UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

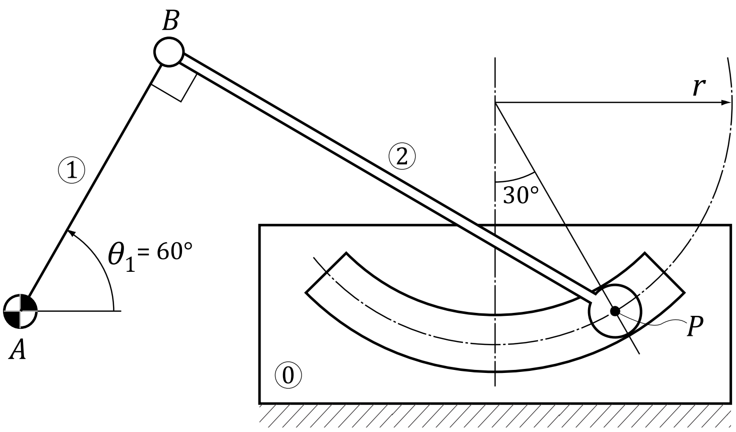
19 Settembre 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

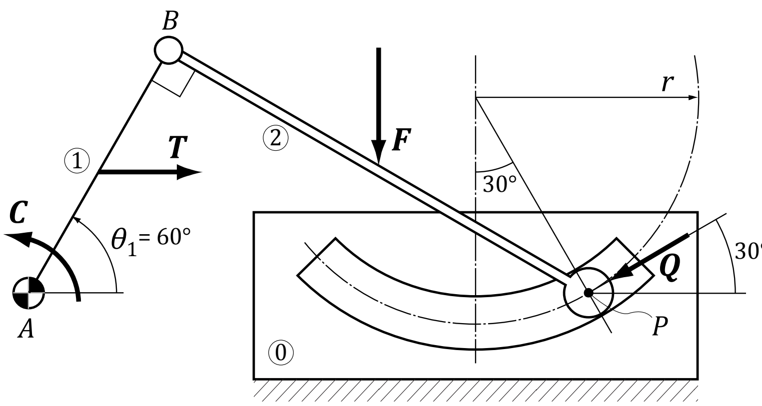
Il meccanismo in figura è costituito da due corpi mobili. L'estremità destra del corpo 2 è un perno cilindrico liscio vincolato a muoversi nell'asola curvilinea ricavata nel corpo 0 fisso. Nella configurazione rappresentata sono noti: i valori della coordinata lagrangiana $\theta_1 = 60°$ e delle sue derivate temporali; la lunghezza $\overline{AB} = d$; il raggio r; inoltre, il punto A è allineato orizzontalmente con il punto P (centro del perno) e l'angolo in B è un angolo retto.



1. Assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$, determinare per via analitica la velocità angolare del corpo 2 e la velocità del punto P del perno in funzione dei dati del problema e, a titolo di conferma, ottenere per via grafica triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
2. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
3. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

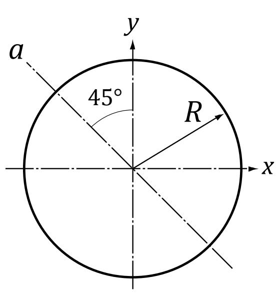
Si analizzino i due schemi di carico (distinti) di seguito descritti.



1. È assegnata la forza verticale ***F***, applicata sul corpo 2 nel punto medio del segmento $\overline{BP}$. Per equilibrare staticamente il meccanismo si deve esercitare sul corpo 1 una coppia incognita ***C***. Determinare la coppia ***C*** e tutte le reazioni vincolari e riportare i DCL risolti.
2. È assegnata la forza orizzontale ***T***, applicata sul corpo 1 nel punto medio del segmento $\overline{AB}$. Per equilibrare staticamente il meccanismo si deve esercitare sul corpo 2 una forza incognita ***Q*** la cui retta di applicazione è mostrata in figura. Determinare la forza ***Q*** e tutte le reazioni vincolari e riportare i DCL risolti.

Esercizio 3

Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse a del disco omogeno di raggio R e massa m rappresentato a lato.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

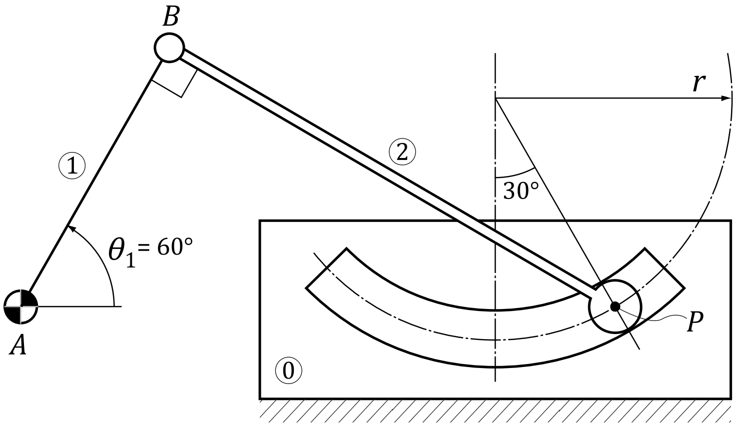
19 Settembre 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

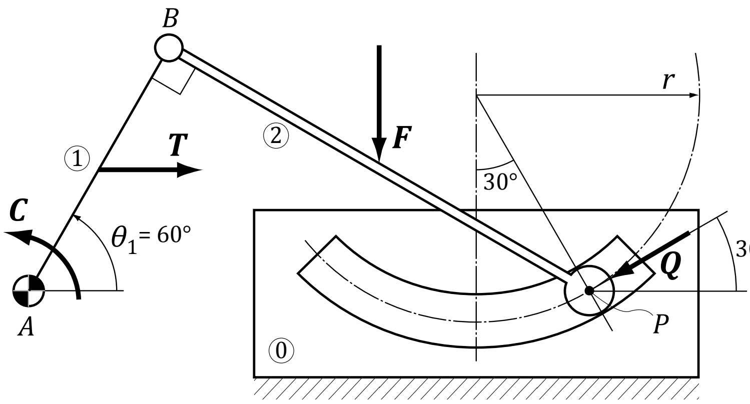
Il meccanismo in figura è costituito da due corpi mobili. L'estremità destra del corpo 2 è un perno cilindrico liscio vincolato a muoversi nell'asola curvilinea ricavata nel corpo 0 fisso. Nella configurazione rappresentata sono noti: i valori della coordinata lagrangiana $\theta_1 = 60°$ e delle sue derivate temporali; la lunghezza $\overline{AB} = d$; il raggio r; inoltre, il punto A è allineato orizzontalmente con il punto P (centro del perno) e l'angolo in B è un angolo retto.



1. Assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$, determinare per via analitica la velocità angolare del corpo 2 e la velocità del punto P del perno in funzione dei dati del problema e, a titolo di conferma, ottenere per via grafica triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
2. Determinare i centri delle velocità assoluti.
3. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si analizzino i due schemi di carico (distinti) di seguito descritti.



1. È assegnata la forza verticale ***F***, applicata sul corpo 2 nel punto medio del segmento $\overline{BP}$. Per equilibrare staticamente il meccanismo si deve esercitare sul corpo 1 una coppia incognita ***C***. Determinare la coppia ***C*** e tutte le reazioni vincolari e riportare i DCL risolti.
2. È assegnata la forza orizzontale ***T***, applicata sul corpo 1 nel punto medio del segmento $\overline{AB}$. Per equilibrare staticamente il meccanismo si deve esercitare sul corpo 2 una forza incognita ***Q*** la cui retta di applicazione è mostrata in figura. Determinare la forza ***Q*** e tutte le reazioni vincolari e riportare i DCL risolti.

— Esercizio 1 —

1) $$\underline{v}_{PE2} = \underline{v}_{BE2} + \dot{\vartheta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BP} = \dot{\vartheta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} + \dot{\vartheta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BP} ,$$

ma è anche:

$$\underline{v}_{PE2} = \dot{s}\,\underline{\lambda} \quad , \quad \text{con } \underline{\lambda} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2} \right)$$

Eq.^{ne} di chiusura velocità:

$$\dot{\vartheta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} + \dot{\vartheta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BP} = \dot{s}\,\underline{\lambda}$$

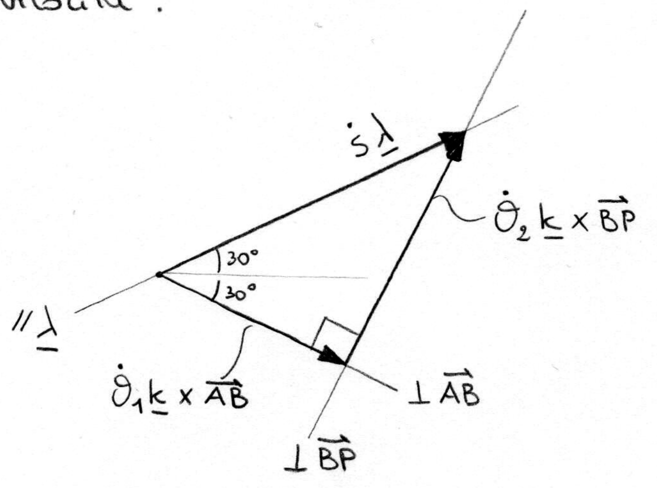
Componenti vettori:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{d}{2} , \frac{d\sqrt{3}}{2} \right) ; \quad \overrightarrow{BP} = \left(\frac{3}{2} d , -\frac{\sqrt{3}}{2} d \right) ; \quad \left(\text{inoltre } \overline{BP} = \sqrt{3}\, d \right)$$

Risolvendo analiticamente l'eq.^{ne} di chiusura:

$$\dot{\vartheta}_2 = -\dot{\vartheta}_1 \quad (>0)$$
$$\dot{s} = -2d\dot{\vartheta}_1 \quad (>0)$$

Triangolo delle velocità:



$\dot{\vartheta}_1 < 0$

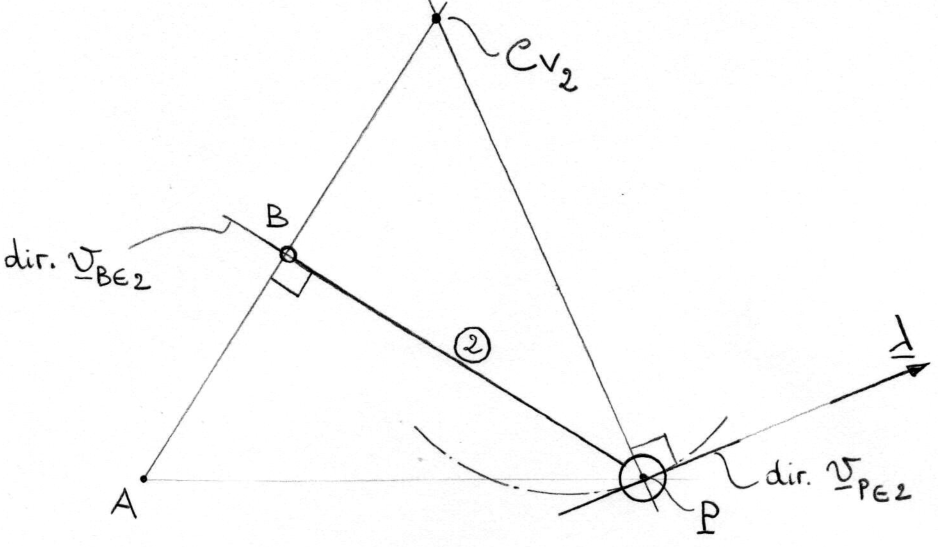
$\downarrow$

$\dot{\vartheta}_2 > 0$

$\dot{s} > 0$ ok.

2) $Cv_1 \equiv A$ (cerniera fissa); $\quad Cv_{12} \equiv B$ (cerniera mobile)

Cv_2 :

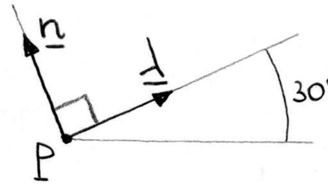


3) $\underline{a}_{PE2} = \underline{a}_{BE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BP} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BP}$, con $\underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{BE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_1^2 \vec{AB}$,

ma vale anche:

$$\underline{a}_{PE2} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \frac{\dot{s}^2}{r}\,\underline{n} \quad ,$$

in cui:

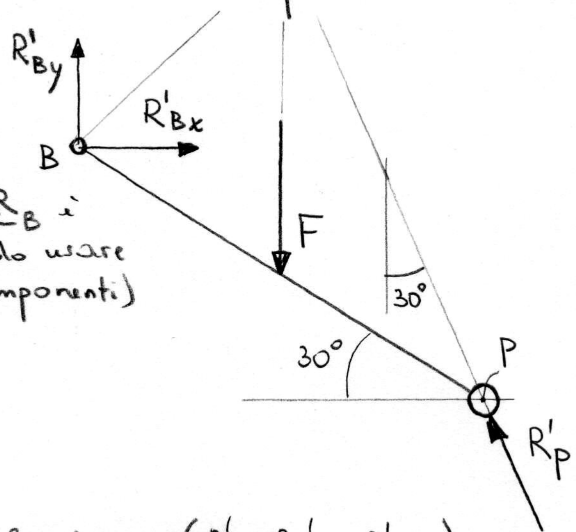


Eq.^{ne} chiusura accelerazioni:

$$\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_1^2 \vec{AB} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{BP} - \dot{\theta}_2^2 \vec{BP} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \frac{\dot{s}^2}{r}\,\underline{n}$$

– Esercizio 2 –

1) Analizziamo il corpo 2 (nessun corpo è scarico):



(per R_B è comodo usare le componenti)

i) $R'_{Bx} = \dfrac{R'_P}{2}$

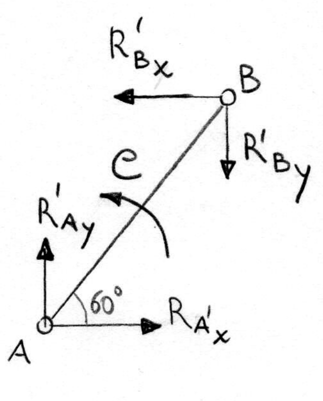
j) $R'_{By} + R'_P \dfrac{\sqrt{3}}{2} = F$

B) $R'_P \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{3}{2}d\right) - \dfrac{R'_P}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}d\right) - F\left(\dfrac{3}{4}d\right) = 0$

Risolvendo in (R'_P, R'_{By}, R'_{Bx}):

$$R'_P = \frac{\sqrt{3}}{2}F \; ; \quad R'_{Bx} = \frac{\sqrt{3}}{4}F \; ; \quad R'_{By} = \frac{1}{4}F$$

Passiamo al corpo 1:



i) $R_{A'x} = R'_{Bx} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}F$

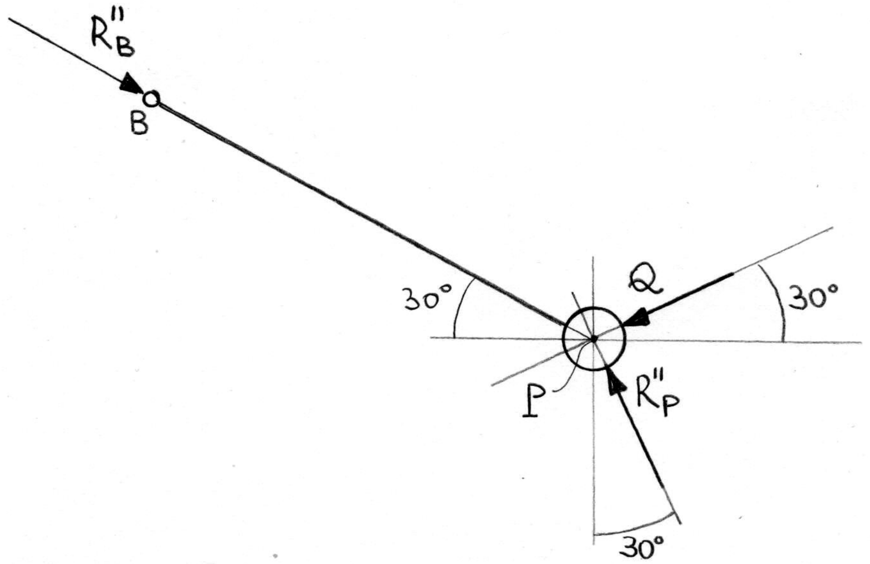
j) $R'_{Ay} = R'_{By} = \dfrac{1}{4}F$

A) $C + R'_{Bx}\, d\dfrac{\sqrt{3}}{2} - R'_{By}\dfrac{d}{2} = 0$,

quindi $C = -F\dfrac{d}{4}$

[ometto i DCL risolti, ottenibili da sopra.]

2) Analizziamo il corpo 2 :



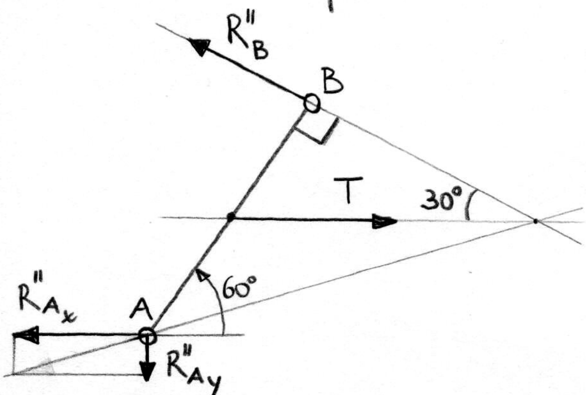
date le rette di applicazione di $\underline{Q}$ ed $\underline{R}''_P$, incidenti in P, anche $\underline{R}''_B$ deve avere RDA passante per P.

Scrivendo la prima cardinale lungo le due direzioni (ortogonali) di $\underline{R}''_P$ e $\underline{Q}$, si ottiene direttamente :

$$Q = \frac{R''_B}{2} \quad ; \quad R''_P = R''_B \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(R''_B sarà determinato dall'equilibrio del corpo 1)

Passando al corpo 1 :



(per $\underline{R}_A$ è più comodo usare le componenti)

$$\underline{i}) \; -R''_{A_x} - R''_B \frac{\sqrt{3}}{2} + T = 0$$

$$\underline{J}) \; -R''_{A_y} + R''_B \frac{1}{2} = 0$$

$$\curvearrowleft A) \; R''_B d - T \frac{d}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Risolvendo in $(R''_B, R''_{A_y}, R''_{A_x})$:

$$R''_B = \frac{\sqrt{3}}{4} T \; ; \; R''_{A_x} = \frac{5}{8} T \; ; \; R''_{A_y} = \frac{\sqrt{3}}{8} T ,$$

e dall'analisi del corpo 2 sopra: $Q = \frac{\sqrt{3}}{8} T$; $R''_P = \frac{3}{8} T$

[ometto i DCL, ottenibili direttamente da sopra.]

– ESERCIZIO 3 –

È ben noto che :

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

e che, trattandosi di un caso piano : $J_x + J_y = J_z$.

Per l'assialsimmetria del disco : $J_x = J_y = J_a$, quindi :

$$2 J_a = J_z \longrightarrow J_a = \frac{J_z}{2} = \frac{1}{4} m R^2$$