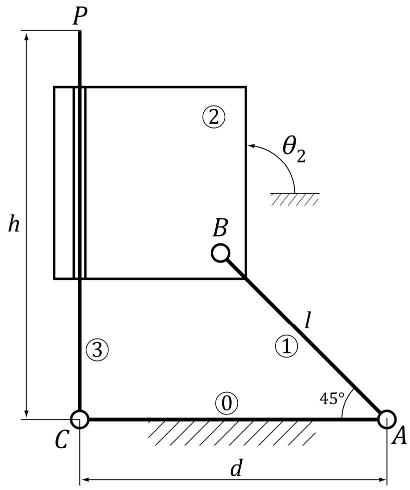
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

25 Luglio 2016

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

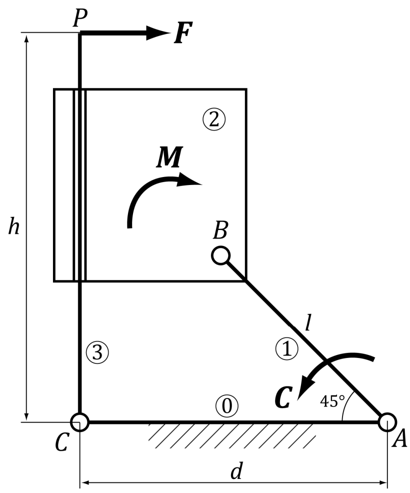
Esercizio 1



Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati i parametri geometrici indicati e la velocità angolare $\dot{\theta}_2$ del corpo 2.

1. Determinare, *in funzione dei dati del problema*:
   a. la velocità del punto B (centro della cerniera)
   b. la velocità del punto P (appartenente al corpo 3)
2. Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
3. Supponendo di aver risolto il problema delle velocità, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni, assumendo nota $\ddot{\theta}_2$.

Esercizio 2

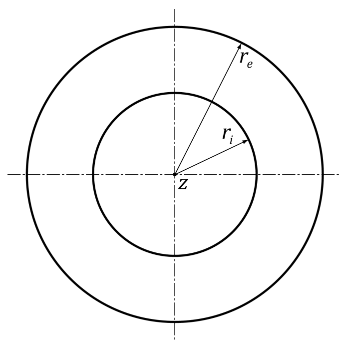


Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 3 agisce la forza $\boldsymbol{F}$, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agisce la coppia $\boldsymbol{M}$, anch'essa assegnata (vettori in figura).
Una coppia $\boldsymbol{C}$, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema nei due casi descritti.

1. Determinare la coppia $\boldsymbol{C'}$ e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{F}$.
2. Determinare la coppia $\boldsymbol{C''}$ e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia $\boldsymbol{M}$.

Per ciascun punto, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3



Il cerchio forato rappresentato a lato ha una massa m nota ed è omogeneo. Sono noti inoltre il raggio interno (del foro) r_i e quello esterno r_e. Si determini il momento d'inerzia di tale figura piana rispetto all'asse z (baricentrico e ortogonale al piano del foglio).

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

25 Luglio 2016

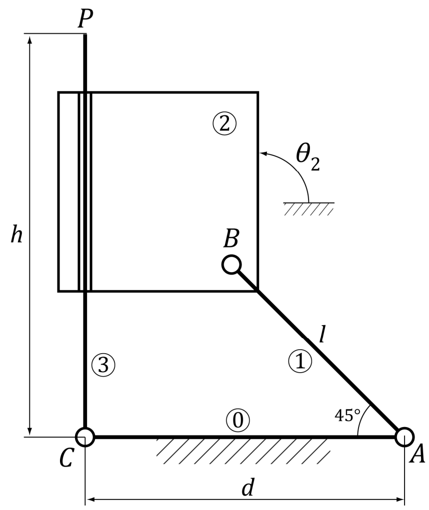
ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati i parametri geometrici indicati e la velocità angolare $\dot{\theta}_2$ del corpo 2.

1. Determinare, *in funzione dei dati del problema*:
   a. la velocità del punto B (centro della cerniera)
   b. la velocità del punto P (appartenente al corpo 3)
2. Individuare il centro delle velocità del corpo 2.
3. Supponendo di aver risolto il problema delle velocità, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni, assumendo nota $\ddot{\theta}_2$.

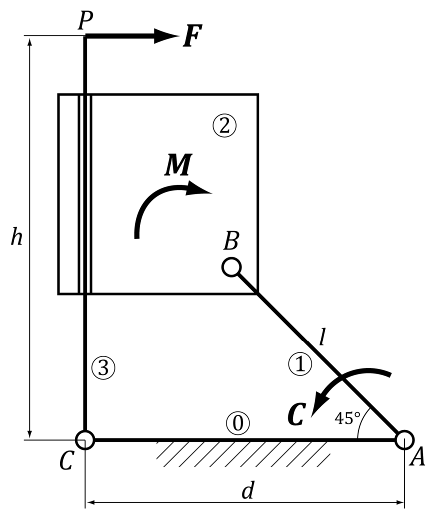


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 3 agisce la forza ***F***, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agisce la coppia ***M***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
Una coppia ***C***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema nei due casi descritti.

1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***F***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia ***M***.

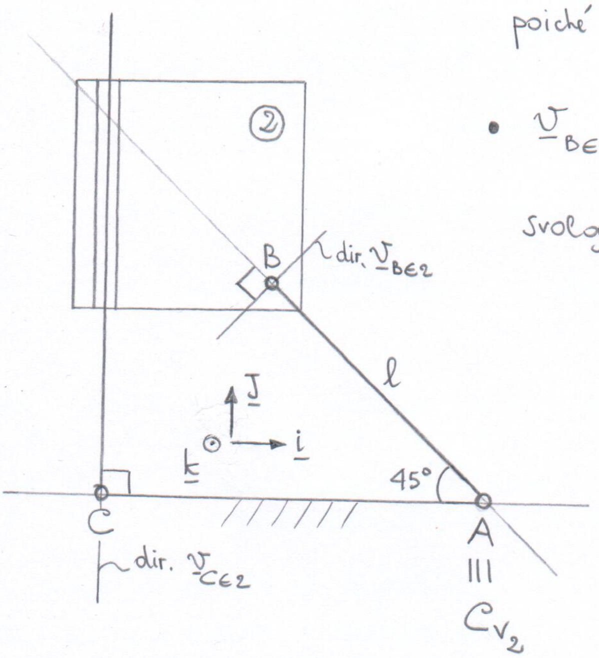
Per ciascun punto, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.



• SOLUZIONE COMPITO 1ª PARTE •

— ESERCIZIO 1 —

1a) Essendo assegnata $\dot{\theta}_2$, $\underline{v}_B$ è immediatamente determinabile dalla conoscenza di C_{v_2}:



poiché $C_{v_2} \equiv A$ (teorema di Chasles), si può scrivere:

• $\underline{v}_{B\in 2} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{C_{v_2}B} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$, con $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{\ell\sqrt{2}}{2}, \frac{\ell\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Svolgendo il prodotto vettoriale:

• $\underline{v}_{B\in 2} = -\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}_2 (\underline{i} + \underline{J})$

1b) La coppia prismatica che collega i corpi 2 e 3 assicura che $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3$. Dunque:

$$\underline{v}_{P\in 3} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CP} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CP}$$

Essendo $\overrightarrow{CP} = (0, h, 0)$ e svolgendo il prodotto vettoriale:

• $\underline{v}_{P\in 3} = -h\dot{\theta}_2 \underline{i}$

2) $C_{v_1} \equiv A$ (cerniera fissa)

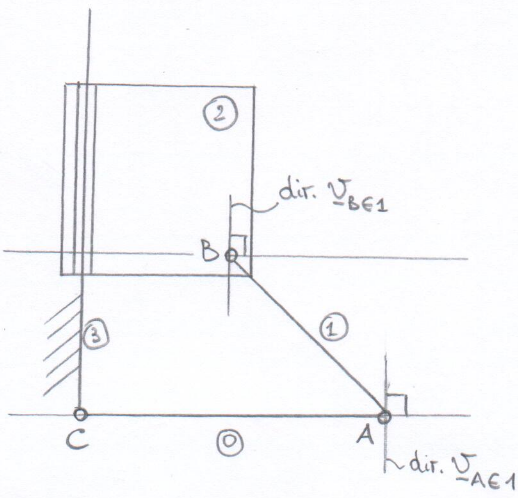
$C_{v_2} \equiv A$ (v. punto 1a)

$C_{v_3} \equiv C$ (cerniera fissa)

$C_{v_{12}} \equiv B$ (cerniera mobile)

$C_{v_{23}}$ non esiste (moto relativo traslatorio)

$C_{v_{13}} =$



in questa configurazione, $C_{v_{13}}$ non esiste (il moto relativo tra i corpi 1 e 3 è traslatorio)

3) Chiudo direttamente sul punto notevole B.

$$\underline{a}_{BE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_1^2 \vec{AB} = \underline{a}_{BE2}$$

Si può scrivere un'altra espressione per $\underline{a}_{BE2}$:

$$\Sigma③ : \quad \underline{a}_{BE2} = \underline{a}_B^{(r)} + \underline{a}_B^{(tr)} + \underline{a}_B^{(Co)} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{CB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{CB} + 2\dot{\theta}_2 \underline{k} \times \dot{s}\underline{J}$$

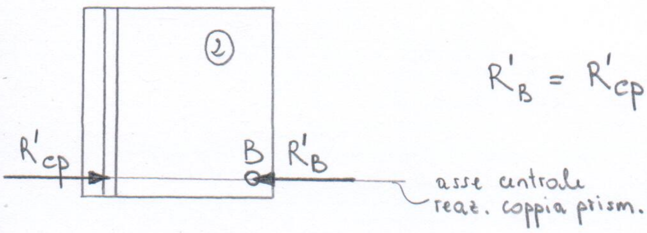
Uguagliando :

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_1^2 \vec{AB} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{CB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{CB} + 2\dot{\theta}_2 \underline{k} \times \dot{s}\underline{J}}$$

Incognite : $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{s}$ (assumendo risolto il pb. delle velocità)

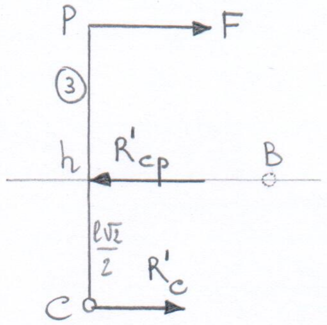
— ESERCIZIO 2 —

1) $\boxed{\underline{F}, \underline{C}'}$ Il corpo 2 è scarico :



$$R'_B = R'_{cp}$$

Corpo 3 (meno incognite) :



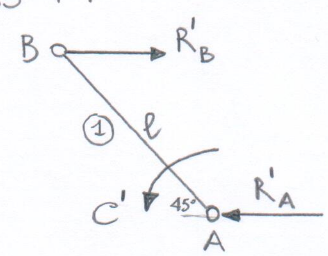
$$R'_C + F - R'_{cp} = 0$$

$$\circlearrowleft C) \quad R'_{cp}\, \ell\frac{\sqrt{2}}{2} = Fh \longrightarrow R'_{cp} = \sqrt{2}\frac{h}{\ell}F = R'_B$$

Dunque :

$$R'_C = R'_{cp} - F = \sqrt{2}\frac{h}{\ell}F - F = \left(\sqrt{2}\frac{h}{\ell} - 1\right)F$$

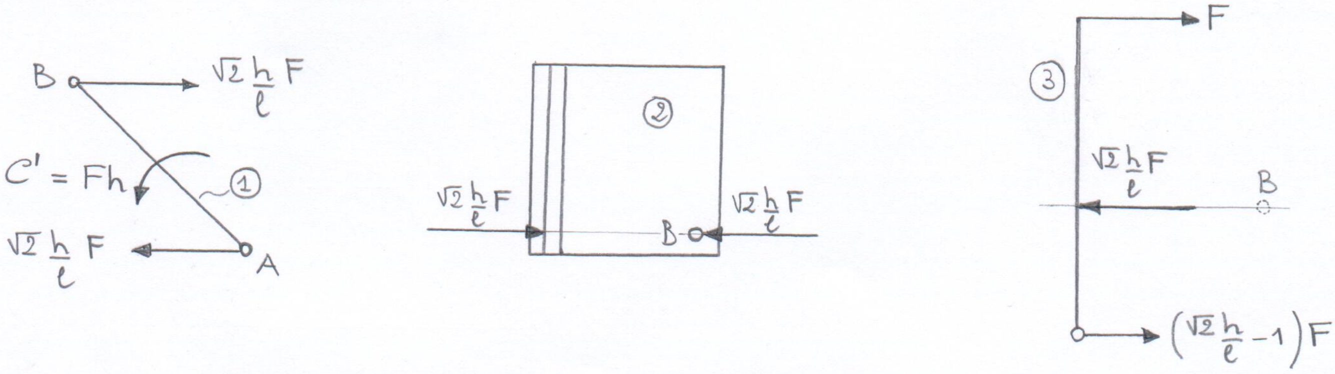
Corpo 1 :



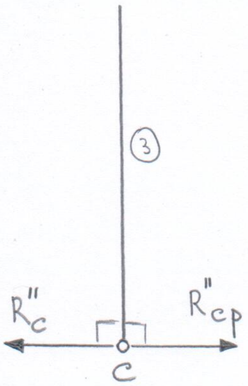
$$R'_A = R'_B = \sqrt{2}\frac{h}{\ell}F$$

$$\circlearrowleft A) \quad C' = R'_B\, \ell\frac{\sqrt{2}}{2} = Fh$$

• DCL risolti :

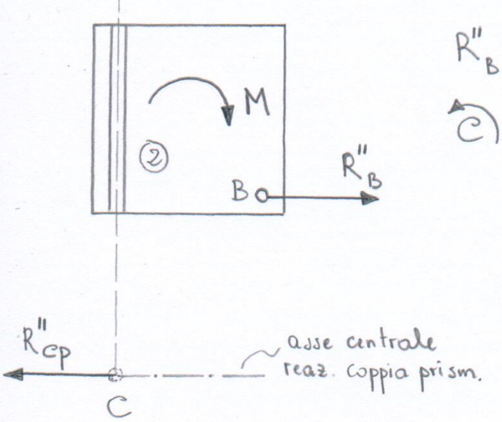


2) $\boxed{\underline{M}, \underline{C}''}$ Il corpo 3 è scarico:



$$R''_C = R''_{cp}$$

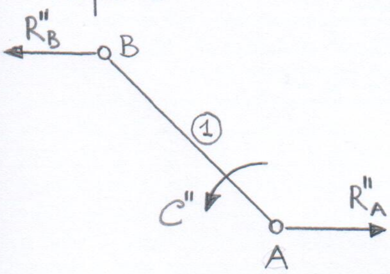
Corpo 2 (meno incognite):



$$R''_B = R''_{cp}$$

$$\circlearrowleft C) \quad -M - R''_B \, \ell \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow R''_B = -\sqrt{2}\,\frac{M}{\ell} = R''_{cp}$$

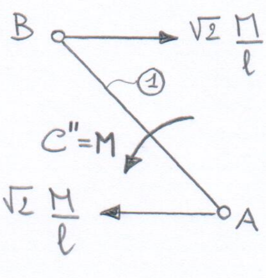
Corpo 1:

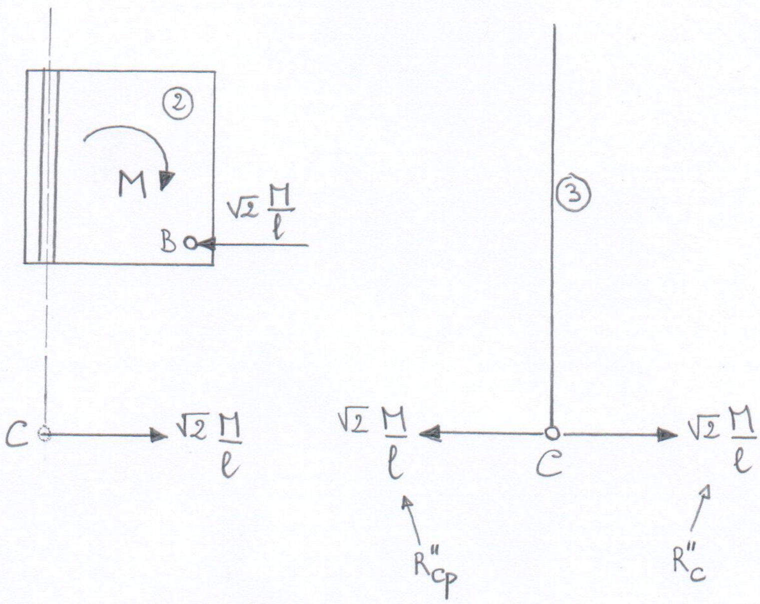


$$R''_A = R''_B = -\sqrt{2}\,\frac{M}{\ell}$$

$$\circlearrowleft A) \quad C'' + R''_B \, \ell \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow C'' = M$$

- DCL risolti:





— ESERCIZIO 3 —

Usando coord. polari (v. teoria):

$$J_z = \rho \int_{r_i}^{r_e} r^2 \, 2\pi r \, dr = \rho \, 2\pi \int_{r_i}^{r_e} r^3 \, dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_i}^{r_e} = \frac{1}{2}\pi\rho\,(r_e^4 - r_i^4)$$

Si può poi elaborare:

$$\frac{1}{2}\pi\rho\,(r_e^4 - r_i^4) = \frac{1}{2}\pi\rho\,(r_e^2 - r_i^2)(r_e^2 + r_i^2)$$

e considerando che la massa del cerchio forato (corona circolare) è:

$$m = \rho\pi\,(r_e^2 - r_i^2)$$

si ottiene:

$$\boxed{J_z = \frac{1}{2} m\,(r_e^2 + r_i^2)}$$

momento d'inerzia rispetto all'asse z