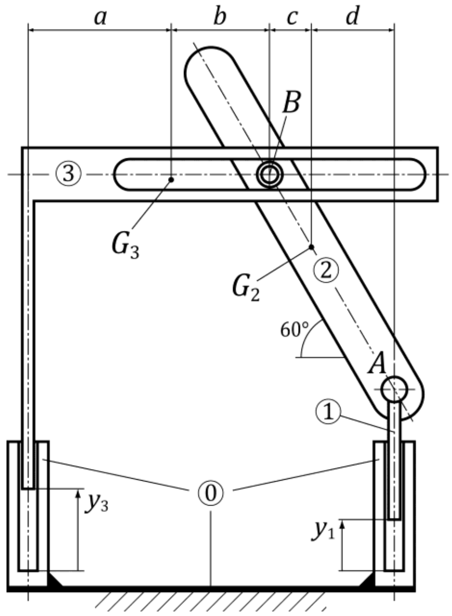
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

21 Febbraio 2018

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – <u>Versione A</u>

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

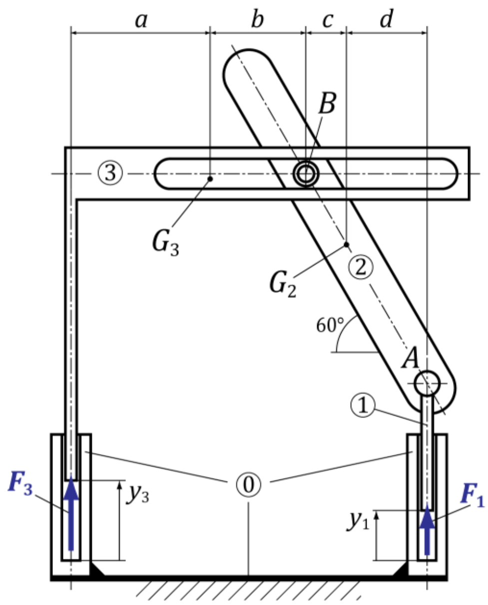
Esercizio 1



Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono note le quantità geometriche indicate. Il corpo 0 funge da telaio. Il punto B è il centro di un perno cilindrico solidale al corpo 2 e impegnato in un'asola ricavata nel corpo 3.

1. **Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire il numero effettivo di gradi di libertà del meccanismo.**
2. Si assumano note le due velocità $\dot{y}_1$ e $\dot{y}_3$: nell'istante considerato, $\dot{y}_1 > 0$ e $\dot{y}_3 = 0$. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
3. Determinare i centri delle velocità assoluti dei tre corpi mobili, assumendo ancora $\dot{y}_3 = 0$. Determinare inoltre il centro delle velocità relativo C_{23}.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2



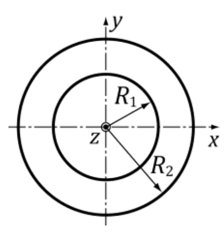
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sui corpi 2 e 3, aventi rispettivamente masse m_2 e m_3 e baricentri G_2 e G_3, agiscono le rispettive forze peso.

1. **Effettuare l'analisi fisica dei vincoli per determinare il numero minimo di forze/coppie esterne che devono essere (opportunamente) applicate affinché il sistema sia globalmente isostatico.**
2. Sono assegnate le rette di applicazione delle forze $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$ mostrate in figura, applicate rispettivamente ai corpi 1 e 3 al fine di equilibrare staticamente il sistema sotto l'azione delle forze peso dei corpi 2 e 3. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare le forze $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

Per il punto 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

Esercizio 3

Ottenere per via analitica l'espressione del momento d'inerzia rispetto all'asse z del cerchio omogeneo forato rappresentato a lato.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

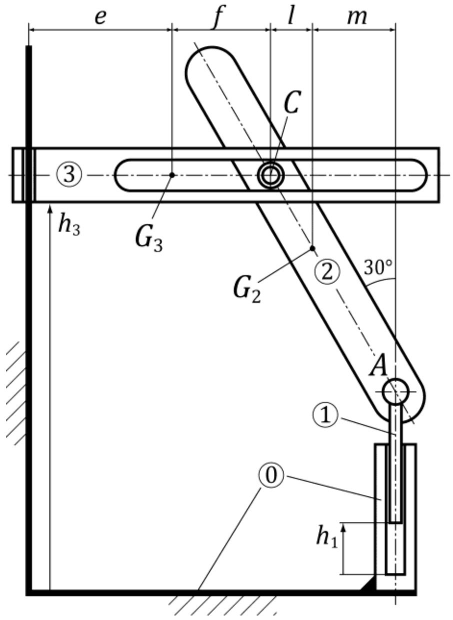
21 Febbraio 2018

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

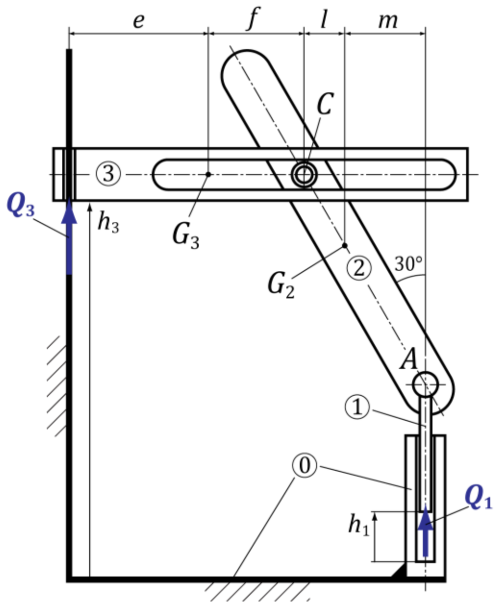
Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono note le quantità geometriche indicate. Il corpo 0 funge da telaio. Il punto C è il centro di un perno cilindrico solidale al corpo 2 e impegnato in un'asola ricavata nel corpo 3.



1. **Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire il numero effettivo di gradi di libertà del meccanismo.**
2. Si assumano note le due velocità $\dot{h}_1$ e $\dot{h}_3$: nell'istante considerato, $\dot{h}_1 > 0$ e $\dot{h}_3 = 0$. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
3. Determinare i centri delle velocità assoluti dei tre corpi mobili, assumendo ancora $\dot{h}_3 = 0$. Determinare inoltre il centro delle velocità relativo C_{23}.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sui corpi 2 e 3, aventi rispettivamente masse m_2 e m_3 e baricentri G_2 e G_3, agiscono le rispettive forze peso.

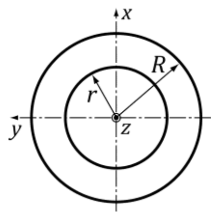


1. **Effettuare l'analisi fisica dei vincoli per determinare il numero minimo di forze/coppie esterne che devono essere (opportunamente) applicate affinché il sistema sia globalmente isostatico.**
2. Sono assegnate le rette di applicazione delle forze $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_3}$ mostrate in figura, applicate rispettivamente ai corpi 1 e 3 al fine di equilibrare staticamente il sistema sotto l'azione delle forze peso dei corpi 2 e 3. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare le forze $\boldsymbol{Q_1}$ e $\boldsymbol{Q_3}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

Per il punto 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

Esercizio 3

Ottenere per via analitica l'espressione del momento d'inerzia rispetto all'asse z del cerchio omogeneo forato rappresentato a lato.



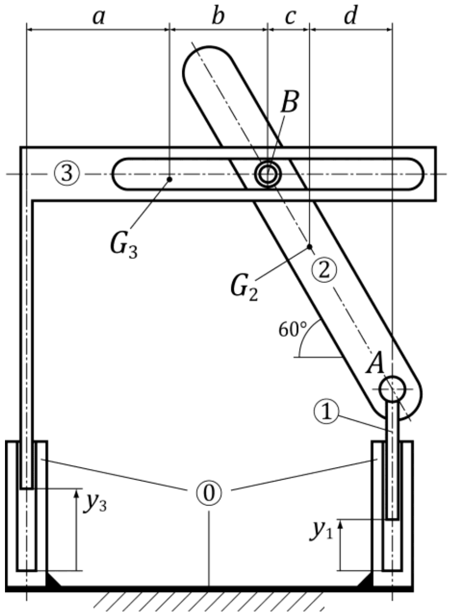
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

21 Febbraio 2018

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

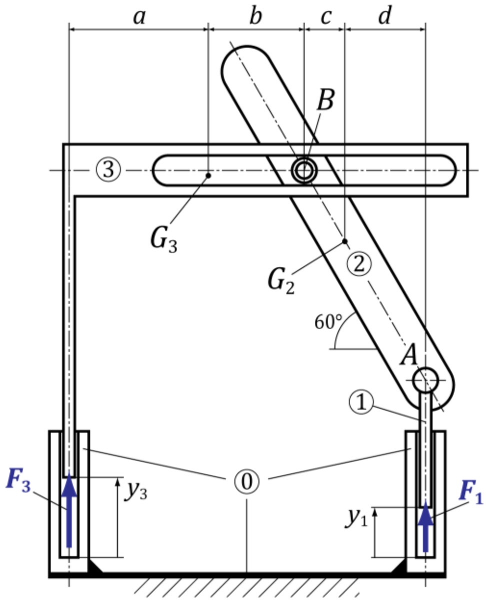
Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono note le quantità geometriche indicate. Il corpo 0 funge da telaio. Il punto B è il centro di un perno cilindrico solidale al corpo 2 e impegnato in un'asola ricavata nel corpo 3.



1. Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire il numero effettivo di gradi di libertà del meccanismo.
2. Si assumano note le due velocità $\dot{y}_1$ e $\dot{y}_3$: nell'istante considerato, $\dot{y}_1 > 0$ e $\dot{y}_3 = 0$. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
3. Determinare i centri delle velocità assoluti dei tre corpi mobili, assumendo ancora $\dot{y}_3 = 0$.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sui corpi 2 e 3, aventi rispettivamente masse m_2 e m_3 e baricentri G_2 e G_3, agiscono le rispettive forze peso.



1. Effettuare l'analisi fisica dei vincoli per determinare il numero minimo di forze/coppie esterne che devono essere (opportunamente) applicate affinché il sistema sia globalmente isostatico**.**
2. Sono assegnate le rette di applicazione delle forze $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$ mostrate in figura, applicate rispettivamente ai corpi 1 e 3 al fine di equilibrare staticamente il sistema sotto l'azione delle forze peso dei corpi 2 e 3. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinare le forze $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_3}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

Per il punto 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

— ESERCIZIO 1 —
(sol.^{ne} versione A)

1) 3 corpi rigidi mobili × 3 g.d.l = 9 g.d.l. (nel piano)
2 coppie prismatiche × (−2 g.d.l) = −4 g.d.l.
1 cerniera × (−2 g.d.l.) = −2 g.d.l.
1 perno cil. in asola × (−1 g.d.l) = −1 g.d.l.

Num. gradi di libertà residui ⩾ 2 g.d.l

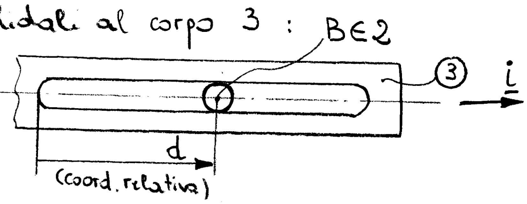
È immediato verificare che i vincoli sono indipendenti (basta bloccare y_1 e y_3, ovvero i corpi 1 e 3) : il meccanismo ha quindi due g.d.l. effettivi.
per dimostrare che il meccanismo non può muoversi

2) $\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{A\in 2} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$ (θ_2 angolo assoluto positivo se antiorario)

$= \dot y_1 \underline{J} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$

Si può riscrivere un'altra espressione di $\underline{v}_{B\in 2}$ mettendosi solidali al corpo 3 :

$\Sigma③ : \underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 2}^{(r)} + \underline{v}_{B\in 2}^{(tr)} = \dot d \underline{i} + \dot y_3 \underline{J}$, con :



Uguagliando le due espressioni di $\underline{v}_{B\in 2}$ e sapendo $\dot y_3 = 0$:

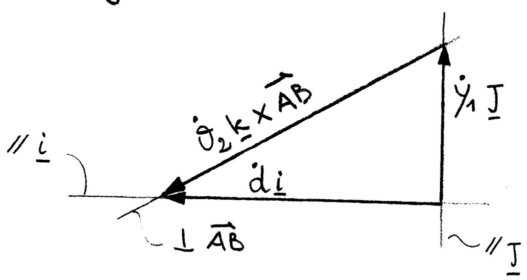
$$\boxed{\dot y_1 \underline{J} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} = \dot d \underline{i}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\dot\theta_2$ e $\dot d$)

Soluzione analitica, con $\overrightarrow{AB} = (-(c+d), (c+d)\tan 60°, 0)$:

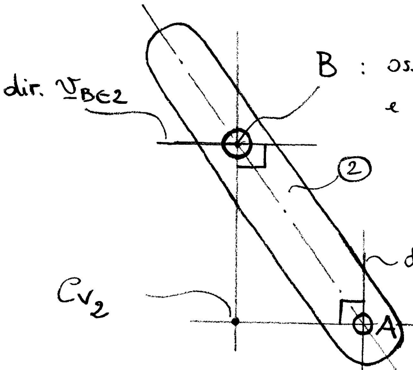
- $\dot\theta_2 = \dfrac{\dot y_1}{c+d}$; • $\dot d = -\sqrt{3}\, \dot y_1$

Verifica segni mediante triangolo delle velocità :



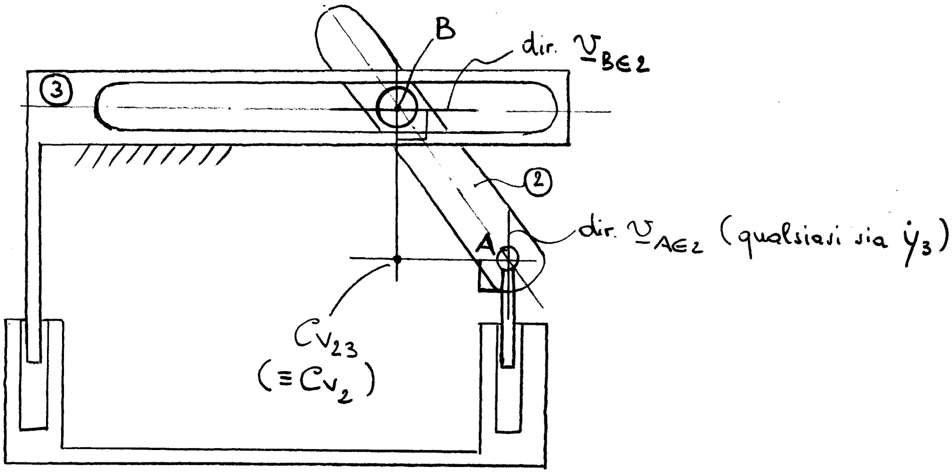
($\dot y_1 > 0$)
$\dot\theta_2 > 0$ ✓
$\dot d < 0$ ✓

3) C_{v_1} non esiste (moto traslatorio rettilineo)
C_{v_3} non esiste (" " ")
C_{v_2} :



B : osservando l'espressione scritta sopra per $\underline{v}_{B\in 2} = \dot d \underline{i} + \dot y_3 \underline{J}$ e considerando $\dot y_3 = 0$, $\underline{v}_{B\in 2}$ è orizzontale

$C_{V_{23}}$:



4) Si procede in modo del tutto analogo a quanto fatto per le velocità:

$$\underline{a}_{B\in 2} = \underset{\underset{\underline{a}_{A\in 1}}{\parallel}}{\underline{a}_{A\in 2}} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{AB} = \ddot{y}_1 \underline{J} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{AB}$$

$$\Sigma ③ : \quad \underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{B\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{B\in 2} + \underline{a}^{(Co)}_{B\in 2} = \ddot{d}\, \underline{i} + \ddot{y}_3 \underline{J} + \underline{0} \text{ (essendo } \underline{\omega}^{(tr)} = \dot{\theta}_3 \underline{k} = \underline{0})$$

Uguagliando:

$$\boxed{(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3)\underline{J} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{AB} = \ddot{d}\, \underline{i}}$$ eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{d}$)

— ESERCIZIO 2 —

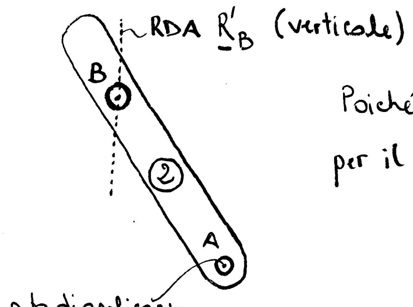
1)

3 corpi rigidi	⟶	9 eq.^{ni} cardinali scalari (nel piano)
2 coppie prism.	⟶	4 reazioni scalari incognite
1 cerniera	⟶	2 " " "
1 perno cilindrico (liscio) in asola	⟶	1 " " "

9 eq.^{ni} in 7 reazioni scalari incognite: per ottenere un sistema globalmente isostatico è necessario applicare <u>almeno due</u> <u>forze/coppie esterne</u> su corpi distinti, quali le forze $\underline{F}_1$ e $\underline{F}_3$, da annoverare tra le incognite del problema (2 incognite scalari, una volta assegnate le loro RDA).

2) $\boxed{\text{Agisce la sola forza peso del corpo 3, oltre alle forze esterne } \underline{F}_1' \text{ e } \underline{F}_3'}$

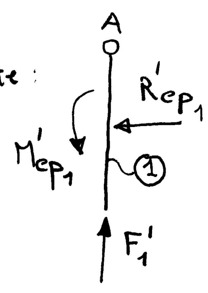
Sul corpo 2 agiscono due sole forze:



Poiché $\underline{R}_B'$ e $\underline{R}_A'$ non possono costituire una coppia a braccio nullo, per il rispetto delle eq.^{ni} cardinali deve valere

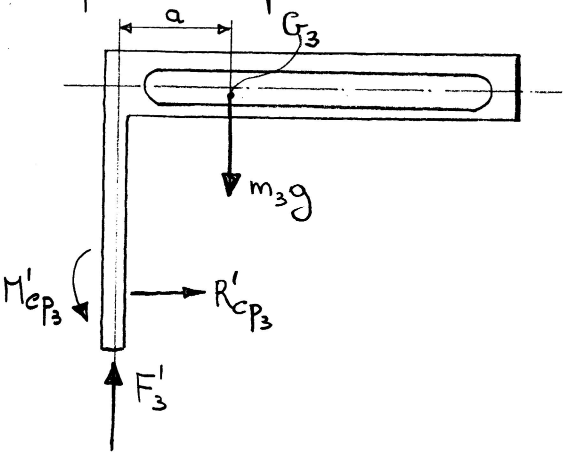
$$\underline{R}_A' = \underline{R}_B' = \underline{0} \longrightarrow \text{corpo 2 non sollecitato}$$

Allora la situazione su ① è la seguente:



$$R_{ep_1}' = 0$$
$$F_1' = 0 \longrightarrow \text{corpo 1 non sollecitato}$$
$$M_{cp_1}' = 0$$

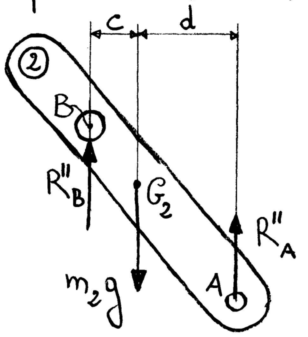
Si passa al corpo 3 :



$$R'_{cp_3} = 0$$
$$F'_3 = m_3 g$$
$$M'_{cp_3} = m_3 g a$$

Agisce la sola forza peso del corpo 2, oltre alle forze esterne $\underline{F}''_1$ e $\underline{F}''_3$

Il corpo 2 è isostatico :

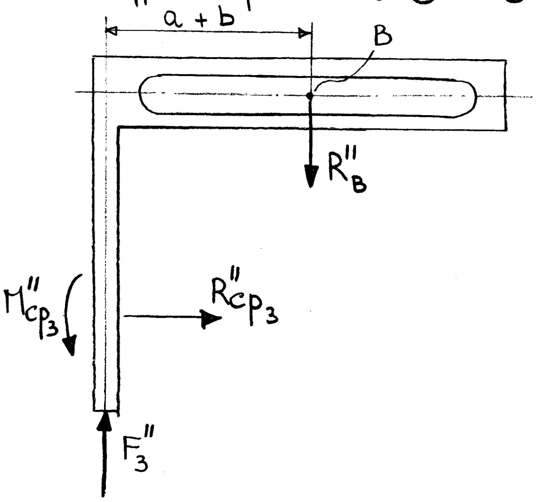


$$R''_A + R''_B = m_2 g$$
$$A)\ m_2 g d = R''_B (c+d) \longrightarrow R''_B = \frac{d}{c+d} m_2 g$$

Sostituendo nella prima :

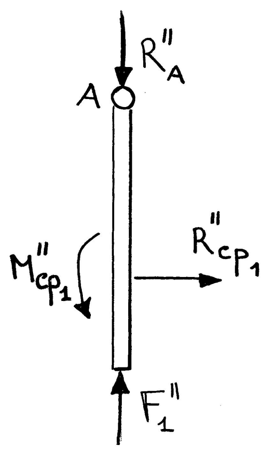
$$R''_A = m_2 g - R''_B = \frac{c}{c+d} m_2 g$$

È indifferente passare a 1 o 3. Scegliendo 3 :



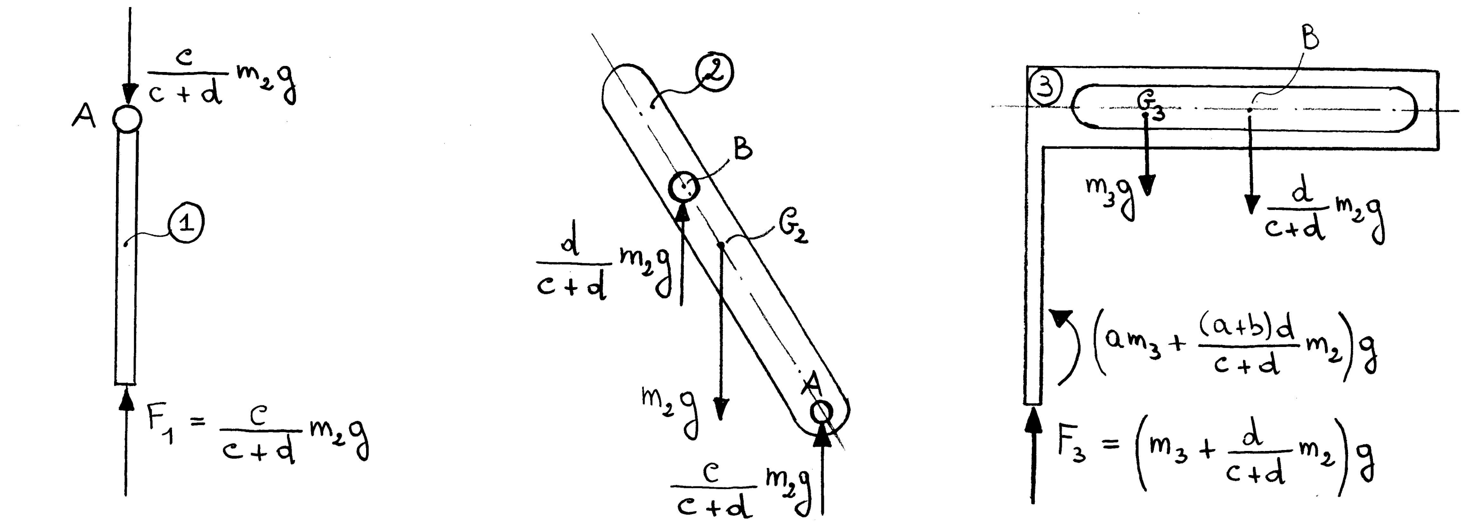
$$R''_{cp_3} = 0$$
$$F''_3 = R''_B = \frac{d}{c+d} m_2 g$$
$$M''_{cp_3} = R''_B (a+b) = \frac{d(a+b)}{c+d} m_2 g$$

Infine il corpo 1 :

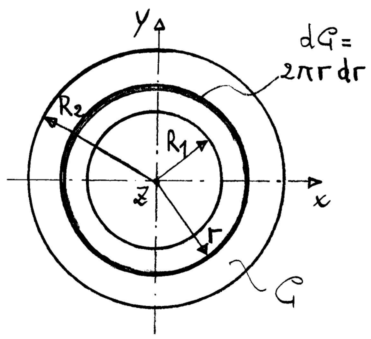


$$R''_{cp_1} = 0$$
$$F''_1 = R''_A = \frac{c}{c+d} m_2 g$$
$$M''_{cp_1} = 0$$

DCL risolti (completi) :



— ESERCIZIO 3 —



Momento d'inerzia rispetto all'asse z :

$$J_z = \rho \int_G (x^2+y^2)\, dG$$

Passando a coord. polari : $J_z = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2\, 2\pi r\, dr = \rho \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$

La massa del cerchio forato è pari a :

$$m = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

Dunque :

- $J_z = \rho \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \rho \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$