UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

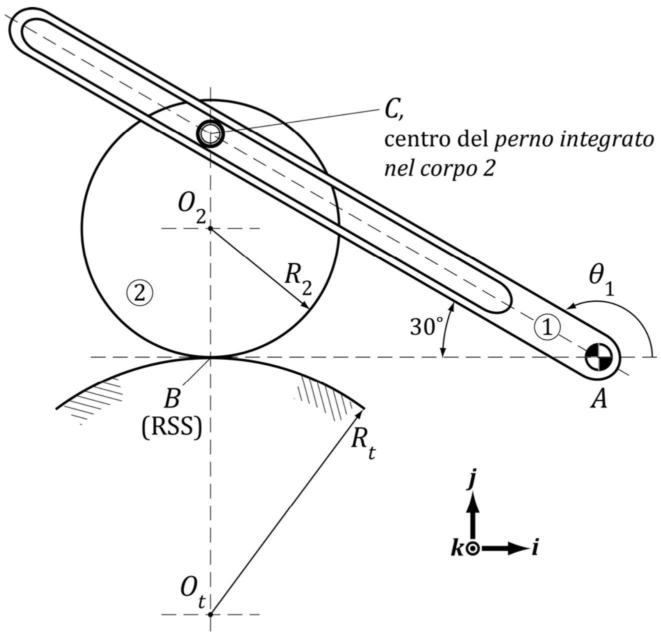
22 Luglio 2014

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

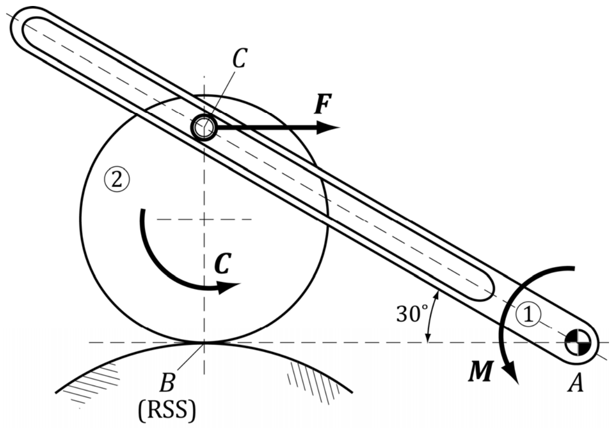
Del meccanismo in figura, nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati: la velocità angolare $\dot{\theta}_1$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ del corpo 1; i raggi R_2 e R_t di, rispettivamente, disco 2 e telaio (il cui profilo è un arco di cerchio); la distanza $\overline{BA} = d$.



1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo e risolvere per via grafica il problema delle velocità (equazione di chiusura, triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite assumendo $\dot{\theta}_1 > 0$).
2. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente, in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati.
3. Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

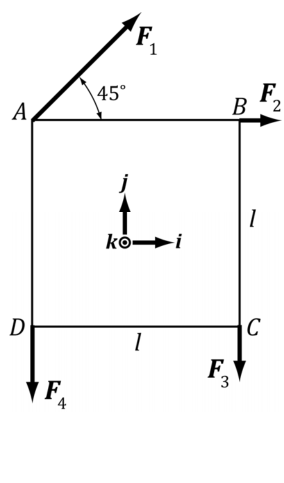
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul perno del corpo 2 agisce la forza orizzontale ***F***, assegnata, e *successivamente*, ancora sul corpo 2, agisce la coppia ***C***, anch'essa assegnata (vettori in figura). È trascurabile l'attrito tra il perno e l'asola del corpo 1.
Una coppia ***M***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema nei due casi descritti.



1. Determinare la coppia ***M'*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza ***F***.
2. Determinare la coppia ***M''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia ***C***.

Per ciascun punto, indicare chiaramente **l'ordine secondo cui vengono analizzati i corpi** e riportare i diagrammi di corpo libero dei due corpi **risolti in funzione dei dati del problema**.

Esercizio 3



Ai vertici di un corpo quadrato di lato l sono applicate le forze ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$) in figura, aventi moduli: $F_1 = 50\sqrt{2}$ N; $F_2 = 10$ N; $F_3 = 20$ N; $F_4 = 30$ N. È inoltre $l = 2$ m.

1. Determinare un sistema equivalente più semplice costituito da risultante e momento risultante.
2. Riportare sul corpo il sistema così ottenuto (facendo attenzione ad applicare correttamente i vettori).

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

22 Luglio 2014

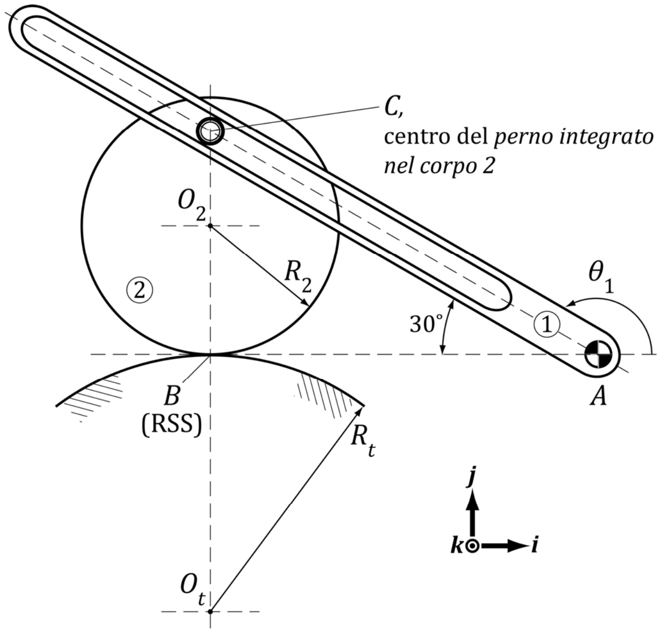
ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati: la velocità angolare $\dot{\theta}_1$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ del corpo 1; i raggi R_2 e R_t di, rispettivamente, disco 2 e telaio (il cui profilo è un arco di cerchio); la distanza $\overline{BA} = d$.

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo e risolvere per via grafica il problema delle velocità (equazione di chiusura, triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite assumendo $\dot{\theta}_1 > 0$).
2. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente, in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati.
3. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

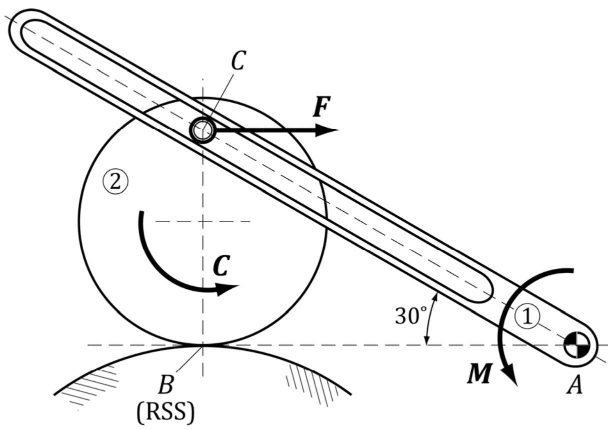


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul perno del corpo 2 agisce la forza orizzontale ***F***, assegnata, e *successivamente*, ancora sul corpo 2, agisce la coppia ***C***, anch'essa assegnata (vettori in figura). È trascurabile l'attrito tra il perno e l'asola del corpo 1.
Una coppia ***M***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema nei due casi descritti.

1. Determinare la coppia ***M'*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza ***F***.
2. Determinare la coppia ***M''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia ***C***.

Per ciascun punto, indicare chiaramente **l'ordine secondo cui vengono analizzati i corpi** e riportare i diagrammi di corpo libero dei due corpi **risolti in funzione dei dati del problema**.



SOLUZIONE COMPITO 1^a PARTE

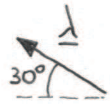
• ESERCIZIO 1 •

1) $\underline{v}_{P\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AP}$

$\underline{v}_{Q\in 2} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BQ} \longrightarrow \underline{v}_{C\in 2} = \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC}$

Per ottenere l'eq.^{ne} di chiusura si scrive un'altra espressione di $\underline{v}_{C\in 2}$:

Σ ① : $\underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_C^{(r)} + \underline{v}_C^{(tr)} = \dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC}$, dove :



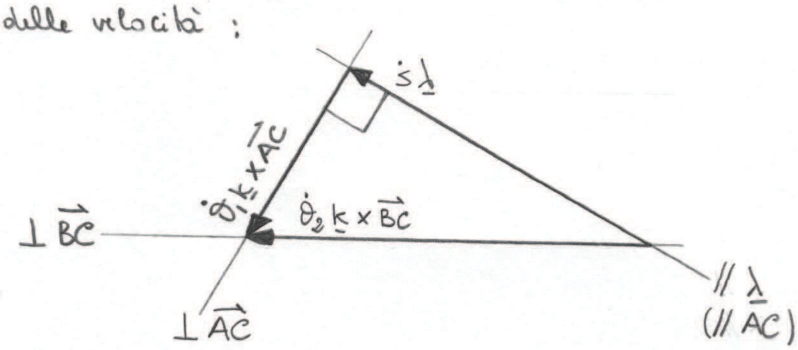
$\underline{\lambda} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Si uguagliano le due espressioni di $\underline{v}_{C\in 2}$:

$$\boxed{\dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} = \dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite : $\dot{s}$, $\dot{\theta}_2$)

Triangolo delle velocità :



$\dot{\theta}_1 > 0$

$\dot{s} > 0$

$\dot{\theta}_2 > 0$

2) $$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ 0 & d/\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \dot{s}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} + \frac{1}{2}\underline{j}\right) + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -d & d/\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{i}\left(-\dot{\theta}_2 d/\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{s}\,\underline{i} + \frac{\dot{s}}{2}\underline{j} + \underline{i}\left(-\dot{\theta}_1 d/\sqrt{3}\right) + \underline{j}\left(-\dot{\theta}_1 d\right)$$

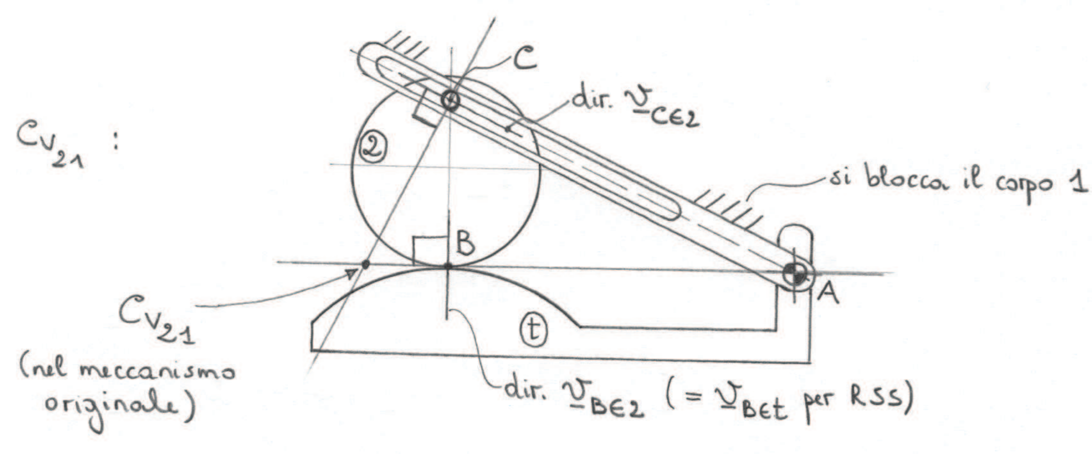
$$\begin{cases} -\dot{\theta}_2 d/\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{s} - \dot{\theta}_1 d/\sqrt{3} \\ 0 = \frac{\dot{s}}{2} - \dot{\theta}_1 d \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{s} = 2\dot{\theta}_1 d & (>0,\ \text{ok}) \\ \dot{\theta}_2 = 4\dot{\theta}_1 & (>0,\ \text{ok}) \end{cases}$$

3) Cv assoluti :

- $Cv_1 \equiv A$ (cerniera fissa)
- $Cv_2 \equiv B$ (RSS)

Cv relativi :

- $C_{V_{12}} = C_{V_{21}}$:



4) $$\underline{a}_{C\in 2} = \underline{a}_{B\in 2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BC} \qquad (\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_{C_{V_2}})$$

$$\underline{a}_{B\in 2} = -D\dot{\theta}_2^2 \underline{J} \quad , \quad \text{con } D = -\left(\frac{R_2 R_t}{R_2 + R_t}\right) \qquad \text{(v. teoria)}$$

$$\underline{a}_{B\in 2} = \frac{R_2 R_t}{R_2 + R_t} \dot{\theta}_2^2 \underline{J}$$

Altra espressione di $\underline{a}_{C\in 2}$:

$$\Sigma①: \; \underline{a}_{C\in 2} = \underline{a}_C^{(r)} + \underline{a}_C^{(tr)} + \underline{a}_C^{(co)} = \ddot{s}\underline{\lambda} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AC} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{\lambda}$$

Si uguagliano le due espressioni di $\underline{a}_{C\in 2}$:

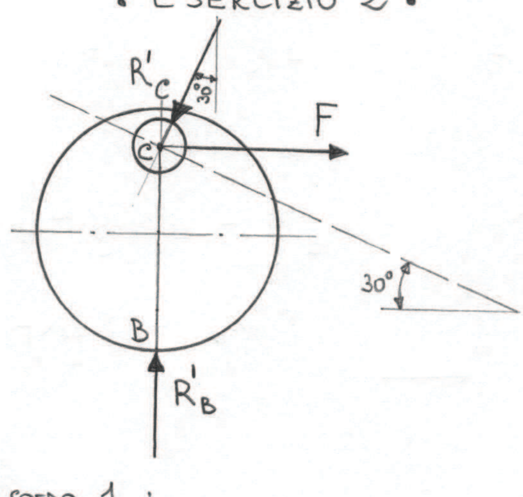
$$\boxed{\frac{R_2 R_t}{R_2 + R_t} \dot{\theta}_2^2 \underline{J} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{BC} = \ddot{s}\underline{\lambda} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AC} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{\lambda}}$$

eq.ne di chiusura (incognite: $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{s}$)

• ESERCIZIO 2 •

1) $\boxed{\underline{F}, \underline{M}'}$

Disco 2 :

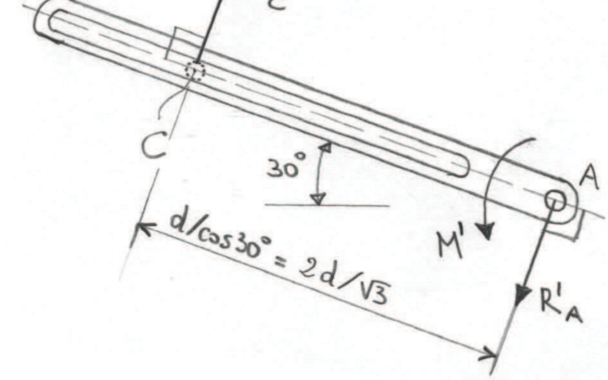


R'_C è ortogonale all'asse dell'asola.

Le rette di applicazione delle tre forze si intersecano in C : questo soddisfa la seconda cardinale.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{i})\; R'_C \frac{1}{2} = F \\ \underline{J})\; R'_C \frac{\sqrt{3}}{2} = R'_B \end{array}\right. \longrightarrow \begin{cases} R'_C = 2F \\ R'_B = \sqrt{3} F \end{cases}$$

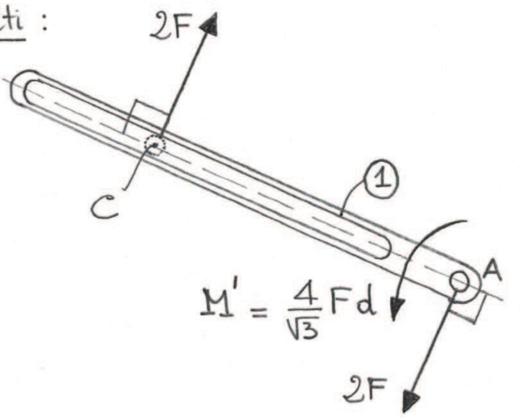
Adesso si isola il corpo 1 :

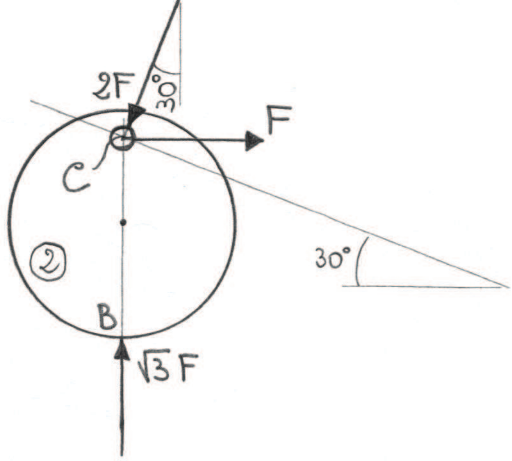


$$R'_A = R'_C = 2F$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A})\; M' = R'_C \frac{2d}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} F d$$

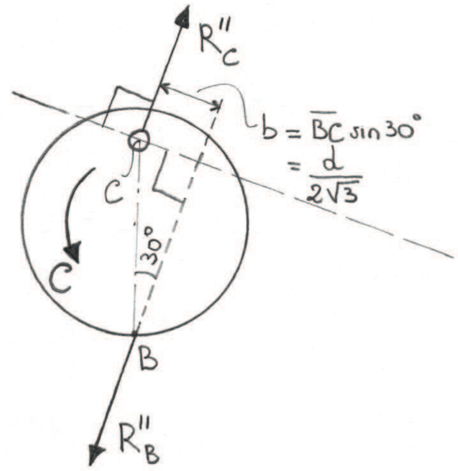
DCL risolti :





2) $\boxed{C, M''}$

Disco 2 :



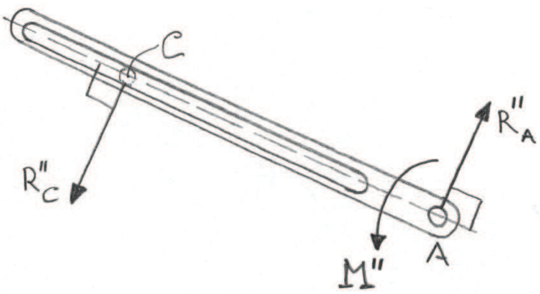
$R''_B = R''_C$

B) $C = R''_C\, b = R''_C \frac{d}{2\sqrt{3}}$

↓

$R''_C = 2\sqrt{3}\,\frac{C}{d} = R''_B$

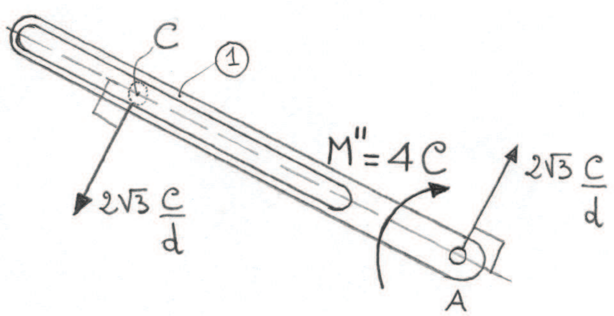
Si passa al corpo 1 :

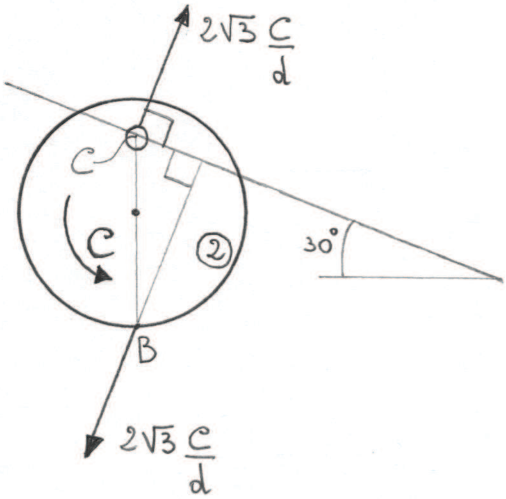


$R''_A = R''_C = 2\sqrt{3}\,\frac{C}{d}$

A) $M'' = -R''_C\,\frac{2d}{\sqrt{3}} = -4C$

DCL risolti:





• ESERCIZIO 3 •

1) <u>Risultante</u> :

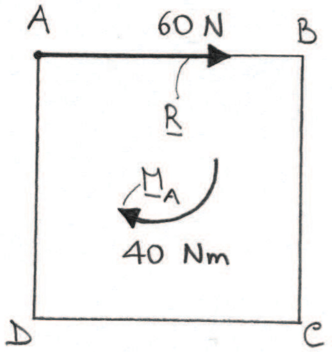
$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 = \left(50\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2},\ 50\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right) + (10,0,0) + (0,-20,0) + (0,-30,0)$$

$$= (60, 0, 0)\ \mathrm{N}$$

È comodo calcolare il momento risultante rispetto ad A, perché soltanto $\underline{F}_3$ dà contributo:

$$\underline{M}_A = (0, 0, -F_3 \ell) = (0, 0, -40)\ \mathrm{Nm}$$

2) Si applicano sul corpo la risultante in A e la coppia $\underline{M}_A$:



sistema equivalente