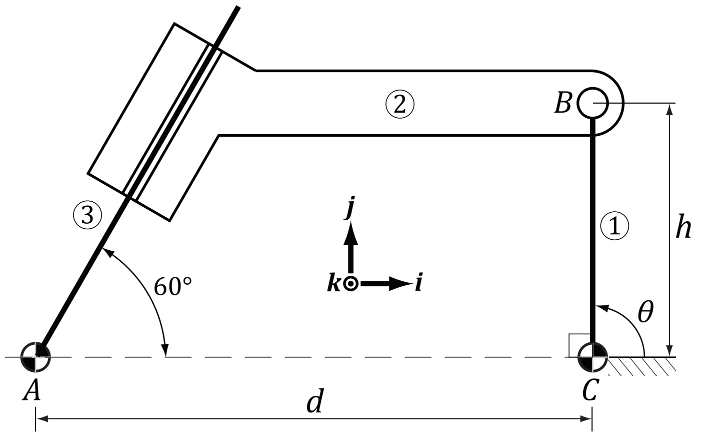
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

18 Febbraio 2014

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – *versione A*
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

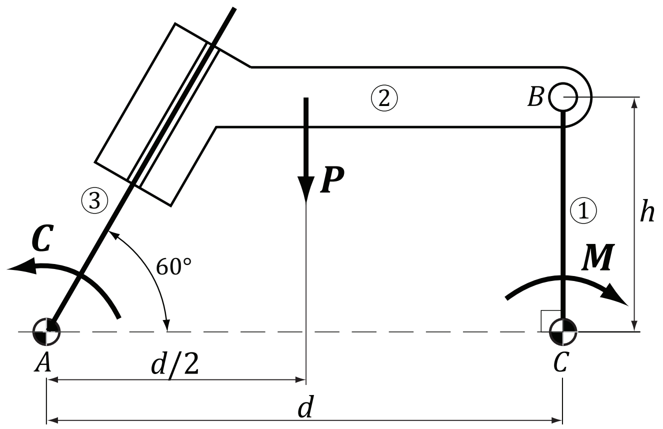
Del meccanismo in figura, nell'atto di moto rappresentato, sono assegnate le quantità geometriche indicate, $\dot{\theta} > 0$ e $\ddot{\theta}$.



1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità e risolverla per via *grafica* (triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) indicati).
3. Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

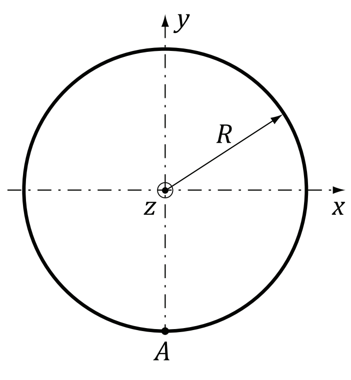
Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la coppia $\boldsymbol{M}$, assegnata (corpo 1), e la forza peso del corpo 2, $\boldsymbol{P}$, anch'essa assegnata.
L'equilibrio statico del sistema è affidato all'azione di una coppia $\boldsymbol{C}$, incognita, agente sul corpo 3.



1. Determinare $\boldsymbol{C}$ e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia $\boldsymbol{M}$.
2. Determinare $\boldsymbol{C}$ e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{P}$.
3. Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero ***risolti in funzione dei dati del problema***.

Esercizio 3

Del cerchio in figura, avente densità superficiale ρ e raggio R assegnati, determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto A e parallelo all'asse baricentrico z.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

18 Febbraio 2014

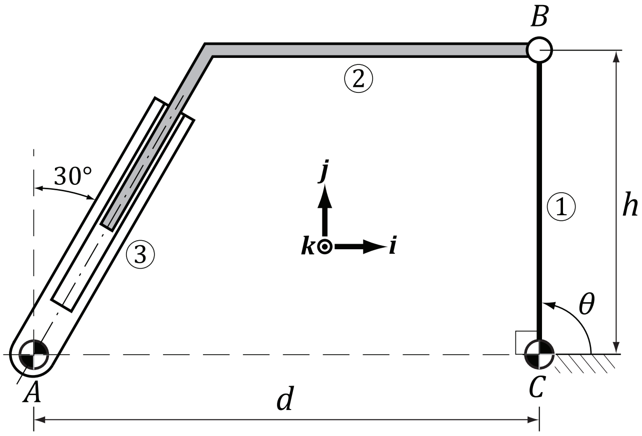
ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – *versione B*

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nell'atto di moto rappresentato, sono assegnate le quantità geometriche indicate, $\dot{\theta} > 0$ e $\ddot{\theta}$.

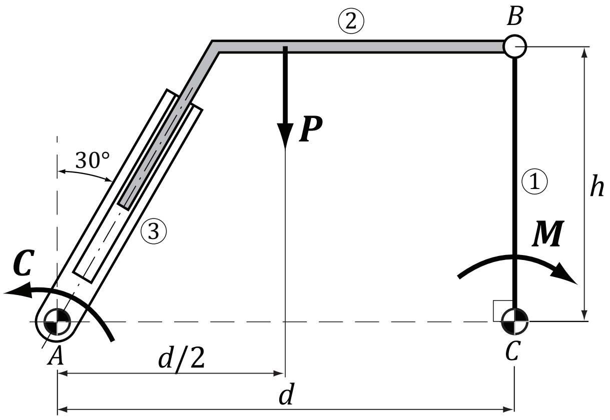
1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità e risolverla per via *grafica* (triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati).
3. Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.



Esercizio 2

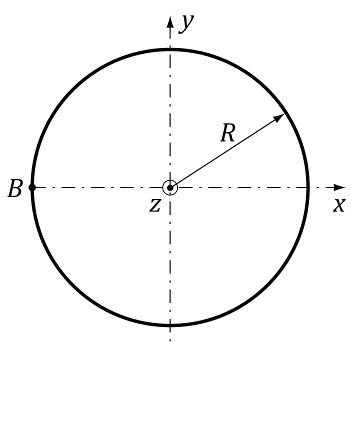
Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la coppia ***M***, assegnata (corpo 1), e la forza peso del corpo 2, ***P***, anch'essa assegnata.
L'equilibrio statico del sistema è affidato all'azione di una coppia ***C***, incognita, agente sul corpo 3.

1. Determinare ***C*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia ***M***.
2. Determinare ***C*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.
3. Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero ***risolti in funzione dei dati del problema***.



Esercizio 3

Del cerchio in figura, avente densità superficiale ρ e raggio R assegnati, determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il punto B e parallelo all'asse baricentrico z.



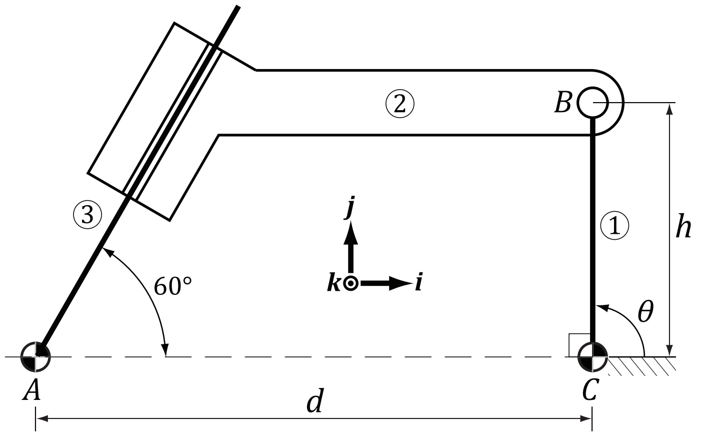
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

18 Febbraio 2014

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

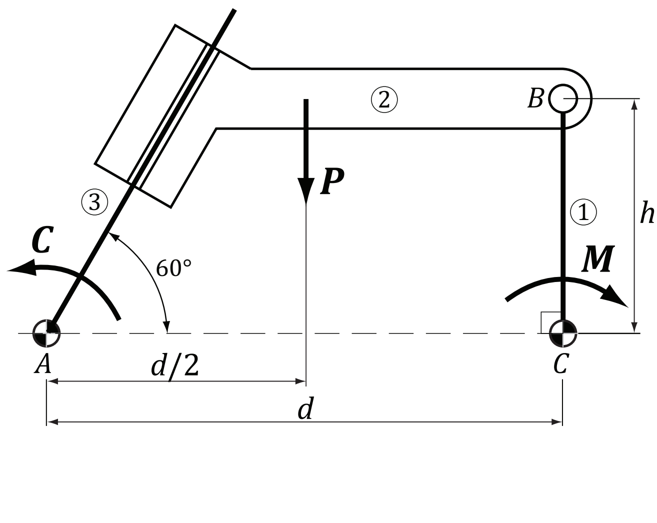
Del meccanismo in figura, nell'atto di moto rappresentato, sono assegnate le quantità geometriche indicate, $\dot{\theta} > 0$ e $\ddot{\theta}$.



1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità e risolverla per via *grafica* (triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati).
3. Individuare tutti i centri delle velocità (assoluti).
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Sul meccanismo dell'esercizio precedente agiscono la coppia ***M***, assegnata (corpo 1), e la forza peso del corpo 2, ***P***, anch'essa assegnata.
L'equilibrio statico del sistema è affidato all'azione di una coppia ***C***, incognita, agente sul corpo 3.



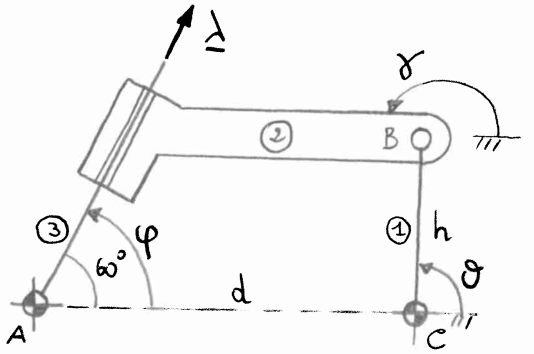
1. Determinare ***C*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia ***M***.
2. Determinare ***C*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.
3. Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero ***risolti in funzione dei dati del problema***.

· Soluzione I Parte ·

Le versioni A e B hanno la medesima soluzione. Risolvo la versione A.

— Esercizio 1 —

1)



$$\underline{v}_{PE1} = \dot{\theta}\underline{k} \times \vec{CP}$$

$$\Sigma③ : \underline{v}_{QE2} = \underline{v}^{(r)}_{QE2} + \underline{v}^{(tr)}_{QE2} = \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{\varphi}\underline{k} \times \vec{AQ}$$

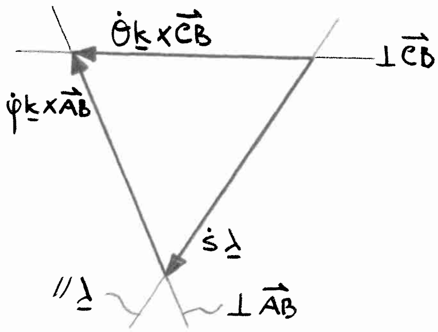
$$\underline{v}_{RE3} = \dot{\varphi}\underline{k} \times \vec{AR} \qquad \underline{\lambda} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

2) Per l'eq.^ne di chiusura sfruttiamo il punto notevole B :

$$\underline{v}_{BE1} = \underline{v}_{BE2}$$

$$\boxed{\dot{\theta}\underline{k} \times \vec{CB} = \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{\varphi}\underline{k} \times \vec{AB}}$$ (incognite: $\dot{s}$ e $\dot{\varphi} = \dot{\gamma}$)

Triangolo delle velocità :



$\dot{\theta} > 0$ (antioraria)

$\dot{s} < 0$ (verso il basso)

$\dot{\varphi} \, (= \dot{\gamma}) > 0$ (antioraria)

Soluzione analitica :

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = \dot{s} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ d & h & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{i}\left(-\dot{\theta}h\right) = \underline{i}\,\frac{\dot{s}}{2} + \underline{j}\,\dot{s}\frac{\sqrt{3}}{2} + \underline{i}\left(-\dot{\varphi}h\right) + \underline{j}\left(\dot{\varphi}d\right)$$

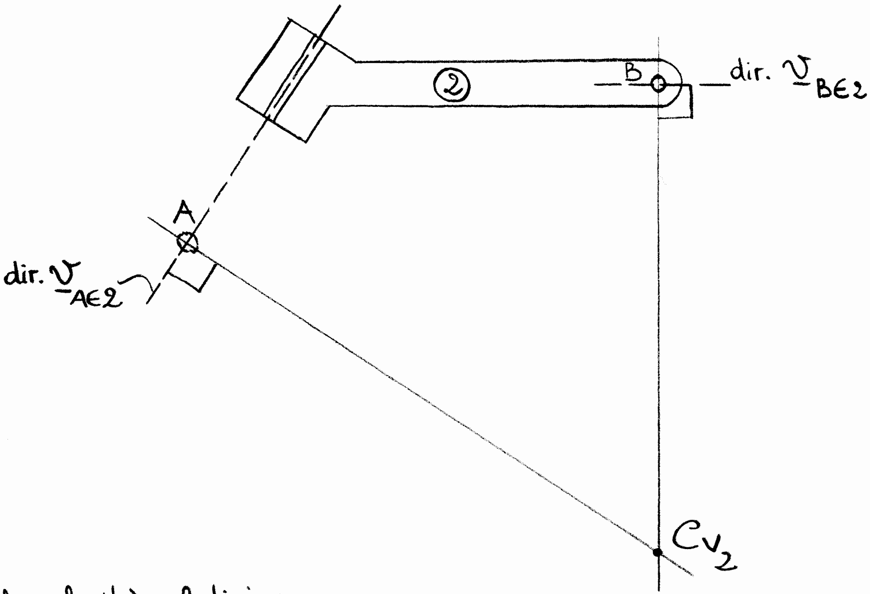
$$\begin{cases} -\dot{\theta}h = \dot{s}/2 - \dot{\varphi}h \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{s} + \dot{\varphi}d \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{s} = -\dfrac{2dh}{d+\sqrt{3}h}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi} = \dot{\gamma} = \dfrac{\sqrt{3}h}{d+\sqrt{3}h}\dot{\theta} \end{cases}$$

(segni concordi con quelli ottenuti dal triangolo delle velocità)

3) • Centri delle velocità assoluti :

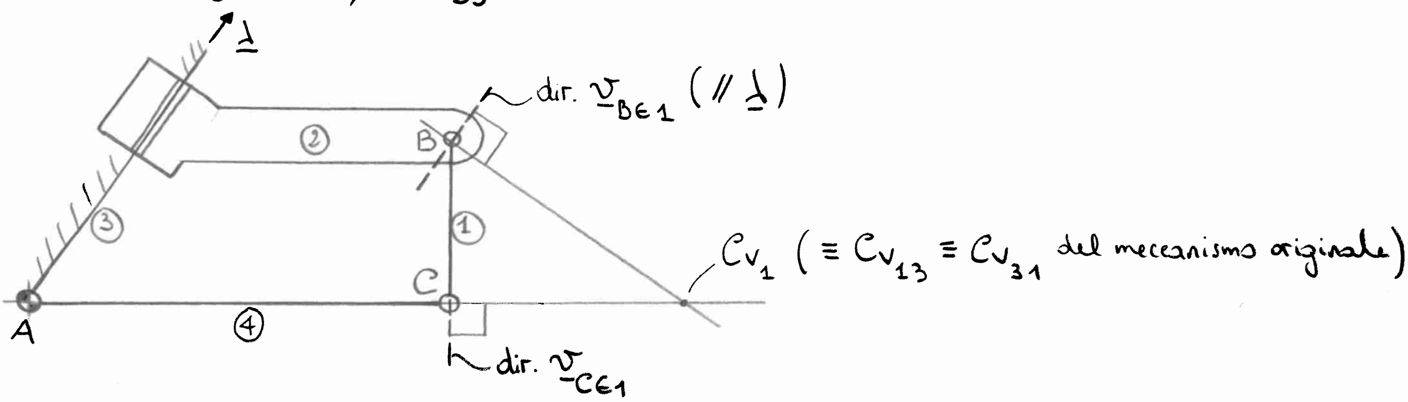
$C_{V_1} \equiv C$, $C_{V_3} \equiv A$, C_{V_2} prossima pagina

C_{v_2} :



- Centri delle velocità relativi :

$C_{v_2} \equiv B$, $C_{v_{23}}$ non esiste , $C_{v_{13}}$ coincide col C_{v_1} del seguente meccanismo:



4) Ripercorrendo i ragionamenti fatti per il pb. delle velocità :

$$\underline{a}_{BE1} = \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{CB}$$

$$\Sigma③ : \underline{a}_{BE2} = \underline{a}^{(r)}_{BE2} + \underline{a}^{(tr)}_{BE2} + \underline{a}^{(co)}_{BE2} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \ddot{\varphi}\,\underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\dot{\varphi}\,\underline{k} \times \dot{s}\,\underline{\lambda}$$

Pertanto :

$$\underline{a}_{BE1} = \underline{a}_{BE2}$$

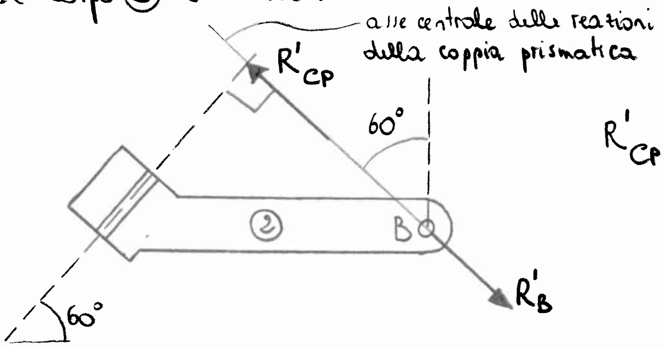
$$\boxed{\ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{CB} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \ddot{\varphi}\,\underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\varphi}^2\,\overrightarrow{AB} + 2\dot{\varphi}\,\underline{k} \times \dot{s}\,\underline{\lambda}}$$

(incognite : $\ddot{s}$ e $\ddot{\varphi} = \ddot{\gamma}$)

– Esercizio 2 –

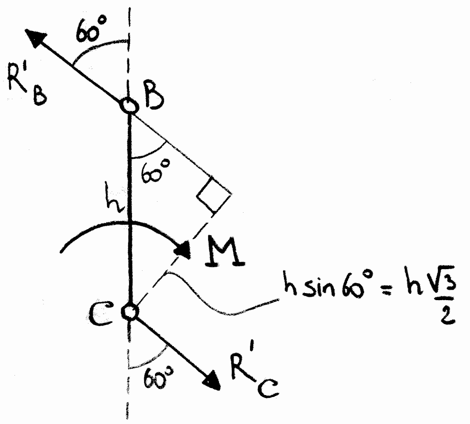
1) $\boxed{\text{Agisce } M}$

Il corpo ② è scarico:



$$R'_{CP} = R'_B$$

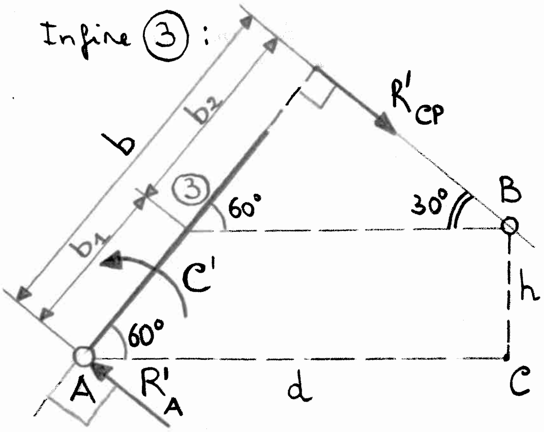
Passiamo al corpo ①, in cui M è noto:



$$\circlearrowleft C) \quad M = R'_B\, h \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow R'_B = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{M}{h} = R'_{CP}$$

$$R'_C = R'_B = \frac{2M}{\sqrt{3}\,h}$$

Infine ③:



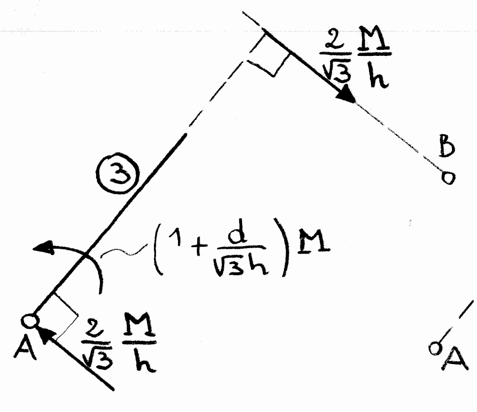
$$R'_{CP} = R'_A = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{M}{h}$$

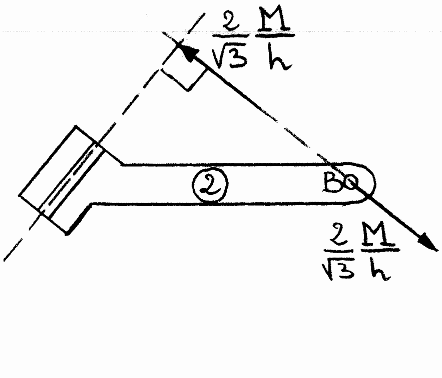
$$\circlearrowleft A) \quad C' = R'_{CP}\, b \quad , \text{ dove:}$$

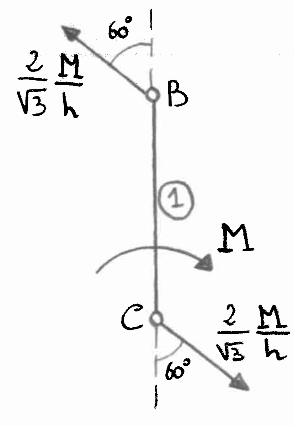
$$b = b_1 + b_2 = \frac{h}{\sin 60°} + \left(d - \frac{h}{\operatorname{tg} 60°}\right)\sin 30° = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{3}\,h\right)$$

Pertanto:
$$C' = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{M}{h}\cdot\frac{1}{2}\left(d+\sqrt{3}\,h\right) = \left(1 + \frac{d}{\sqrt{3}\,h}\right)M$$

Diagrammi di corpo libero risolti:

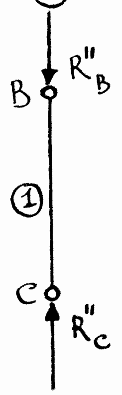






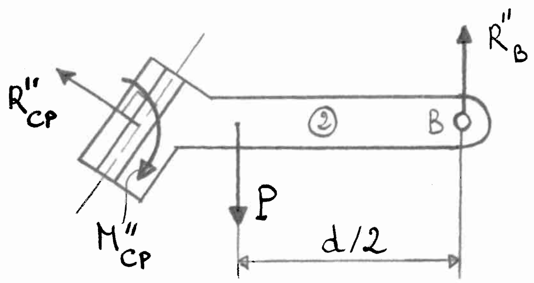
2) $\boxed{\text{Agisce } P}$

Il corpo (1) è scarico :



$$R''_B = R''_C$$

Passiamo al corpo (2), dove P è nota :

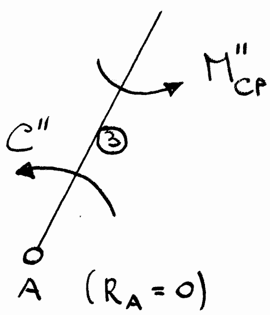


i) $R''_{CP} \cos 30^\circ = 0 \longrightarrow R''_{CP} = 0$ (la coppia prism. non ammette asse centrale)

I) $R''_B = P = R''_C$

$\overset{\curvearrowleft}{B}$) $P \dfrac{d}{2} = M''_{CP}$

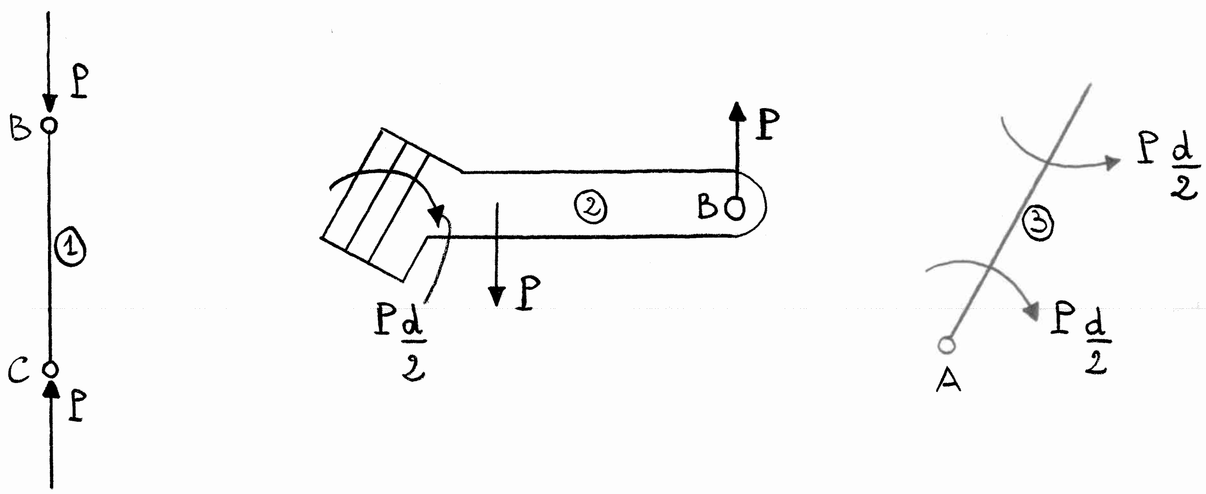
Infine il corpo (3) :



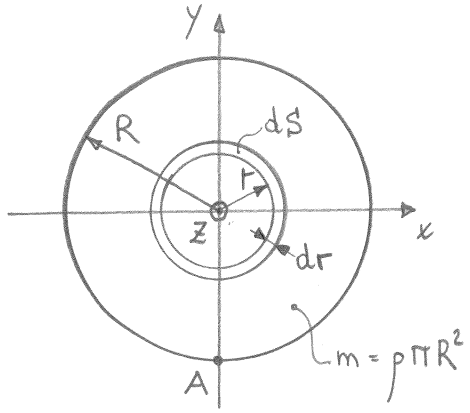
$$C'' + M''_{CP} = 0$$

$$C'' = -M''_{CP} = -P\frac{d}{2}$$

<u>Diagrammi di corpo libero risolti</u> :



– ESERCIZIO 3 –



Calcolo del momento d'inerzia attorno all'asse baricentrico z :

$$\boxed{J_z} = \int_m d_z^2 \, dm = \int_S d_z^2 \rho \, dS = \rho \int_0^R r^2 \, 2\pi r \, dr$$

$$= 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \frac{R^4}{4} = \rho\pi \frac{R^4}{2} = \boxed{\frac{1}{2} m R^2}$$

Sfruttando il teorema di Huygens-Steiner :

$$\boxed{J_A = J_z + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2}$$

momento d'inerzia attorno all'asse passante per A e parallelo all'asse z