sulle aste 2 e 3)

$M^{(2)} = 15 \text{ Nm}$



Pisa, 9 febbraio 2006

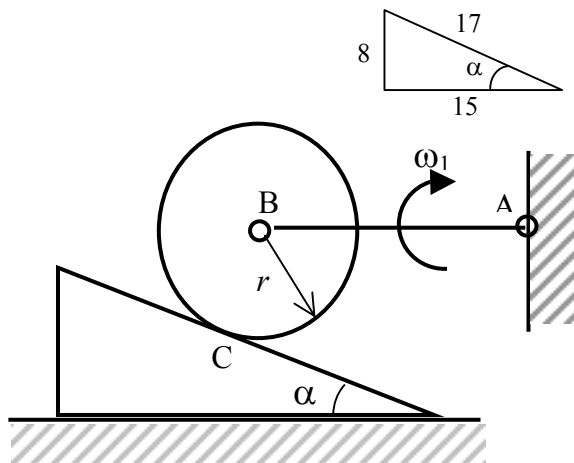
ESAME DI MECCANICA (A.A. 2003-04)

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da un'asta incernierata al telaio in A, un disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato, a sua volta scorrevole sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta AB:

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità del punto C (grafica e analitica);
2. si determini la velocità relativa di C rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC e la velocità relativa di A rispetto al piano inclinato;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di C e si risolva il problema delle accelerazioni (soluzione grafica/analitica).

DATI: $AB=80$ mm, $r=34$ mm, $\omega_1=3$ rad/s (oraria), $\dot{\omega}_1=200$ rad/s² (oraria).

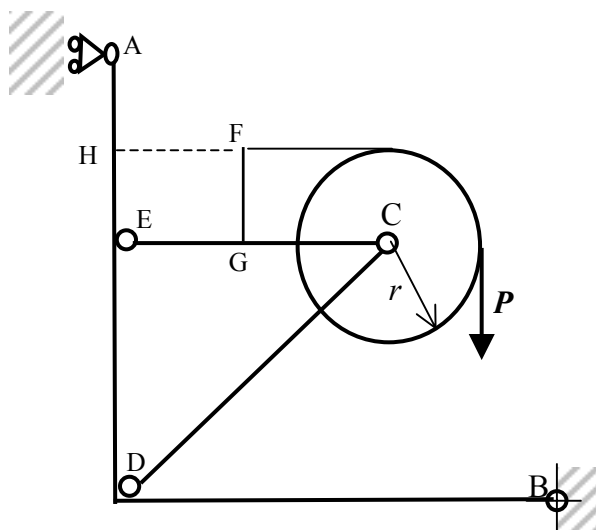


Esercizio statica

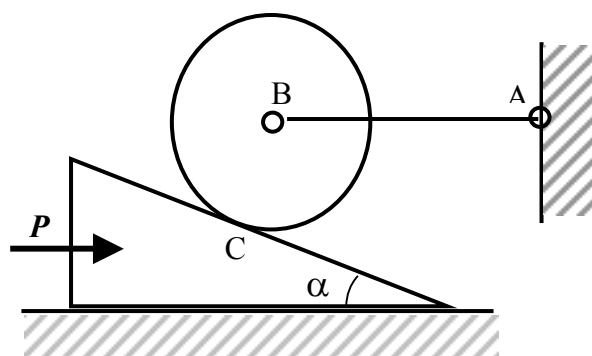
Si consideri lo schema di figura, composto da 3 aste (ADB, DC, ECF) e da una puleggia su cui si avvolge una fune che regge un carico P noto.

1. Si determinino le reazioni nei vincoli A e B e i diagrammi di corpo degli elementi della struttura nel caso in cui la fune sia fissata in F.
2. Cosa cambia se la fune viene bloccata in H?

DATI: $AB=DB=1$ m, $EC=ED=0.6$ m, $EG=GC$, $r=0.2$ m, $P=200$ N



Esercizio dinamica



Si riprenda l'esercizio di cinematica e si considerino tutti i corpi con inerzia non trascurabile. Assumendo una forza P agente sul piano inclinato, se ne determini il valore in modo che il sistema si muova con la legge di moto desiderata (ottenuta dalla cinematica).

DATI: $m_1=2$ kg, $I_1=0.0018$ kg m², $m_2=m_3=4$ kg, (1=asta AB, 2=disco, 3 piano inclinato; in C reazioni analoghe a coppia rotoidale).

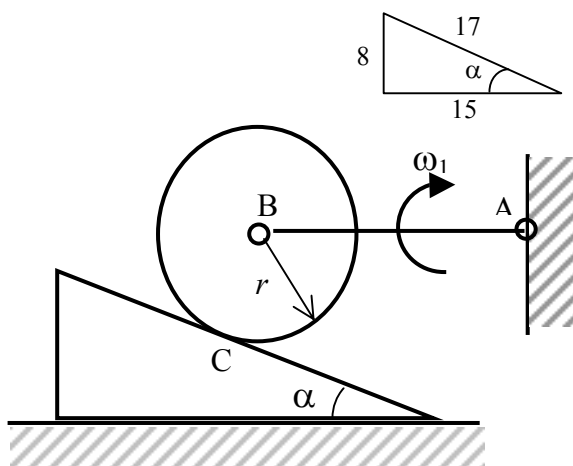
Facoltativo: studiare lo schema di dinamica per una condizione quasi-statica, con movimento lento, attrito tra telaio e piano inclinato ($f=0.2$) e nelle coppie rotoidali A e B ($f=0.2$, raggio perno 2mm). Si consideri oltre alla forza motrice P , incognita, la forza peso del disco (in B) nota 40 N.

COMPITINO DI MECCANICA – A.A. 2004-05

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da un'asta incernierata al telaio in A, un disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato, a sua volta scorrevole sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta AB:

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità del punto C (grafica e analitica);
2. si determini la velocità relativa di C rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC e la velocità relativa di A rispetto al piano inclinato;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di C e si risolva il problema delle accelerazioni (soluzione grafica/analitica).



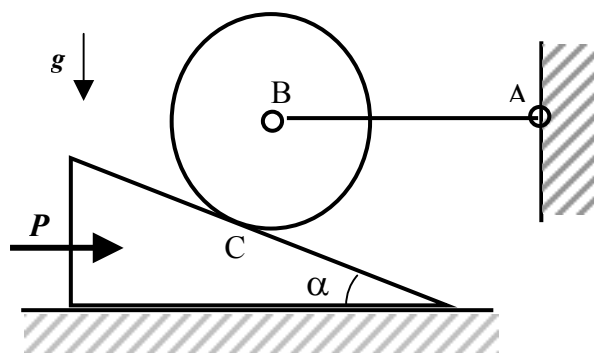
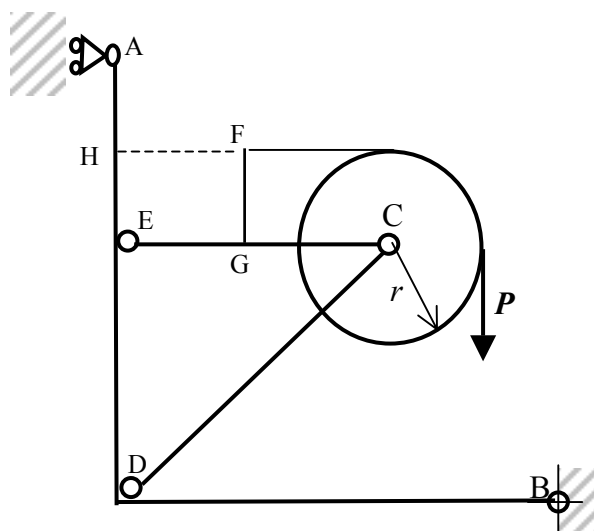
DATI: $AB=80$ mm, $r=34$ mm, $\omega_1=3$ rad/s (oraria), $\dot{\omega}_1=200$ rad/s² (oraria).

Esercizio statica

Si consideri lo schema di figura, composto da 3 aste (ADB, DC, ECF) e da una puleggia su cui si avvolge una fune che regge un carico P noto.

3. Si determinino le reazioni nei vincoli A e B e i diagrammi di corpo degli elementi della struttura nel caso in cui la fune sia fissata in F.
4. Cosa cambia se la fune viene bloccata in H?

DATI: $AB=DB=1$ m, $EC=ED=0.6$ m, $EG=GC$, $r=0.2$ m, $P=200$ N



Esercizio dinamica

Si riprenda l'esercizio di cinematica e si considerino tutti i corpi con inerzia non trascurabile. Oltre alle forze peso, note, si consideri una forza P agente sul piano inclinato e se ne determini il valore in modo che il sistema si muova con la legge di moto desiderata (ottenuta dalla cinematica).

DATI: $m_1=2$ kg, $I_1=0.0018$ kg m², $m_2=m_3=4$ kg, (1=asta

AB, 2=disco, 3 piano inclinato; in C reazioni analoghe a coppia rotoidale)

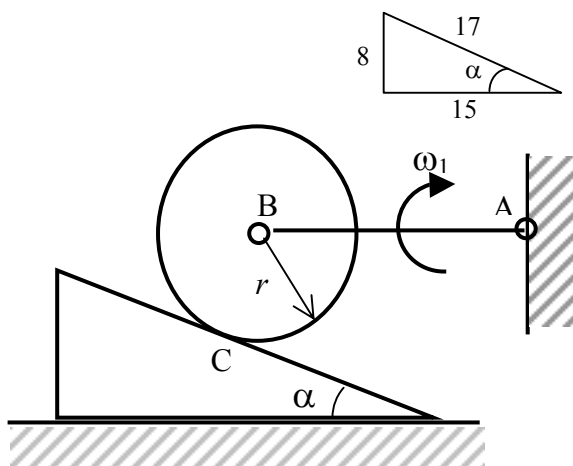
Facoltativo: studiare lo schema di dinamica per una condizione quasi-statica, con movimento lento, attrito tra telaio e piano inclinato ($f=0.2$). Si consideri oltre alla forza motrice P , incognita, la forza peso del disco (in B), di 40 N.

ESAME DI MECCANICA – A.A. 2004-05

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da un'asta incernierata al telaio in A, un disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato, a sua volta scorrevole sul telaio. Considerando nota la legge di moto dell'asta AB:

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e la velocità del punto C (grafica e analitica);
2. si determini la velocità relativa di C rispetto all'asta AB e rispetto all'asta BC e la velocità relativa di A rispetto al piano inclinato;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si calcoli l'accelerazione di C e si risolva il problema delle accelerazioni (soluzione grafica/analitica).



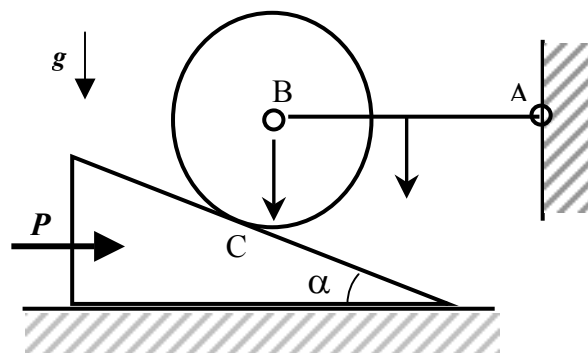
DATI: $AB=80$ mm, $r=34$ mm, $\omega_1=3$ rad/s (oraria), $\dot{\omega}_1=200$ rad/s² (oraria).

Esercizio statica

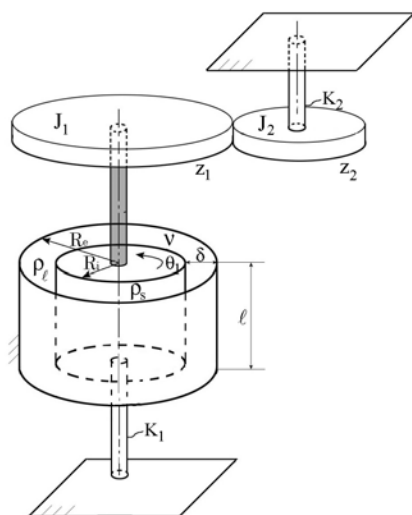
Si riprenda l'esercizio di cinematica e si considerino note la forza peso del disco e dell'asta AB. Si determini il valore della forza P agente sul piano inclinato in ipotesi di vincoli privi di attrito (tranne quello in C, assimilabile ad una coppia rotoidale), per l'equilibrio del sistema.

Si imposti la soluzione per il calcolo di P in caso di attrito f tra telaio e piano inclinato e nella coppia rotoidale A. Si determini il rendimento del sistema.

DATI: $P_{AB}=20$ N, $P_{disco}=40$ N, $f=0.2$, raggio perno in A 5 mm



Esercizio



Un corpo rigido cilindrico di raggio R_i , altezza ℓ e densità ρ_s è collegato al telaio con una molla torsionale di costante K_1 , ad una ruota dentata 1 tramite una barra rigida d'inerzia trascurabile, ed è immerso in un contenitore cilindrico di raggio R_e riempito di fluido con viscosità cinematica ν e densità ρ_f . La ruota dentata 1, con momento d'inerzia J_1 rispetto al suo asse di rotazione, ingrana con una ruota dentata 2 (momento d'inerzia J_2 rispetto al suo asse di rotazione) collegata al telaio con una molla torsionale di costante K_2 . Si supponga che l'unico moto possibile sia quello di rotazione attorno agli assi e che le due superfici cilindriche col fluido interposto siano coassiali.

1. Sapendo che l'angolo di pressione è 20° , si indichi quale soluzione è plausibile per il numero di denti delle due ruote,



cilindriche a denti dritti, scegliendo fra $z_1 = 48$ e $z_2 = 24$ oppure $z_1 = 24$ e $z_2 = 12$, descrivendo la problematica della condizione di non interferenza.

2. Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della costante di smorzamento viscoso riportando in dettaglio le considerazioni teoriche che permettono di ricavarla nel caso in esame.
3. Si scriva l'equazione di D'Alembert del sistema.
4. Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della pulsazione propria del sistema.
5. Si individui il tipo di oscillazione e si scriva la relativa espressione della legge del moto in base ai valori numerici dati.
6. Si ricavi l'espressione di cui sopra nella sua forma finale sapendo che all'istante iniziale il sistema viene lasciato libero di ruotare partendo da una posizione in cui la ruota 1 è ruotata di un angolo θ_{10} rispetto alla posizione di riposo del sistema e si faccia il grafico della funzione trovata.

$R_i = 200 \text{ mm}$, $R_e = 204 \text{ mm}$, $\ell = 1/\pi \text{ m}$, $\rho_s = 500 \text{ kg/m}^3$, $K_1 = 0.06 \text{ Nm}$, $K_2 = 0.01 \text{ Nm}$, $\rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3$,
 $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $J_1 = 0.05 \text{ kgm}^2$, $J_2 = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$, $\theta_{10} = 1 \text{ rad}$



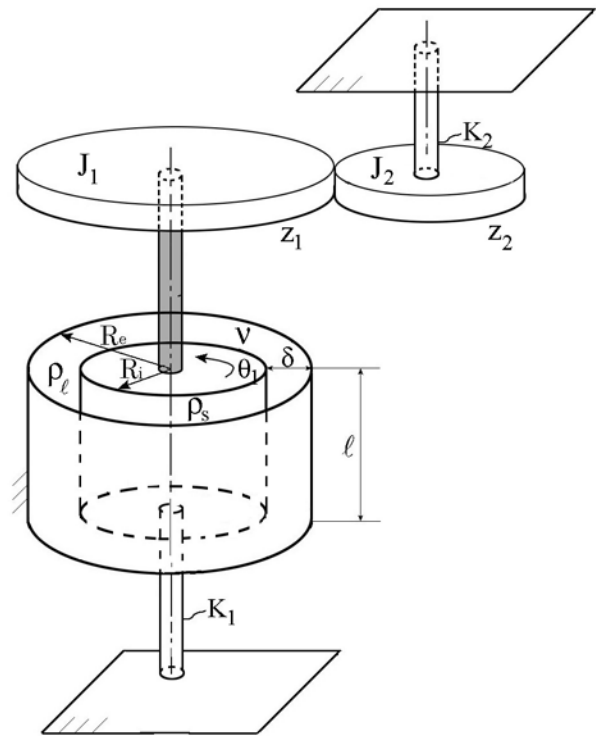
Pisa, 9 febbraio 2006

ESAME DI MECCANICA – SECONDA PARTE

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Un corpo rigido cilindrico di raggio R_i , altezza ℓ e densità ρ_s è collegato al telaio con una molla torsionale di costante K_1 , ad una ruota dentata 1 tramite una barra rigida d'inerzia trascurabile, ed è immerso in un contenitore cilindrico di raggio R_e riempito di fluido con viscosità cinematica ν e densità ρ_ℓ . La ruota dentata 1, con momento d'inerzia J_1 rispetto al suo asse di rotazione, ingrana con una ruota dentata 2 (momento d'inerzia J_2 rispetto al suo asse di rotazione) collegata al telaio con una molla torsionale di costante K_2 . Si supponga che l'unico moto possibile sia quello di rotazione attorno agli assi e che le due superfici cilindriche col fluido interposto siano coassiali.



7. Sapendo che l'angolo di pressione è 20° , si indichi quale soluzione è plausibile per il numero di denti delle due ruote, cilindriche a denti dritti, scegliendo fra $z_1 = 48$ e $z_2 = 24$ oppure $z_1 = 24$ e $z_2 = 12$, descrivendo la problematica della condizione di non interferenza.
8. Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della costante di smorzamento viscoso riportando in dettaglio le considerazioni teoriche che permettono di ricavarla nel caso in esame.
9. Si scriva l'equazione di D'Alembert del sistema.
10. Si ricavi l'espressione ed il valore numerico della pulsazione propria del sistema.
11. Si individui il tipo di oscillazione e si scriva la relativa espressione della legge del moto in base ai valori numerici dati.
12. Si ricavi l'espressione di cui sopra nella sua forma finale sapendo che all'istante iniziale il sistema viene lasciato libero di ruotare partendo da una posizione in cui la ruota 1 è ruotata di un angolo θ_{10} rispetto alla posizione di riposo del sistema e si faccia il grafico della funzione trovata.

$R_i = 200 \text{ mm}$, $R_e = 204 \text{ mm}$, $\ell = 1/\pi \text{ m}$, $\rho_s = 500 \text{ kg/m}^3$, $K_1 = 0.06 \text{ Nm}$, $K_2 = 0.01 \text{ Nm}$, $\rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $J_1 = 0.05 \text{ kgm}^2$, $J_2 = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$, $\theta_{10} = 1 \text{ rad}$

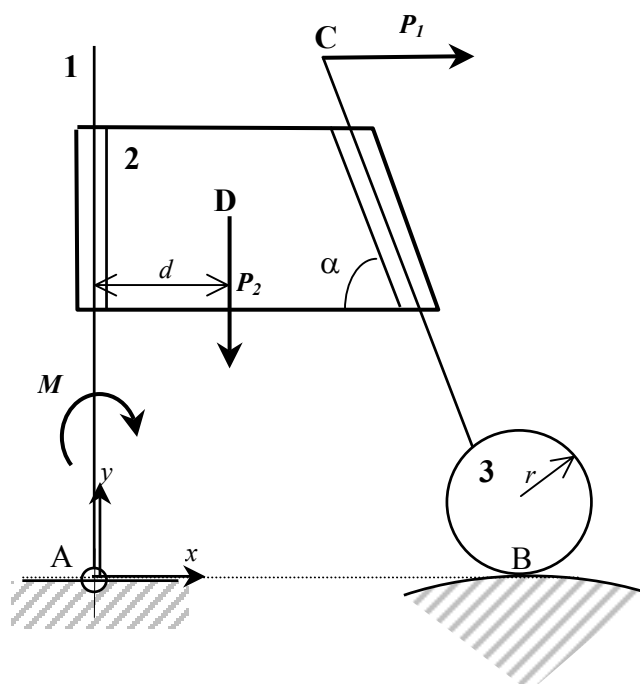
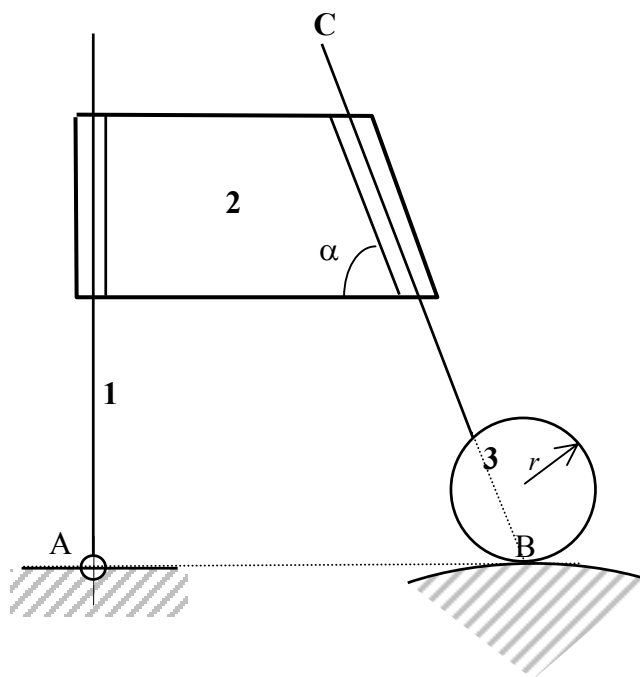
COMPITINO DI MECCANICA – A.A. 2005-06

Esercizio cinematica

Si consideri lo schema di figura, composto da tre corpi, un'asta incernierata al telaio in A, un corpo con due coppie prismatiche e un'asta saldata ad un disco che rotola senza strisciare sul telaio in B. Noto il moto imposto all'asta 1

1. si determinino le velocità angolari di tutti i corpi e le velocità relative tra 1 e 2 e tra 2 e 3 (grafico/analitico);
2. si determinino le velocità relative di C rispetto al corpo 2 e all'asta 1;
3. si individuino i centri delle velocità dei corpi;
4. si determini la accelerazione di B e si risolva anche il problema delle accelerazioni (grafico/analitico).

DATI: $AB=0.6$ m $BC=0.4$ m, $r=10$ cm,
 $\alpha=60^\circ$, $\omega_1=7$ rad/s (antioraria), $\dot{\omega}_1=10$ rad/s²
oraria, raggio telaio 40 cm.



Esercizio statica

Si consideri lo schema precedente e se ne studi l'equilibrio nella configurazione di figura. In particolare di applichi il principio di sovrapposizione degli effetti per determinare il momento M da applicare all'asta 1 quando agiscono sul sistema le forze P_1 e P_2 note.

Si rappresentino per ciascun caso i diagrammi di corpo libero degli elementi.

Osservazioni: si assuma elevato l'attrito in B da poter assimilare il vincolo ad una coppia rotoidale.

Facoltative:

- sono presenti sottosistemi isostatici?
- quanto deve valere il coefficiente di attrito in F affinché non si abbia incipiente movimento?

DATI: $d=0.2$ m, $P_1=100\sqrt{3}$ N, $P_2=160$ N.



Esercizio statica- dinamica

Si faccia riferimento alla figura in cui un disco ed un corpo sono disposti su piani inclinati contrapposti e sono fra loro collegati con un filo inestensibile. Si imposti in forma letterale la soluzione del problema statico, in cui si considerano note le masse dei due corpi, il raggio del disco ed i coefficienti di attrito, statico e dinamico, con i piani.

- 1) si determini la relazione tra gli angoli ed il coeff. di attrito in condizioni di incipiente movimento;
- 2) si determini il valore del coefficiente di attrito statico (minimo) per l'equilibrio f^* , nel caso numerico;
- 3) nel caso in cui in realtà il coefficiente di attrito statico f (=coeff.attrito dinamico) sia $0.8 f^*$, determinare l'accelerazione dei corpi

Si determini inoltre l'energia cinetica del sistema facendo riferimento ai dati della cinematica.

Dati: $m_1=m_2=20$ kg, $\alpha=30^\circ$ $\beta=15^\circ$ $r=0.1$ m

