UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

20 Febbraio 2016

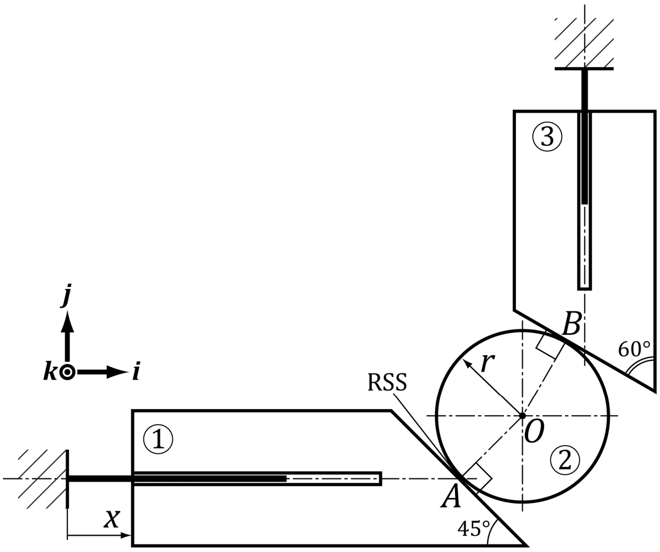
ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione A

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Tra i corpi 1 e 2 è presente un vincolo di rotolamento senza strisciamento (RSS).

1. **Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire quale tipo di rotolamento deve esistere tra i corpi 2 e 3 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà**.
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite** (si assuma $\dot{x} > 0$).
3. Determinare analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

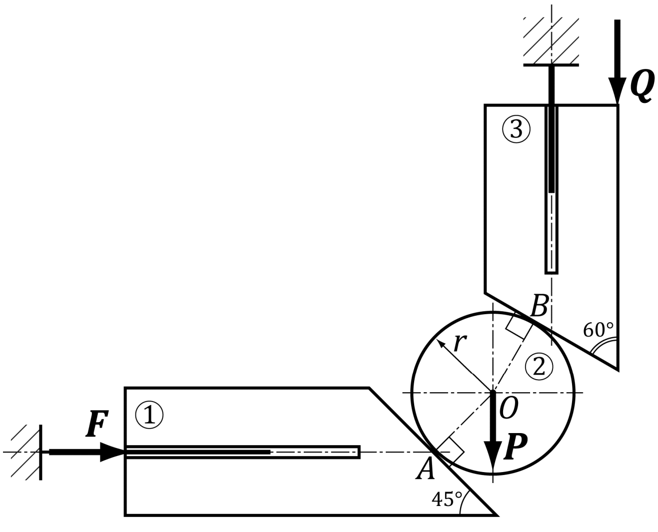


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agisce la forza ***P***, assegnata, e *successivamente* sul corpo 3 agisce la forza ***Q***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
Una forza ***F***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema (retta di applicazione assegnata come indicato in figura).

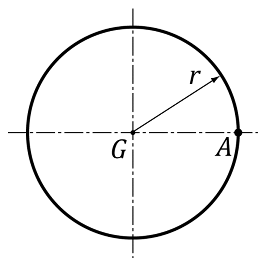
1. **Determinare la forza *F'* e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza *P*.**
2. Determinare la forza ***F''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***Q***.

Per i due punti precedenti, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i tre corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema* (non è richiesta la sovrapposizione degli effetti).



Esercizio 3

Dato il disco omogeneo di massa m in figura, determinare il suo momento d'inerzia attorno all'asse ortogonale al piano del foglio e passante per il punto A.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

20 Febbraio 2016

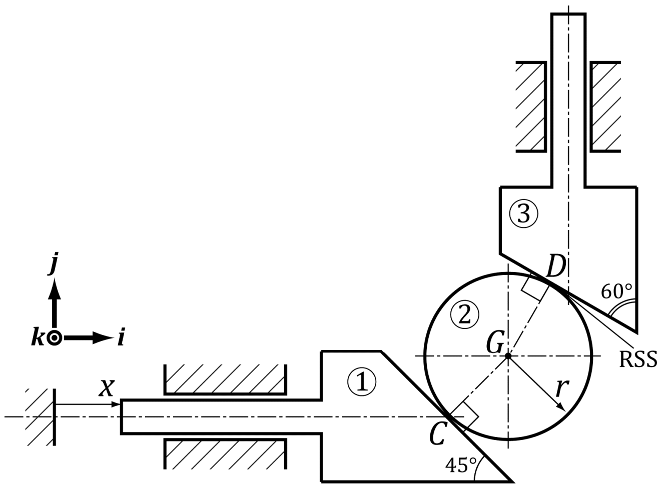
ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Tra i corpi 2 e 3 è presente un vincolo di rotolamento senza strisciamento (RSS).

1. **Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire quale tipo di rotolamento deve esistere tra i corpi 1 e 2 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà**.
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite** (si assuma $\dot{x} > 0$).
3. Determinare analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

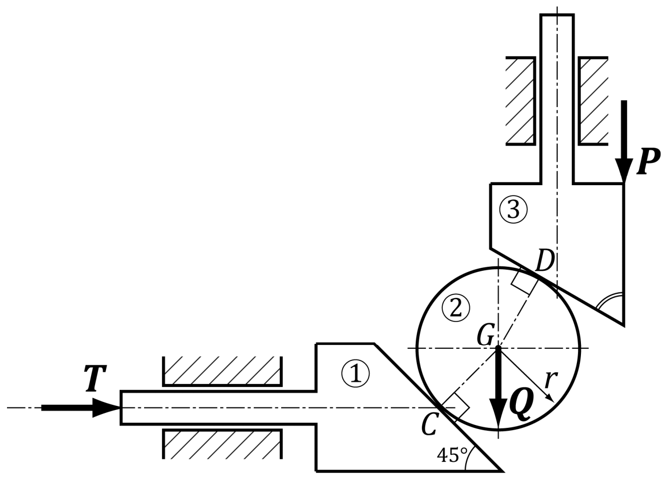


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agisce la forza ***Q***, assegnata, e *successivamente* sul corpo 3 agisce la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
Una forza ***T***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema (retta di applicazione assegnata come indicato in figura).

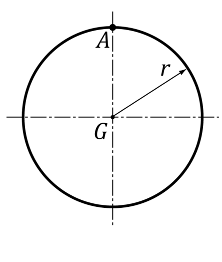
1. **Determinare la forza *T'* e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza *Q***.
2. Determinare la forza ***T''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.

Per i due punti precedenti, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i tre corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema* (non è richiesta la sovrapposizione degli effetti).



Esercizio 3

Dato il disco omogeneo di massa m in figura, determinare il suo momento d'inerzia attorno all'asse ortogonale al piano del foglio e passante per il punto A.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

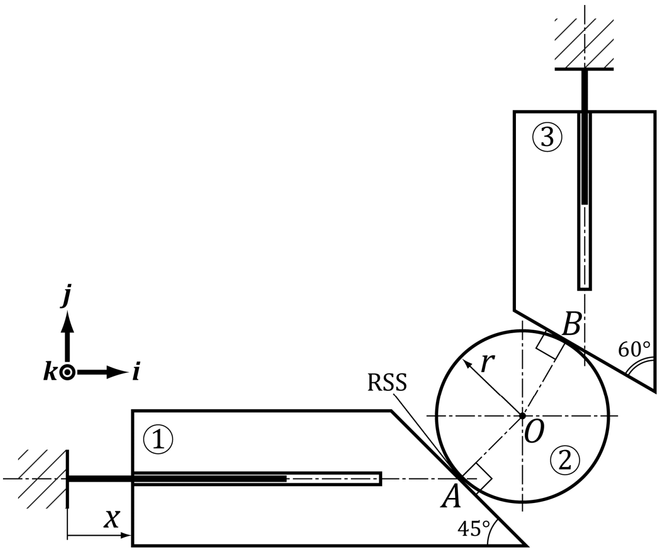
20 Febbraio 2016

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnate le quantità geometriche indicate. Tra i corpi 1 e 2 è presente un vincolo di rotolamento senza strisciamento (RSS).

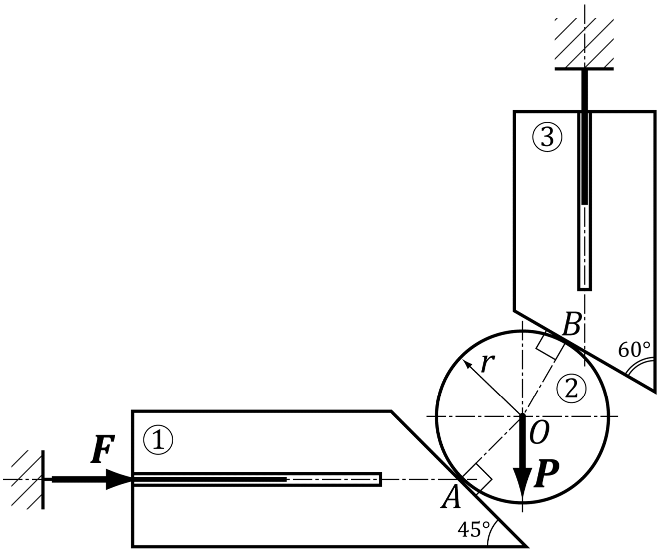
1. Effettuare l'analisi geometrica dei vincoli per stabilire quale tipo di rotolamento deve esistere tra i corpi 2 e 3 affinché il meccanismo abbia un solo grado di libertà.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite (si assuma $\dot{x} > 0$).
3. Determinare analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.



Esercizio 2

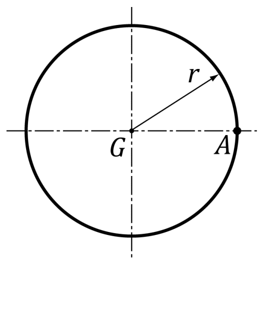
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agisce la forza ***P***, assegnata (in figura).
Una forza ***F***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema (retta di applicazione assegnata come indicato in figura).

Determinare la forza ***F*** e tutte le forze/coppie reattive, indicando chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i tre corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.



Esercizio 3

Dato il disco omogeneo di massa m in figura, determinare il suo momento d'inerzia attorno all'asse ortogonale al piano del foglio e passante per il punto A.



• SOLUZIONE COMPITO 1ª PARTE, vers. A •

Le soluzioni delle due versioni A e B sono formalmente identiche.

— ESERCIZIO 1 —

1) Analisi geometrica vincoli:

- 3 corpi rigidi : 9 g.l.
- 2 coppie prismatiche : – 4 g.l.
- 1 RSS : – 2 g.l.

} affinché il meccanismo abbia 1 solo g.l., il rotolamento tra i corpi 2 e 3 deve avvenire SENZA STRISCIAMENTO (RSS, – 2 g.l.)

2) Posso (ad esempio) scegliere il punto B come punto di chiusura.

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underset{\underset{\underline{v}_{A\in 1} = \dot{x}\,\underline{i}}{\| \text{(RSS)}}}{\underline{v}_{A\in 2}} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AB} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AB}$$

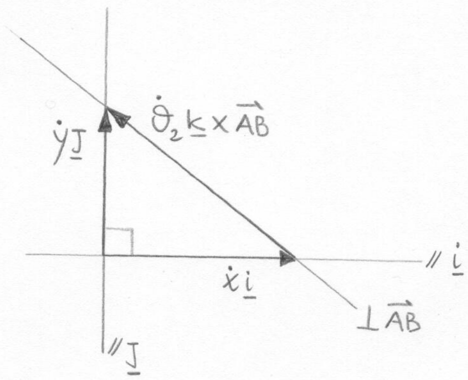
Inoltre:

$$\underline{v}_{B\in 3} = \dot{y}\,\underline{J}$$

e poiché $\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 3}$ (per RSS) l'eq.ne di chiusura diventa:

$$\boxed{\dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AB} = \dot{y}\,\underline{J}} \qquad (\text{incognite}: \dot{\theta}_2, \dot{y})$$

Triangolo delle velocità:



$(\dot{x} > 0)$

$\dot{\theta}_2 > 0$

$\dot{y} > 0$

3) Dall'eq.ne di chiusura sopra:

$$\dot{x}\,\underline{i} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ \frac{r}{2}(\sqrt{2}+1) & \frac{r}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) & 0 \end{vmatrix} = \dot{y}\,\underline{J} \,, \quad \text{dove si è usato: } \overrightarrow{AB} = \left(\frac{r}{2}(\sqrt{2}+1), \frac{r}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}), 0\right)$$

Si ottengono le due eq.ni scalari:

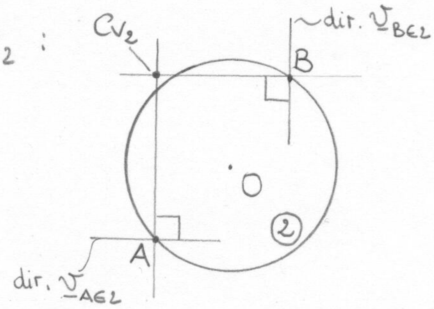
$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{\theta}_2\,\frac{r}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 \\ \dot{\theta}_2\,\frac{r}{2}(\sqrt{2}+1) = \dot{y} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\dfrac{\dot{x}}{r} \\ \dot{y} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\dot{x} \end{cases}$$

(segni concordi con quelli ottenuti dal triangolo delle velocità)

4) • Cv_1 non esiste (moto traslatorio)

• Cv_3 " " " "

• Cv_2 :



• $Cv_{12} \equiv A$ (per RSS)

• $Cv_{23} \equiv B$ " "

• Cv_{13} non esiste (il moto relativo è traslatorio)

5) Analogamente a quanto fatto per le velocità, si può chiudere (ad esempio) sul punto B. Stavolta il procedimento è meno immediato, poiché $\underline{a}_{AE1} \neq \underline{a}_{AE2}$ e $\underline{a}_{BE2} \neq \underline{a}_{BE3}$.

Otteniamo una prima espressione di $\underline{a}_{BE2}$, iniziando dalla determinazione di $\underline{a}_{AE2}$:

$$\Sigma ① : \ \underline{a}_{AE2} = \underline{a}^{(r)}_{AE2} + \underline{a}^{(tr)}_{AE2} + \underline{a}^{(co)}_{AE2} = r\dot{\theta}_2^2 \underline{n} + \ddot{x}\underline{i} + \underline{0} \ \text{poiché } \underline{\omega}^{(tr)} = \underline{\omega}_1 = \underline{0} \quad , \text{ con } \underline{n} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$\underline{n}$ 45°

Dunque:

$$\underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{AE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{AB} = r\dot{\theta}_2^2 \underline{n} + \ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{AB}$$

Possiamo scrivere un'altra espressione per $\underline{a}_{BE2}$ mettendosi solidali al corpo 3:

$$\Sigma ③ : \ \underline{a}_{BE2} = \underline{a}^{(r)}_{BE2} + \underline{a}^{(tr)}_{BE2} + \underline{a}^{(co)}_{BE2} = r\dot{\theta}_2^2 \underline{\tau} + \ddot{y}\underline{J} + \underline{0} \ \text{poiché } \underline{\omega}_3 = \underline{0} \quad , \text{ con } \underline{\tau} = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$\underline{\tau}$ 60°

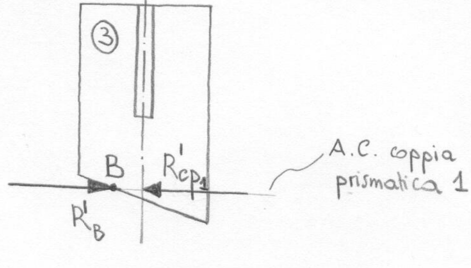
Uguagliando:

$$r\dot{\theta}_2^2 \underline{n} + \ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{AB} = r\dot{\theta}_2^2 \underline{\tau} + \ddot{y}\underline{J}$$

$$\boxed{r\dot{\theta}_2^2 (\underline{n} - \underline{\tau}) + \ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{AB} = \ddot{y}\underline{J}} \quad (\text{incognite: } \ddot{\theta}_2, \ddot{y})$$

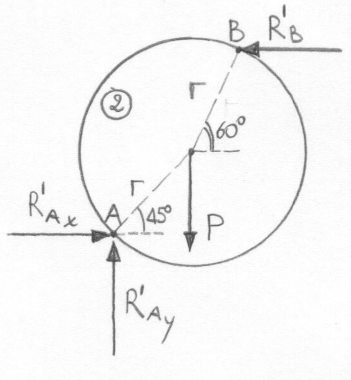
— ESERCIZIO 2 —

1) Il corpo 3 è scarico:



$$R'_B = R'_{cp_1}$$

Si passa al corpo 2, in cui $\underline{P}$ è nota:



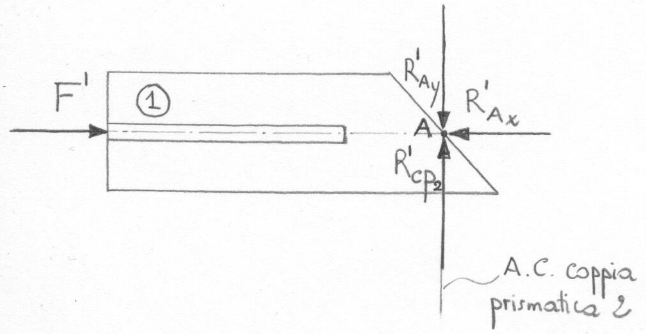
$\underline{i}$) $R'_{A_x} = R'_B$

$\underline{J}$) $R'_{A_y} = P$

A) $R'_B \, AB_y - P r \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow R'_B = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} P = R'_{A_x} = R'_{cp_1}$

$$AB_y = \frac{r}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

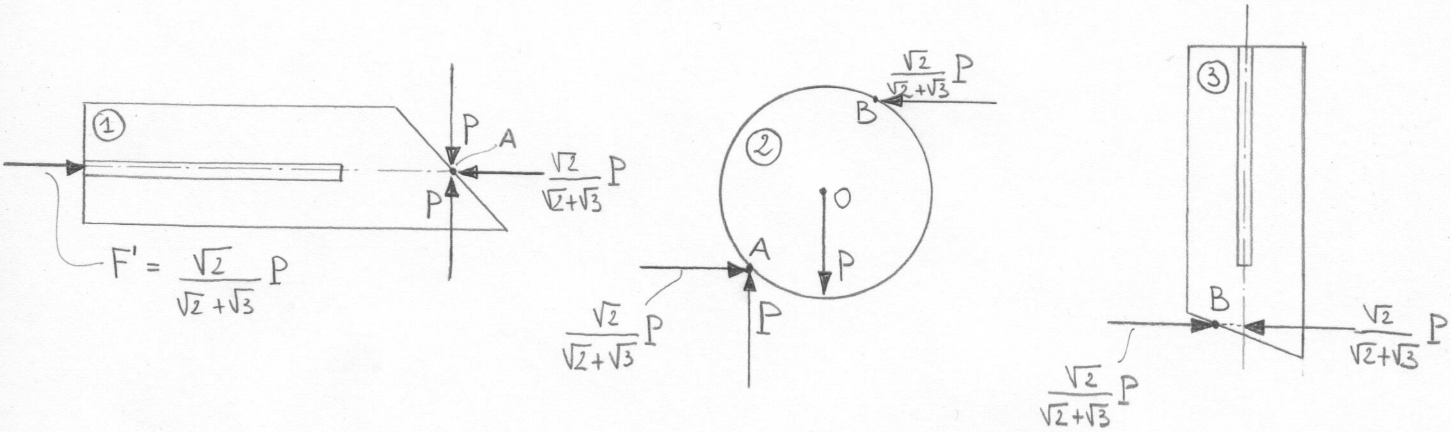
Infine il corpo 1 :



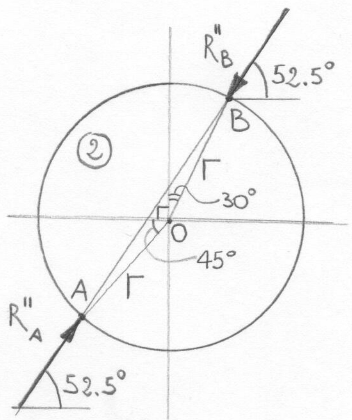
$$\underline{i}) \quad F' = R'_{A_x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} P$$

$$\underline{J}) \quad R'_{cp_2} = R'_{A_y} = P$$

DCL risolti :



2) Il corpo 2 è scarico :



il triangolo $A\hat{O}B$ è isoscele ed è caratterizzato da :

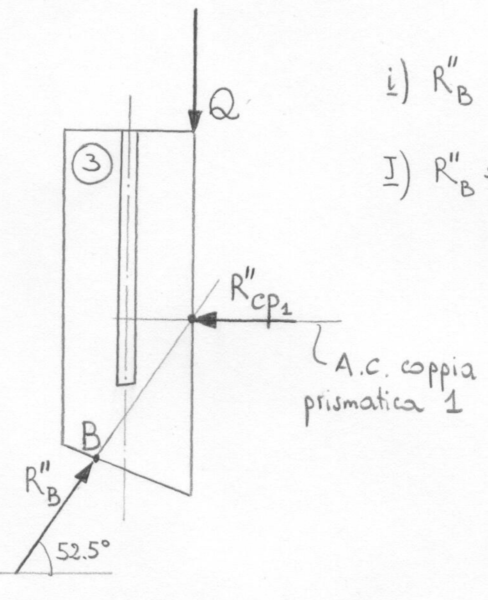
- angolo al vertice : $30° + 90° + 45° = 165°$
- angoli alla base : $\frac{180° - 165°}{2} = 7.5°$ (ciascuno)

Di conseguenza, le rette di applicazione di R''_A e R''_B sono inclinate di 52.5° rispetto all' orizzontale.

(che devono costituire una coppia a braccio nullo)

$$R''_A = R''_B$$

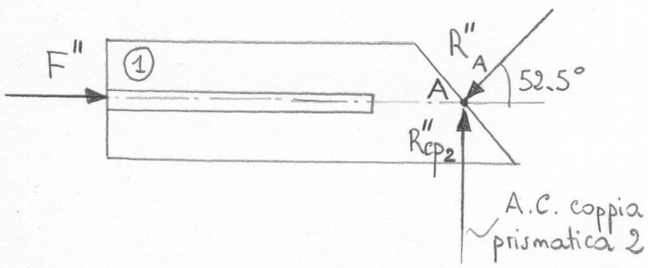
Si passa al corpo 3, in cui Q è nota :



$$\underline{i}) \quad R''_B \cos 52.5° = R''_{cp_1} \longrightarrow R''_{cp_1} \cong 0.767\, Q$$

$$\underline{J}) \quad R''_B \sin 52.5° = Q \longrightarrow R''_B \cong \frac{Q}{0.793} \cong 1.260 \cdot Q = R''_A$$

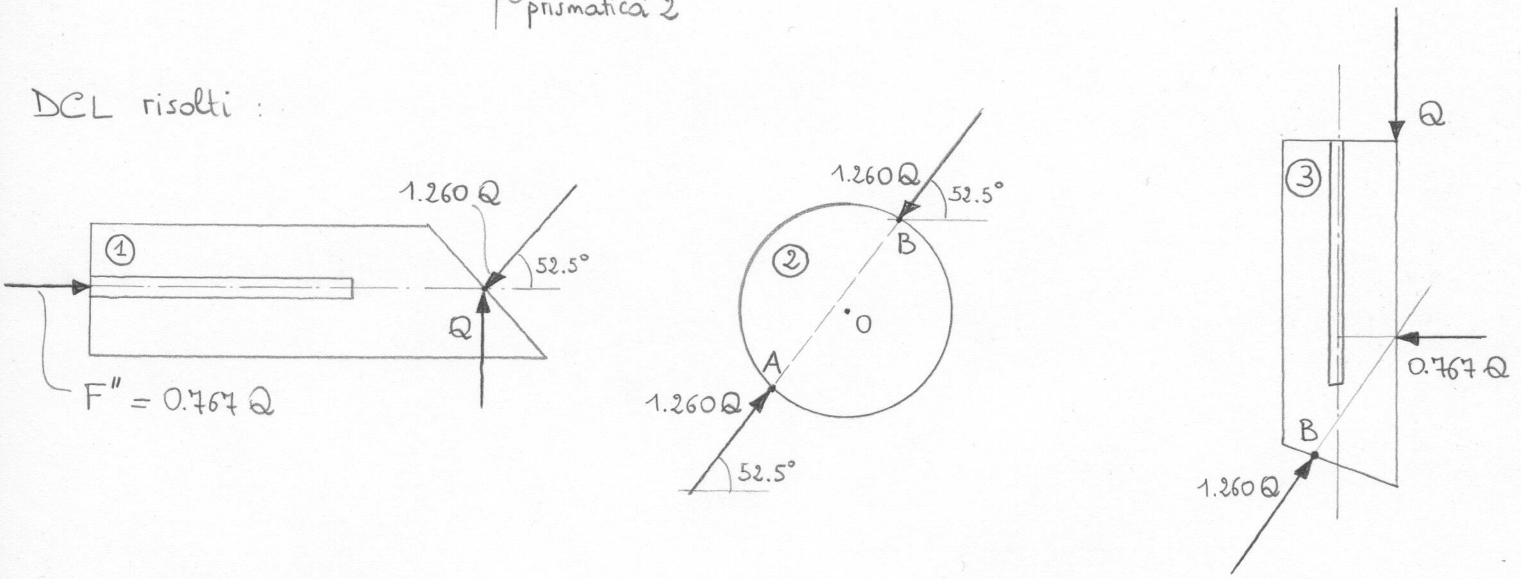
Infine il corpo 1 :



$$\underline{i}) \quad F'' = R''_A \cos 52.5° \cong 0.767\, Q$$

$$\underline{J}) \quad R''_{cp_2} = R''_A \sin 52.5° = Q$$

DCL risolti :



— ESERCIZIO 3 —

Il momento d' inertia del disco rispetto all' asse BARICENTRICO ortogonale al piano del foglio vale :

$$I_G = \frac{1}{2} m r^2$$

Per il teorema di Huygens-Steiner :

$$I_A = I_G + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2$$