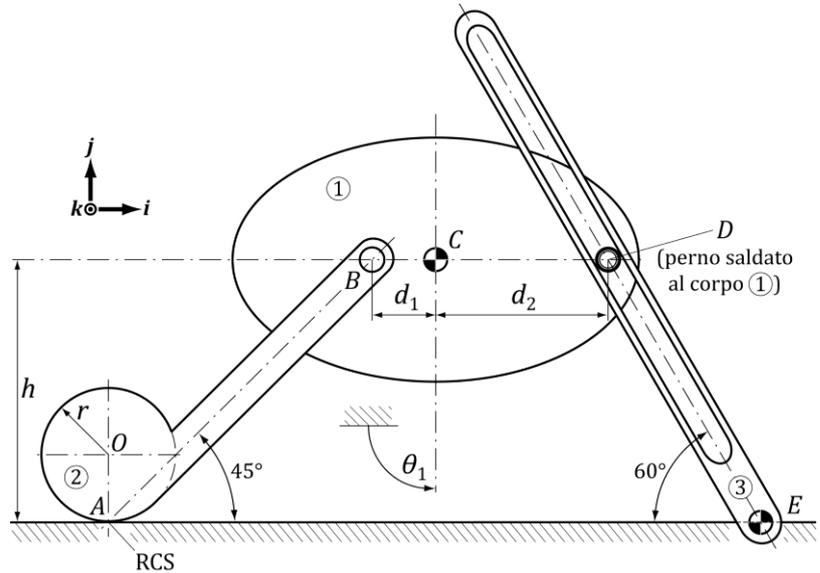


**ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – versione A**  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

**Esercizio 1**

Nel meccanismo in figura sono individuabili due sottomeccanismi, 1-2 e 1-3, ciascuno a un grado di libertà. In corrispondenza del punto  $A$  ci sono condizioni di rotolamento con strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati i parametri geometrici indicati,  $\dot{\theta}_1 > 0$  e  $\ddot{\theta}_1 = 0$ .

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere le due equazioni di chiusura per le velocità dei due sottomeccanismi.
3. Per il sottomeccanismo 1-2, risolvere l'equazione di chiusura per via *grafica* (ovvero, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  indicati).
4. Individuare tutti i centri delle velocità assoluti.
5. Ottenere le due equazioni di chiusura delle accelerazioni.

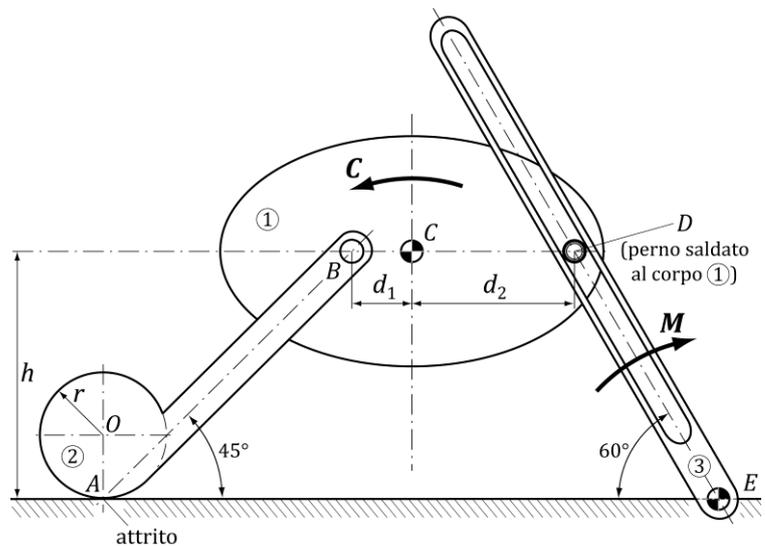


**Esercizio 2**

Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la coppia  $C$ , assegnata (corpo 1), e la coppia  $M$ , anch'essa assegnata (corpo 3). L'equilibrio statico del sistema è affidato unicamente alla presenza di attrito (statico) nel contatto puntiforme in  $A$ .

1. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia  $C$ .
2. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia  $M$ .

Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero **risolti in funzione dei dati del problema**. Per ciascuno dei due casi, determinare il valore minimo del coefficiente d'attrito statico necessario per garantire l'equilibrio.

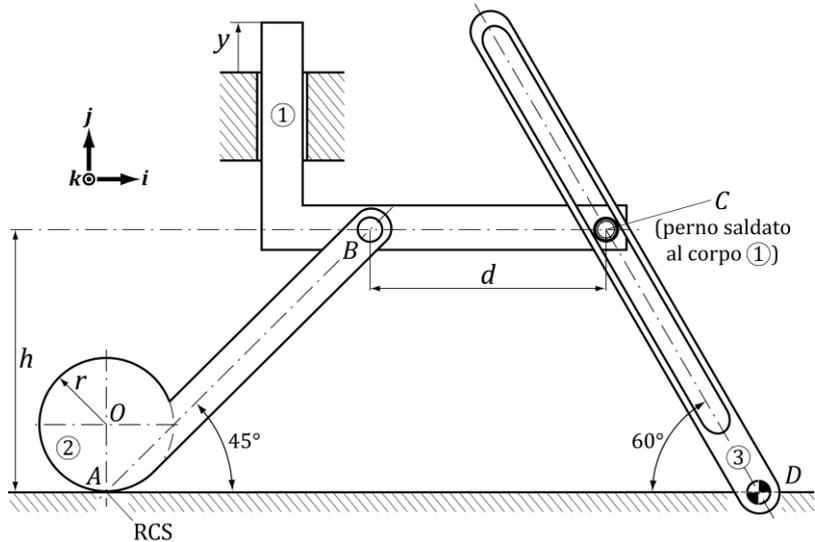


**ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – versione B**  
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

**Esercizio 1**

Nel meccanismo in figura sono individuabili due sottomeccanismi, 1-2 e 1-3, ciascuno a un grado di libertà. In corrispondenza del punto  $A$  ci sono condizioni di rotolamento con strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati i parametri geometrici indicati,  $\dot{y} > 0$  e  $\ddot{y} > 0$ .

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere le due equazioni di chiusura per le velocità dei due sottomeccanismi.
3. Per il sottomeccanismo 1-2, risolvere l'equazione di chiusura per via *grafica* (ovvero, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  indicati).
4. Individuare tutti i centri delle velocità assoluti.
5. Ottenere le due equazioni di chiusura delle accelerazioni.

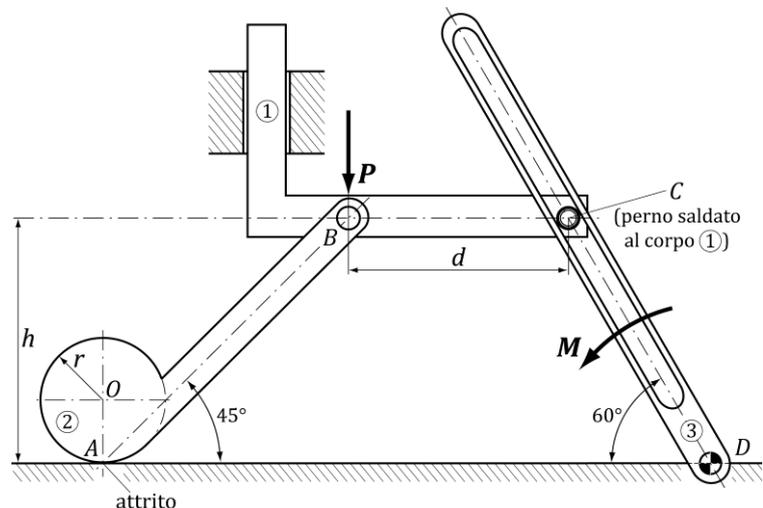


**Esercizio 2**

Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la forza  $\mathbf{P}$ , assegnata (corpo 1), e la coppia  $\mathbf{M}$ , anch'essa assegnata (corpo 3).

L'equilibrio statico del sistema è affidato unicamente alla presenza di attrito (statico) nel contatto puntiforme in  $A$ .

1. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza  $\mathbf{P}$ .
2. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia  $\mathbf{M}$ .



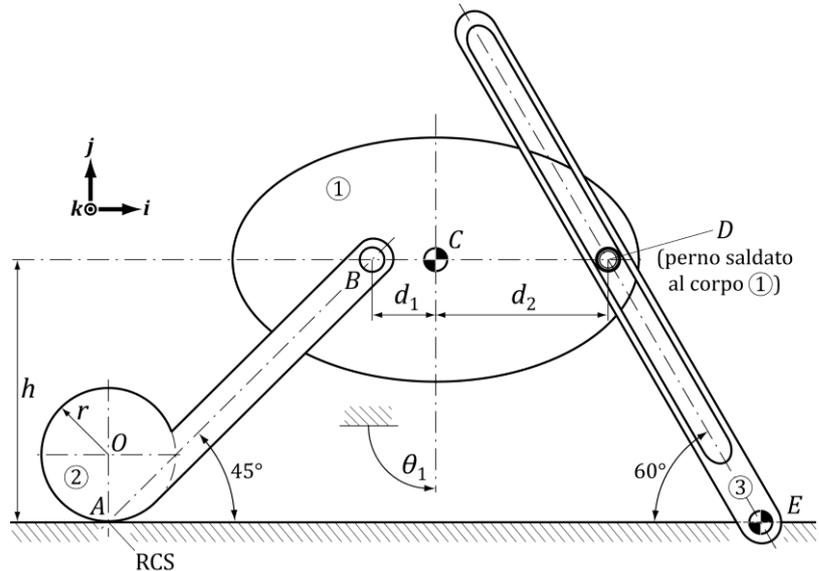
Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero **risolti in funzione dei dati del problema**. Per ciascuno dei due casi, determinare il valore minimo del coefficiente d'attrito statico necessario per garantire l'equilibrio.

**ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO**  
*Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica*

**Esercizio 1**

Nel meccanismo in figura sono individuabili due sottomeccanismi, 1-2 e 1-3, ciascuno a un grado di libertà. In corrispondenza del punto  $A$  ci sono condizioni di rotolamento con strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati i parametri geometrici indicati,  $\dot{\theta}_1 > 0$  e  $\ddot{\theta}_1 = 0$ .

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere le due equazioni di chiusura per le velocità dei due sottomeccanismi.
3. Per il sottomeccanismo 1-2, risolvere l'equazione di chiusura per via *grafica* (ovvero, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  indicati).
4. Individuare il centro delle velocità del corpo 2.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni del sottomeccanismo 1-3.

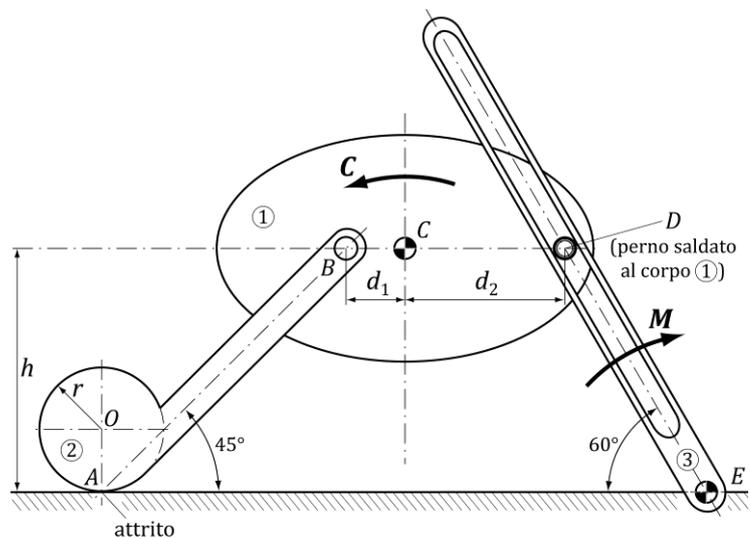


**Esercizio 2**

Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la coppia  $C$ , assegnata (corpo 1), e la coppia  $M$ , anch'essa assegnata (corpo 3). L'equilibrio statico del sistema è affidato unicamente alla presenza di attrito (statico) nel contatto puntiforme in  $A$ .

1. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia  $C$ .
2. Determinare tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia  $M$ .

Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero risolti **in funzione dei dati del problema**.

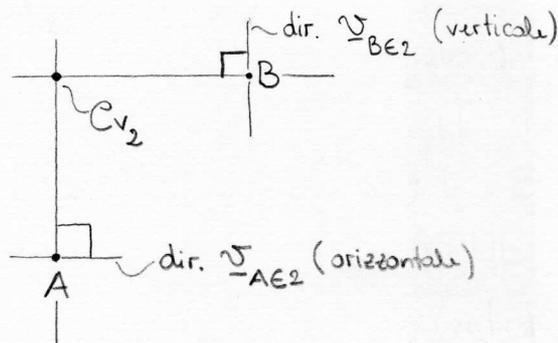




$$4) C_{V_1} \equiv C$$

$$C_{V_3} \equiv E$$

$$C_{V_2} :$$



$$5) \underline{a}_{PE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{CP} - \dot{\theta}_1^2 \vec{CP} = -\dot{\theta}_1^2 \vec{CP}$$

$$\underline{a}_{QE2} = \underline{a}_{BE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BQ} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BQ} = -\dot{\theta}_1^2 \vec{CB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BQ} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BQ}$$

$$\underline{a}_{RE3} = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{ER} - \dot{\theta}_3^2 \vec{ER}$$

Espressione di  $\underline{a}_{DE1}$  : 
$$\underline{a}_{DE1} = -\dot{\theta}_1^2 \vec{CD}$$

ma anche :

$$\Sigma \textcircled{3} : \underline{a}_{DE1} = \underline{a}_{DE1}^{(r)} + \underline{a}_{DE1}^{(tr)} + \underline{a}_{DE1}^{(co)} = \ddot{s} \underline{\lambda} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{ED} - \dot{\theta}_3^2 \vec{ED} + 2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s} \underline{\lambda}$$

quindi :

$$\boxed{-\dot{\theta}_1^2 \vec{CD} = \ddot{s} \underline{\lambda} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{ED} - \dot{\theta}_3^2 \vec{ED} + 2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s} \underline{\lambda}} \quad (\text{incognite : } \ddot{s}, \ddot{\theta}_3)$$

Per il sottomeccanismo 1-2, si potrebbe pensare di uguagliare due espressioni diverse di  $\underline{a}_A$ , analogamente a quanto fatto per le velocità; tuttavia, mentre è facile scriverne un'espressione passando da B, ovvero (v. sopra) :

$$\underline{a}_{AE2} = -\dot{\theta}_1^2 \vec{CB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BA} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BA}$$

non è facile scriverne una seconda espressione passando dal telaio (attraverso il RCS); questo perché non conosciamo la traiettoria di A (o meglio, è difficilissimo determinarla), quindi nemmeno il raggio di curvatura  $\rho_A$  di tale traiettoria in A (che serve per l'espressione

$\underline{a}_A = \ddot{x} \underline{i} + \dot{x}^2 \underline{j}$ ). Tuttavia, conosciamo la traiettoria del punto  $O \in \textcircled{2}$ , che è rettilinea: possiamo quindi scrivere due espressioni per l'accelerazione di  $O \in \textcircled{2}$  :

$$\underline{a}_{OE2} = -\dot{\theta}_1^2 \vec{CB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BO} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BO}$$

e anche :

$$\underline{a}_{OE2} = \ddot{c} \underline{i} \quad (\rho_0 = \infty)$$

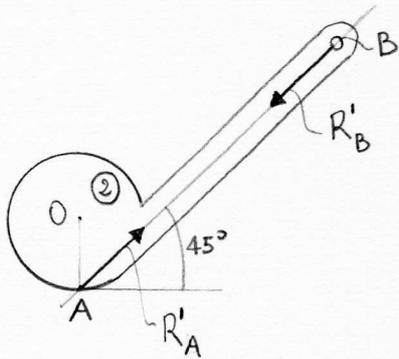
Pertanto :

$$\boxed{-\dot{\theta}_1^2 \vec{CB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BO} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BO} = \ddot{c} \underline{i}} \quad (\text{incognite : } \ddot{\theta}_2, \ddot{c})$$

- ESERCIZIO 2 -

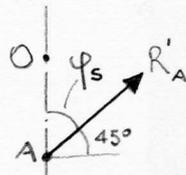
1) Agisce C

Il corpo ② è scarico:



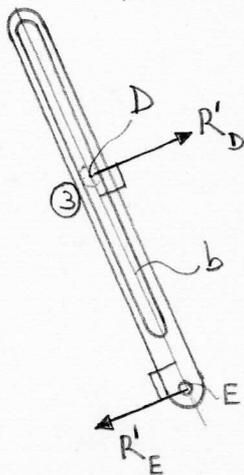
$$R'_B = R'_A$$

(d'ora in poi schematizzerò il corpo ② come un'asta di estremità A e B)



La reazione  $R'_A$  deve essere inclinata di un angolo  $\varphi_s$  (di attrito statico) pari a  $45^\circ$  rispetto alla verticale: pertanto, il coeff. d'attrito statico deve essere:  $f_s \geq 1$

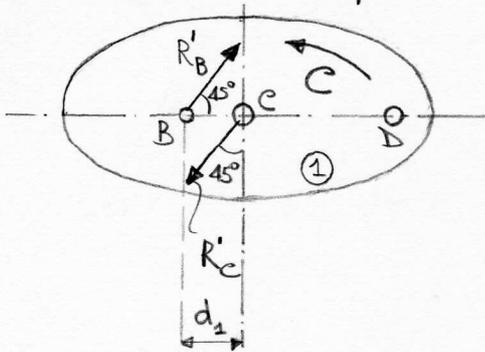
Consideriamo il corpo ③, in particolare l'equilibrio alla rotazione:



$$\sum M_D = 0 \rightarrow R'_D = 0$$

$$R'_D = R'_E = 0$$

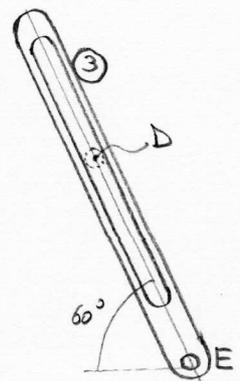
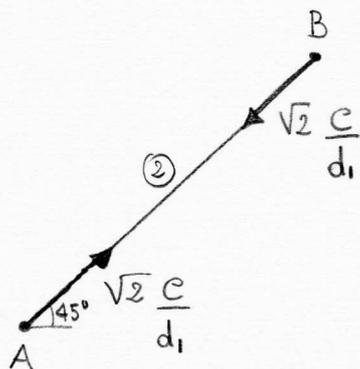
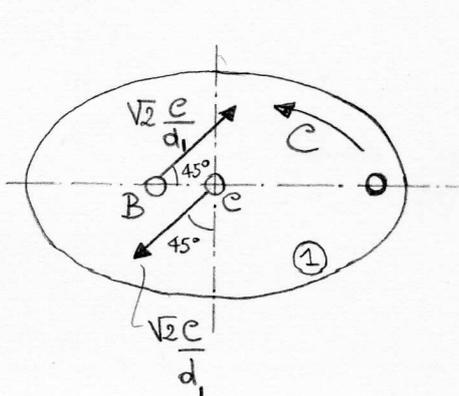
Resta da analizzare il corpo ①:



$$\sum M_C = 0 \rightarrow R'_B \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 = c \rightarrow R'_B = \sqrt{2} \frac{c}{d_1}$$

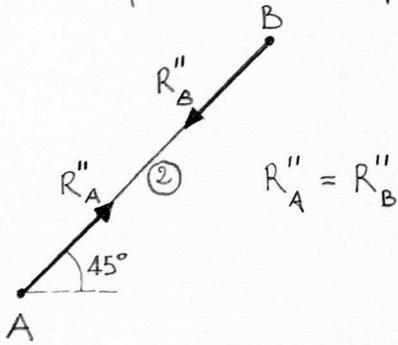
$$R'_B = R'_C = \sqrt{2} \frac{c}{d_1} = R'_A$$

DCL risolti:



2) Agisce  $M$

Anche in questo caso il corpo ② è scivolo:

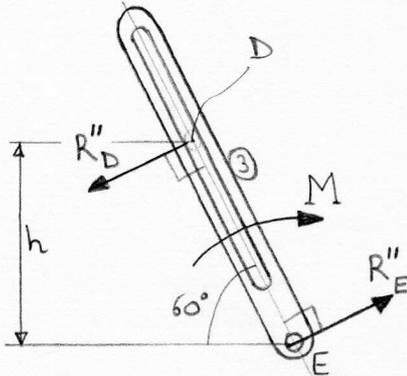


Anche in questo caso si deve avere un coeff. di attrito statico:

$$f_s \geq 1$$

(per gli stessi motivi del punto precedente)

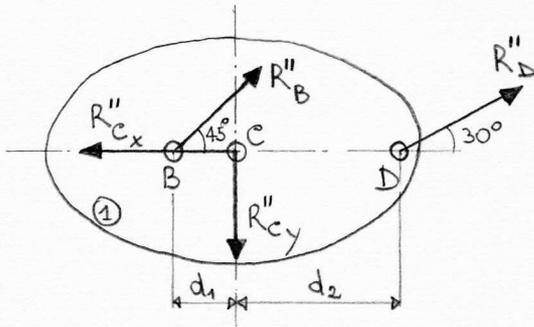
Passiamo al corpo ③:



$$\curvearrowright E) M = R''_D \frac{h}{\sin 60^\circ} = R''_D \frac{2}{\sqrt{3}} h \rightarrow R''_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{h}$$

$$R''_D = R''_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{h}$$

Infine il corpo ①:



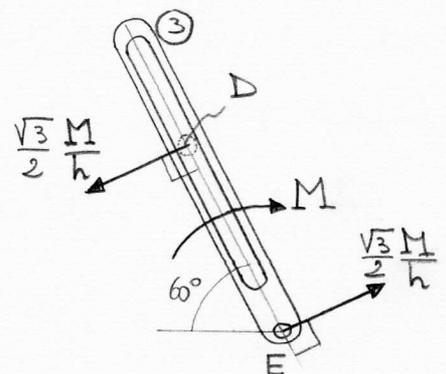
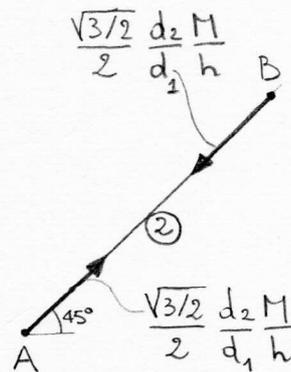
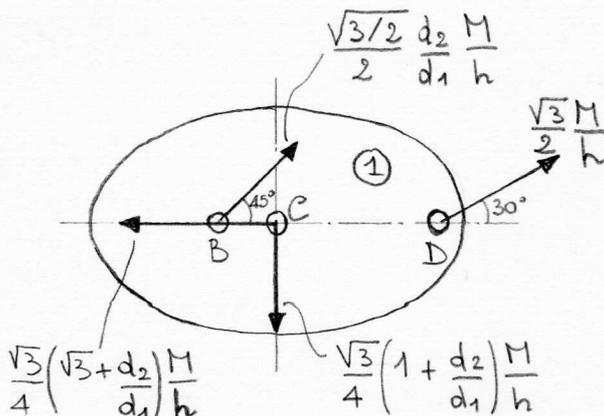
$$\curvearrowright C) R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 = R''_D \frac{1}{2} d_2$$

$$R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{h} d_2 \rightarrow R''_B = \frac{\sqrt{3/2}}{2} \frac{d_2}{d_1} \frac{M}{h} = R''_A$$

$$\begin{aligned} \text{I) } R''_{Cx} &= R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} + R''_D \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{d_2}{d_1} \frac{M}{h} + \frac{3}{4} \frac{M}{h} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\sqrt{3} + d_2}{d_1} \right) \frac{M}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II) } R''_{Cy} &= R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} + R''_D \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{d_2}{d_1} \frac{M}{h} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{h} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{d_2}{d_1} \right) \frac{M}{h} \end{aligned}$$

DEL risolti:



# - VERSIONE B -

## - ESERCIZIO 1 -

1)  $\underline{v}_{PE1} = \dot{y} \underline{j}$  (traslazione)

$$\underline{v}_{QE2} = \underline{v}_{BE2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \underline{BQ} = \dot{y} \underline{j} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \underline{BQ}$$

$\parallel$   
 $\underline{v}_{BE1}$

$$\underline{v}_{RE3} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underline{DR}$$

2)  $\underline{v}_{CE1} = \dot{y} \underline{j}$ , ma i anche:

$$\Sigma \textcircled{3}: \underline{v}_{CE1} = \underline{v}_{CE1}^{(r)} + \underline{v}_{CE1}^{(tr)} = \dot{s} \underline{\lambda} + \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underline{DC}, \text{ dove: } \begin{array}{c} \nearrow \\ 60^\circ \\ \underline{\lambda} \end{array}, \underline{\lambda} = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$$

Quindi:  $\dot{y} \underline{j} = \dot{s} \underline{\lambda} + \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underline{DC}$  (incognite:  $\dot{s}, \dot{\theta}_3$ )

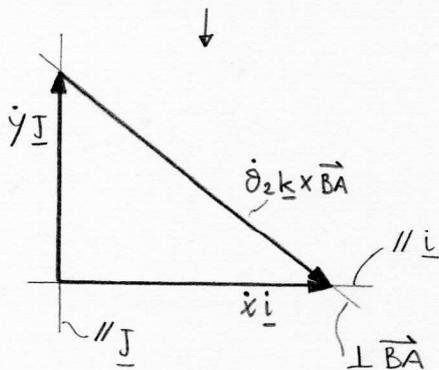
Per il sottomeccanismo 1-2:

$$\underline{v}_{AE2} = \dot{y} \underline{j} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \underline{BA}, \text{ ma anche:}$$

$$\underline{v}_{AE2} = \dot{x} \underline{i}, \text{ e quindi:}$$

$\dot{y} \underline{j} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \underline{BA} = \dot{x} \underline{i}$  (incognite:  $\dot{\theta}_2, \dot{x}$ )

3)



$$\dot{y} > 0 \text{ (verso l'alto)}$$

$$\dot{\theta}_2 > 0 \text{ (antioraria)}$$

$$\dot{x} > 0 \text{ (verso destra)}$$

Soluzione analitica:

$$\dot{y} \underline{j} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -h & -h & 0 \end{vmatrix} = \dot{x} \underline{i}$$

$$\dot{y} \underline{j} + \underline{i} (\dot{\theta}_2 h) + \underline{j} (-\dot{\theta}_2 h) = \dot{x} \underline{i}, \text{ da cui:}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_2 h = \dot{x} \\ \dot{y} = \dot{\theta}_2 h \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{y} \\ \dot{\theta}_2 = \dot{y}/h \end{cases} \text{ (segni concordi con quelli ottenuti dal triangolo delle velocità)}$$

4)  $C_{V_1}$  non esiste (moto traslabrio)

$$C_{V_3} \equiv D$$

$C_{V_2}$  : v. soluzione versione A

5)  $\underline{a}_{PE1} = \ddot{y}_J \underline{j}$

$$\underline{a}_{QE2} = \underline{a}_{BE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BQ} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BQ} = \ddot{y}_J + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BQ} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BQ}$$

$$\underline{a}_{RE3} = \underline{a}_{BE1} \parallel \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DR} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{DR}$$

$$\underline{a}_{CE1} = \ddot{y}_J \underline{j}, \text{ ma \u00e9 anche: } \Sigma \textcircled{3}: \underline{a}_{CE1} = \underbrace{\ddot{s}_\lambda}_{\underline{a}_{CE1}^{(r)}} + \underbrace{\ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{DC}}_{\underline{a}_{CE1}^{(tr)}} + \underbrace{2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s}_\lambda}_{\underline{a}_{CE1}^{(cs)}}$$

peranto:  $\boxed{\ddot{y}_J = \ddot{s}_\lambda + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{DC} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{DC} + 2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s}_\lambda}$  (incognite:  $\ddot{s}, \ddot{\theta}_3$ )

Per il sottomeccanismo 1-2, valgono gli stessi ragionamenti visti nella soluzione del punto 5 della versione A; la chiusura avviene sul punto  $O \in \textcircled{2}$ :

$$\underline{a}_{OE2} = \ddot{y}_J + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BO} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BO},$$

e anche:

$$\underline{a}_{OE2} = \ddot{c}_i,$$

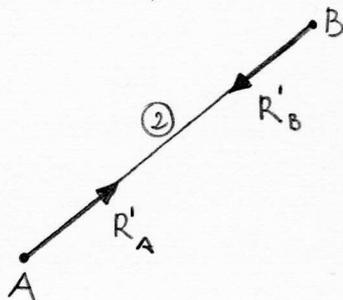
quindi:

$$\boxed{\ddot{y}_J + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BO} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BO} = \ddot{c}_i}$$
 (incognite:  $\ddot{c}, \ddot{\theta}_2$ )

### - ESERCIZIO 2 -

1) Agisce P

Il corpo  $\textcircled{2}$  \u00e9 scarico (come nella soluzione della versione A, lo schematizzo come un'asta di estremit\u00e0 A e B):



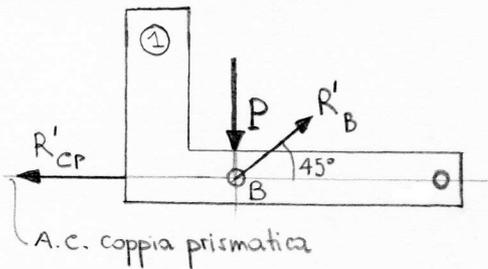
$$R'_A = R'_B$$

Come visto alla soluzione del punto 1) della versione A, il coeff. d'attrito statico deve valere:  $f_s \geq 1$

Sempre ricordo quanto visto alla sol.<sup>re</sup> della versione A, sul corpo  $\textcircled{3}$  si dovr\u00e0 avere:

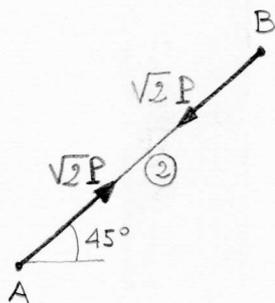
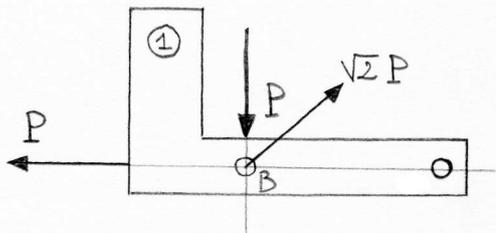
$$R'_C = R'_D = 0$$

Passiamo al corpo ① :



$$\begin{aligned} \text{i) } R'_B \frac{\sqrt{2}}{2} &= R'_{CP} \\ \text{II) } R'_B \frac{\sqrt{2}}{2} &= P \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} R'_{CP} = P \\ R'_B = \sqrt{2} P = R'_A \end{cases}$$

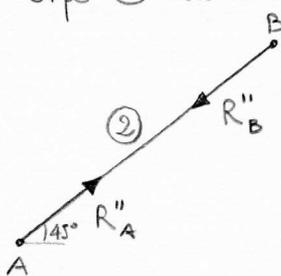
DEL risolti :



(il corpo ③ non è sollecitato)

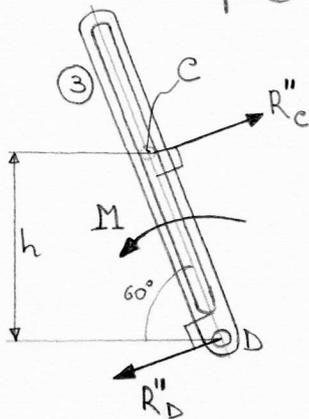
2) Agisce M

Corpo ② scarico :



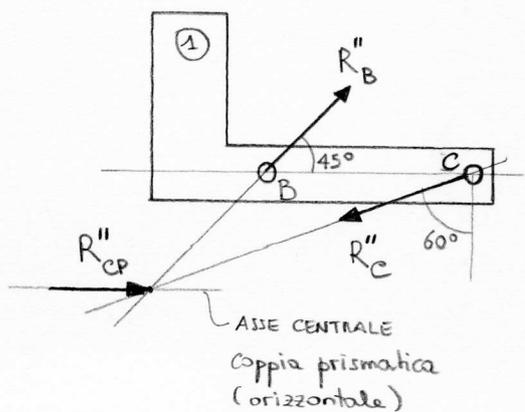
$$R''_A = R''_B, \quad \mu \geq 1$$

Analizziamo il corpo ③ :



$$\begin{aligned} \text{D) } M &= R''_C \frac{h}{\sin 60^\circ} = R''_C \frac{2}{\sqrt{3}} h \rightarrow R''_C = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{h} \\ R''_C &= R''_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M}{h} \end{aligned}$$

Analizziamo infine il corpo ① :



$$\begin{aligned} \text{i) } R''_{CP} + R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} &= R''_C \frac{\sqrt{3}}{2} \\ R''_{CP} + R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{3}{4} \frac{M}{h} \\ \text{II) } R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} &= R''_C \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{h} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} R''_B = \frac{\sqrt{3/2}}{2} \frac{M}{h} = R''_A \\ R''_{CP} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4} \frac{M}{h} > 0 \end{cases}$$

DCL risolti:

