UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

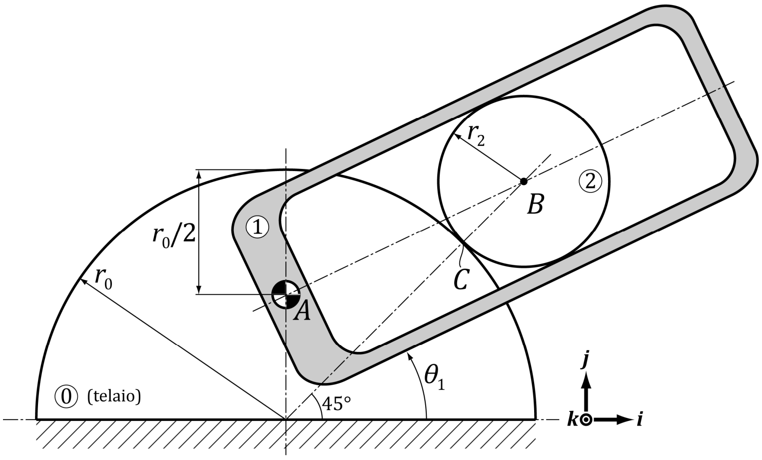
30 Gennaio 2016

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione A

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

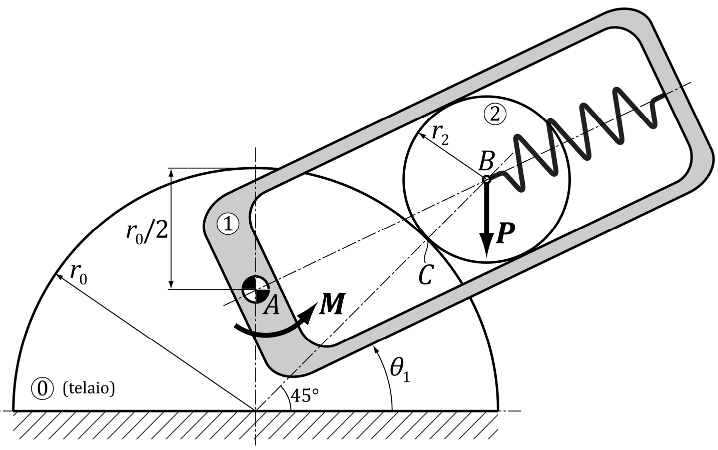
Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Si assuma che tra i corpi 1 e 2 ci siano condizioni di rotolamento *con* strisciamento.



1. **Discutere quale vincolo di rotolamento deve esistere tra i corpi 0 (telaio) e 2 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà**.
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite**.
3. In questa configurazione la coordinata lagrangiana θ_1 vale 25.33°. Assumendo $\dot{\theta}_1 = \pi/4$ rad/s, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, determinare analiticamente i valori numerici delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Il tipo di vincolo determinato al punto 1 del precedente esercizio è affidato alla presenza di attrito tra i corpi 0 e 2 (in corrispondenza del punto di contatto C) e all'azione di una molla (sempre compressa), come indicato in figura. Tale molla è progettata in modo da esercitare, in questa configurazione, una forza elastica $\boldsymbol{F_m}$ nota. Sul corpo 2 agisce la forza $\boldsymbol{P}$, assegnata (vettore in figura). Gli attriti tra i corpi 1 e 2 sono trascurabili.
Una coppia $\boldsymbol{M}$, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

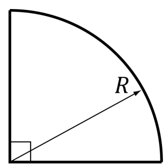


1. **Dimostrare quale deve essere il valore minimo del coefficiente d'attrito statico in C affinché possano effettivamente instaurarsi condizioni di attrito statico**.
2. Determinare la coppia $\boldsymbol{M}$ e tutte le forze/coppie reattive.

Assumendo $F_m = 50$ N, $P = 90$ N, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi 1 e 2 *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3

Dopo avere introdotto un idoneo sistema di riferimento, si determini in esso la posizione del baricentro del settore circolare omogeneo rappresentato nella figura a lato.

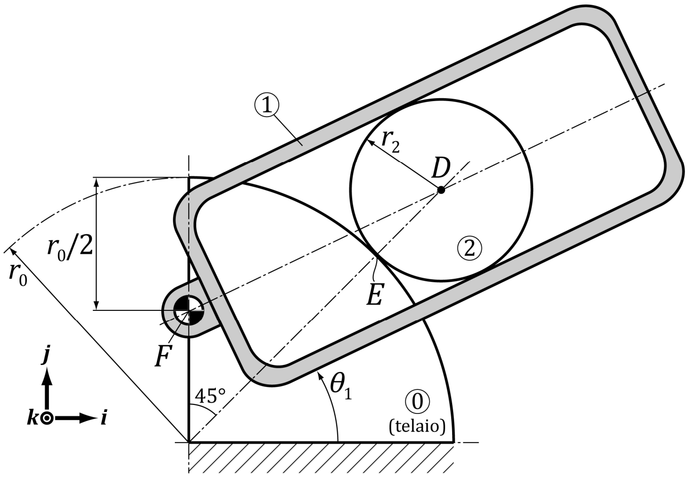


UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

30 Gennaio 2016

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

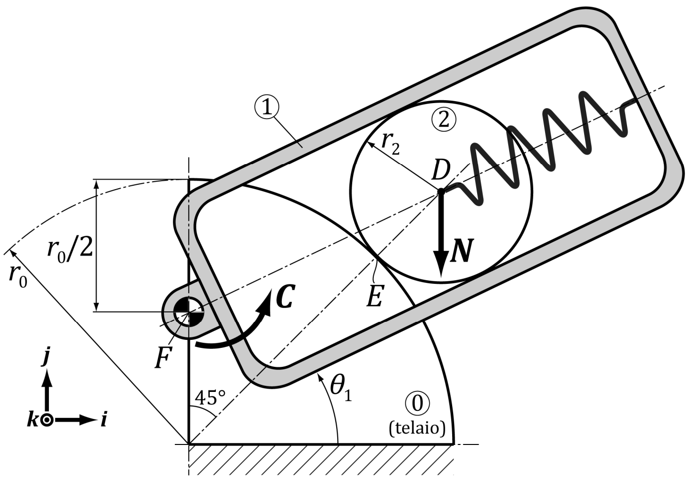
Esercizio 1



Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Si assuma che tra i corpi 1 e 2 ci siano condizioni di rotolamento *con* strisciamento.

1. **Discutere quale vincolo di rotolamento deve esistere tra i corpi 0 (telaio) e 2 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà**.
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite**.
3. In questa configurazione la coordinata lagrangiana θ_1 vale 25.33°. Assumendo $\dot{\theta}_1 = \pi/4$ rad/s, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, determinare analiticamente i valori numerici delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2



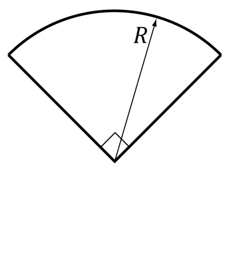
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Il tipo di vincolo determinato al punto 1 del precedente esercizio è affidato alla presenza di attrito tra i corpi 0 e 2 (in corrispondenza del punto di contatto E) e all'azione di una molla (sempre compressa), come indicato in figura. Tale molla è progettata in modo da esercitare, in questa configurazione, una forza elastica $\boldsymbol{F_m}$ nota. Sul corpo 2 agisce la forza $\boldsymbol{N}$, assegnata (vettore in figura). Gli attriti tra i corpi 1 e 2 sono trascurabili.
Una coppia $\boldsymbol{C}$, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. **Dimostrare quale deve essere il valore minimo del coefficiente d'attrito statico in E affinché possano effettivamente instaurarsi condizioni di attrito statico**.
2. Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ e tutte le forze/coppie reattive.

Assumendo $F_m = 50$ N, $N = 90$ N, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi 1 e 2 *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3

Dopo avere introdotto un idoneo sistema di riferimento, si determini in esso la posizione del baricentro del settore circolare omogeneo rappresentato nella figura a lato.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

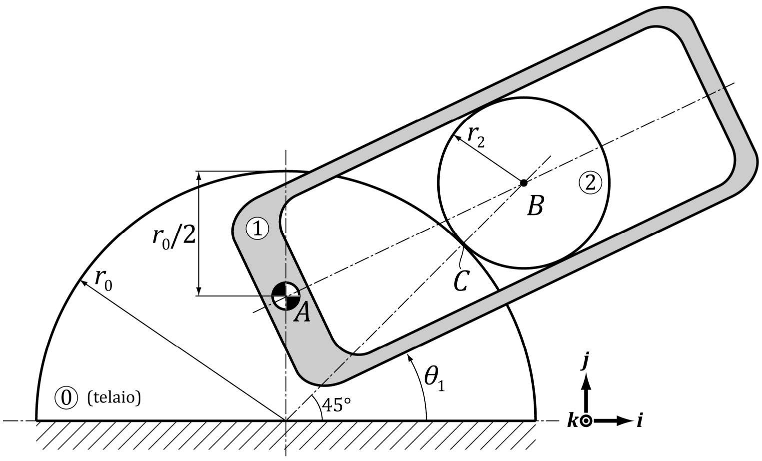
30 Gennaio 2016

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Si assuma che tra i corpi 1 e 2 ci siano condizioni di rotolamento *con* strisciamento.

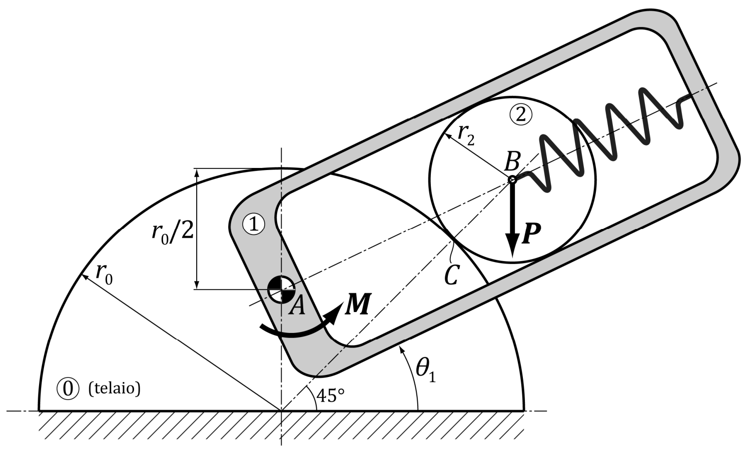


1. Discutere quale vincolo di rotolamento deve esistere tra i corpi 0 (telaio) e 2 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. In questa configurazione la coordinata lagrangiana θ_1 vale 25.33°. Assumendo $\dot{\theta}_1 = \pi/4$ rad/s, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, determinare analiticamente i valori numerici delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Il tipo di vincolo determinato al punto 1 del precedente esercizio è affidato alla presenza di attrito tra i corpi 0 e 2 (in corrispondenza del punto di contatto C) e all'azione di una molla (sempre compressa), come indicato in figura. Tale molla è progettata in modo da esercitare, in questa configurazione, una forza elastica $\boldsymbol{F_m}$ nota. Sul corpo 2 agisce la forza $\boldsymbol{P}$, assegnata (vettore in figura). Gli attriti tra i corpi 1 e 2 sono trascurabili.

Una coppia $\boldsymbol{M}$, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. Dimostrare quale deve essere il valore minimo del coefficiente d'attrito statico in C affinché possano effettivamente instaurarsi condizioni di attrito statico.
2. Determinare la coppia $\boldsymbol{M}$ e tutte le forze/coppie reattive.

Assumendo $F_m = 50$ N, $P = 90$ N, $r_0 = 70$ mm e $r_2 = 24$ mm, riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi 1 e 2 *risolti in funzione dei dati del problema*.

• SOLUZIONE COMPITO 1^a PARTE, vers. A •

Le soluzioni delle due versioni A e B sono formalmente identiche.

— ESERCIZIO 1 —

1) Analisi geometrica dei vincoli :

- 2 corpi rigidi (mobili) : 6 g.l.
- 1 coppia rotoidale : − 2 g.l.
- 1 perno cilindr. in asola : − 1 g.l.

} affinché il meccanismo abbia 1 solo g.l., il rotolamento del corpo 2 sul corpo ∅ deve avvenire SENZA STRISCIAMENTO (− 2 g.l.)

D'ora in poi assumeremo quindi RSS in corrispondenza del punto di contatto C.

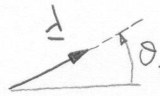
2) Posso scrivere $\underline{v}_{B\in 2}$ seguendo due percorsi diversi.

- Formula fond.^{le} della cinematica risp. al punto $C \in ②$ $\left(\underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_{C\in 0} = \underline{0} \right)$:

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{C\in 2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}$$

- Composizione moti relativi :

$$\Sigma ①: \ \underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}^{(r)}_{B\in 2} + \underline{v}^{(tr)}_{B\in 2} = \underbrace{\dot{s}}_{\text{coord. relativa}} \underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} \ , \quad \text{con :}$$

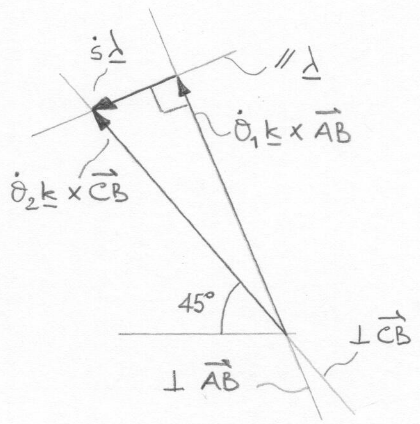


, $\|\underline{\lambda}\| = 1$

Si ottiene l'eq.^{ne} di chiusura uguagliando le due espressioni di $\underline{v}_{B\in 2}$ appena scritte :

$$\dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{s} \underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} \quad (\text{incognite} : \dot{\theta}_2, \dot{s})$$

Triangolo delle velocità :



$(\dot{\theta}_1 > 0)$

$\dot{s} < 0$ (B si avvicina ad A)

$\dot{\theta}_2 > 0$ (antioraria)

3) Dall'eq.^{ne} di chiusura :

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ r_2 \frac{\sqrt{2}}{2} & r_2 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \dot{s} \left(\cos\theta_1 \underline{i} + \sin\theta_1 \underline{j} \right) + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix}$$

Ci sono (almeno) due possibilità per determinare le componenti di $\overrightarrow{AB}$:

1) $(AB_x, AB_y) = (\overline{AB} \cos\theta_1, \overline{AB} \sin\theta_1)$, dove la lunghezza $\overline{AB}$ può essere ottenuta (ad esempio) col teorema dei seni :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 45°} = \frac{r_0 + r_2}{\sin(\theta_1 + 90°)} \longrightarrow \overline{AB} = \frac{r_0 + r_2}{\cos\theta_1} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Guardando il disegno sul testo, per ispezione diretta del vettore $\overrightarrow{AB}$ si vede che:

$$AB_x = (r_0 + r_2)\cos 45° = (r_0 + r_2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB_y = AB_x \tan\theta_1 = (r_0 + r_2)\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\theta_1$$

Numericamente:

$$AB_x = 66.47 \text{ mm} \qquad (\text{e } \overline{AB} = 73.54 \text{ mm})$$

$$AB_y = 31.46 \text{ mm}$$

Sostituendo i valori numerici assegnati nell'eq.^{ne} di chiusura si ottengono due eq.^{ni} scalari nelle incognite $\dot{\theta}_2$ e $\dot{s}$. I loro valori finali sono:

- $\dot{\theta}_2 = 2.556$ rad/s
- $\dot{s} = -20.65$ mm/s

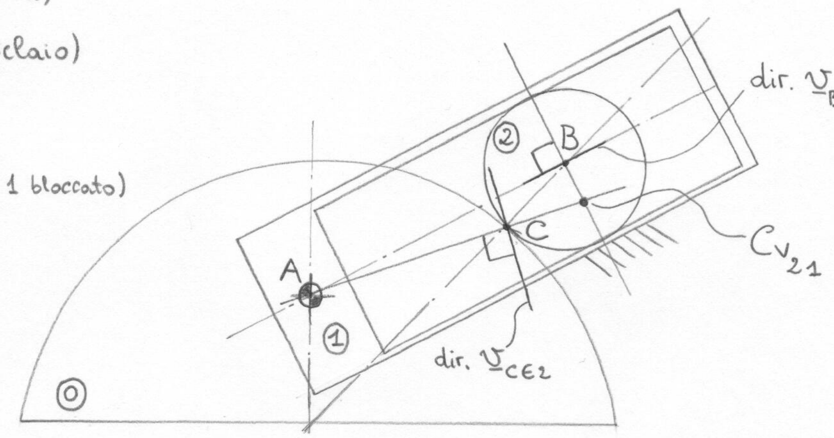
(segni concordi con quelli ottenuti dal triangolo delle velocità)

4) $C_{v_1} \equiv A$ (cerniera fissa)

$C_{v_2} \equiv C$ (RSS su telaio)

$C_{v_{12}} = C_{v_{21}}$:

(corpo 1 bloccato)



5) Analogamente a quanto fatto per le velocità, si può chiudere su $\underline{a}_{BE2}$:

- Teorema di Rivals risp. al punto $CE2$:

$$\underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{CE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB} \quad , \quad \text{con } \underline{a}_{CE2} = \underline{a}_{C_{v_2}} = -D\dot{\theta}_2^2 \underline{n}$$

In particolare:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} \xrightarrow{[\dots]} D = -\frac{r_0 r_2}{r_0 + r_2} \quad ; \quad \underline{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \nearrow 45°$$

e quindi:

$$\underline{a}_{CE2} = \frac{r_0 r_2}{r_0 + r_2}\dot{\theta}_2^2 \underline{n}$$

- Composizione moti relativi:

$$\Sigma \text{①} : \underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{BE2}^{(r)} + \underline{a}_{BE2}^{(tr)} + \underline{a}_{BE2}^{(Co)} = \ddot{s}\underline{\lambda} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{\lambda}$$

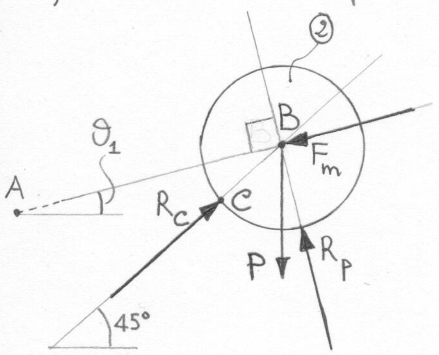
Uguagliando le due espressioni:

$$\frac{r_0 r_2}{r_0 + r_2}\dot{\theta}_2^2 \underline{n} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB} = \ddot{s}\underline{\lambda} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{\lambda}$$

(eq.^{ne} di chiusura nelle incognite $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{s}$)

— ESERCIZIO 2 —

1) Si consideri l'equilibrio del corpo 2:



dal momento che le rette di applicazione di $\underline{P}$, $\underline{F}_m$ e $\underline{R}_p$ (forza che il perno 2 riceve dall'asola 1) si intersecano in B, per il rispetto della seconda cardinale anche la reazione di contatto $\underline{R}_c$ deve avere una retta di applicazione passante per B

↓

φ_s, l'angolo tra $\underline{R}_C$ e la direz. normale al piano di contatto, è nullo: tale φ_s è l'angolo di semiapertura del cono d'attrito statico richiesto per avere condizioni di equilibrio, ed è $f_s = \tan\varphi_s$ ⟶ il minimo valore richiesto del coefficiente d'attrito è $\underline{f_s = 0}$.

2) Dal DCL del corpo 2 al punto precedente, la prima cardinale richiede:

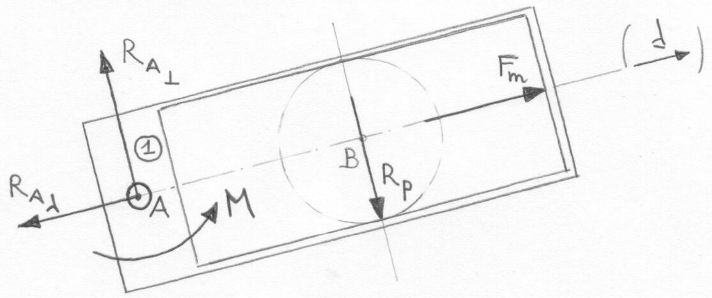
$$\underline{i})\quad R_C \frac{\sqrt{2}}{2} - R_p \sin\vartheta_1 - F_m \cos\vartheta_1 = 0$$

$$\underline{J})\quad R_C \frac{\sqrt{2}}{2} + R_p \cos\vartheta_1 - F_m \sin\vartheta_1 - P = 0$$

Sostituendo i valori numerici assegnati e risolvendo si ottiene:

- $R_C = 93.99$ N (>0, come richiesto dal vincolo d'attrito (unilaterale))
- $R_p = 49.71$ N

Si passa al corpo 1:

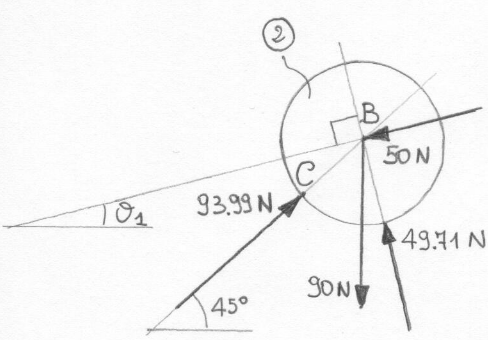


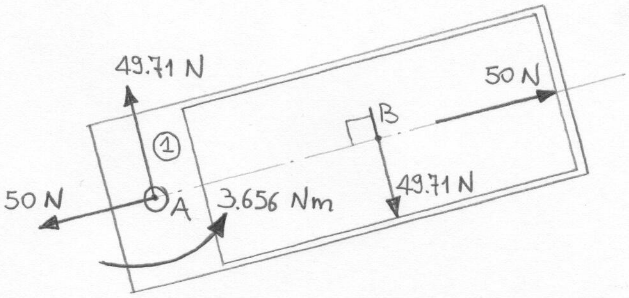
$$\underline{\lambda})\quad R_{A_\lambda} = F_m = 50 \text{ N}$$

$$\perp\underline{\lambda})\quad R_{A_\perp} = R_p = 49.71 \text{ N}$$

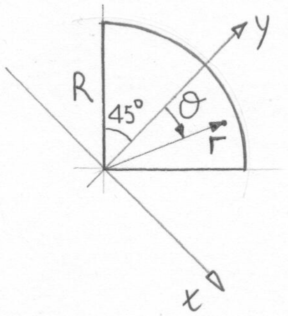
$$\curvearrowleft A)\quad M = R_p \overline{AB} = 3655.7 \text{ Nmm} \cong 3.656 \text{ Nm}$$

DCL risolti:





— ESERCIZIO 3 —



Poiché, nel sist. di riferimento scelto, l'asse y è di simmetria, la coordinata x del baricentro G sarà

- $x_G = 0$

Invece per determinare y_G si deve risolvere:

$$y_G = \frac{1}{C}\int_C y \, dC \quad , \quad \text{dove } C = \pi R^2/4$$

Passando in coord. polari (v. figura):

$$\begin{cases} y = r\cos\vartheta \\ dC = r\,dr\,d\vartheta \end{cases} ,$$

pertanto:

$$\int_C y\,dC = \int_0^R\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r\cos\vartheta\; r\,dr\,d\vartheta = \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{R^3}{3}\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{R^3}{3}\sqrt{2}$$

Infine:

- $\underline{y_G} = \frac{4}{\pi \cancel{R^2}}\cdot\frac{R^{\cancel{3}}\sqrt{2}}{3} = \underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{R}{\pi}}$