UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

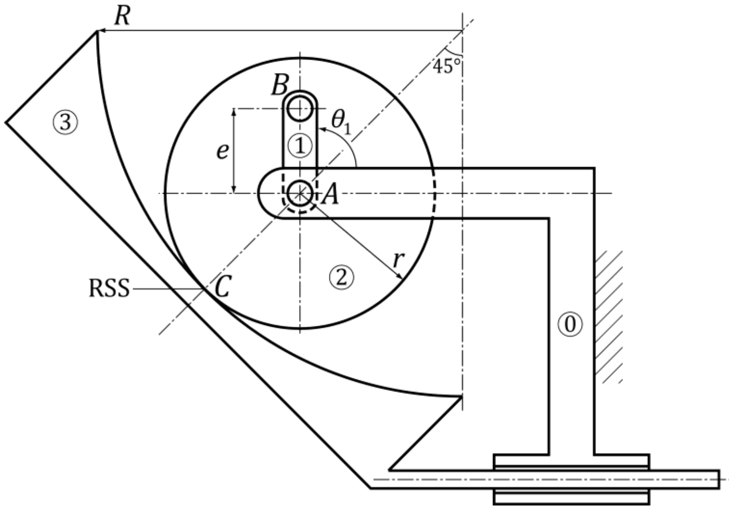
15 Gennaio 2018

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – <u>Versione A</u>

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

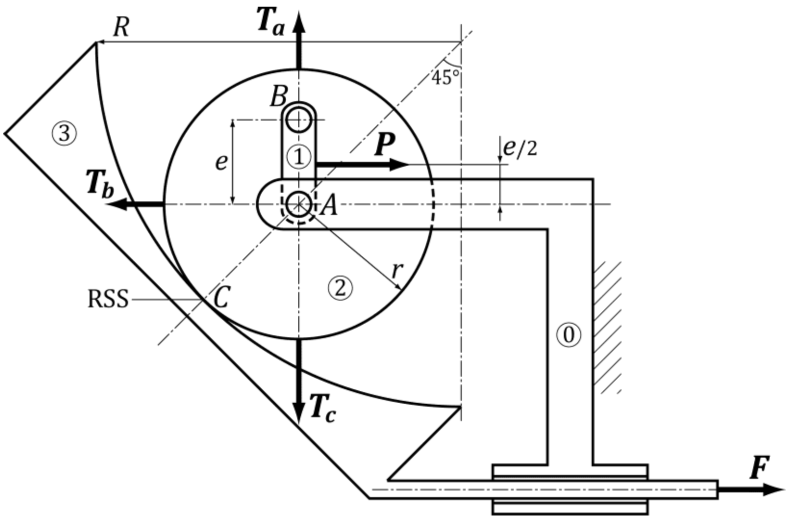
Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate velocità angolare $\dot{\theta}_1 < 0$ e accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ (corpo 1) e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 0 è bloccato. La cerniera A collega i corpi 0 e 1, mentre la cerniera B collega 1 con 2.



1. **Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità.**
2. **Determinare i centri delle velocità assoluti** e quelli relativi.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 1 agisce la forza $\boldsymbol{P}$, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agiscono le forze $\boldsymbol{T_a}$, $\boldsymbol{T_b}$ e $\boldsymbol{T_c}$, anch'esse assegnate. Per equilibrare staticamente il sistema deve essere applicata, nei due casi, una forza $\boldsymbol{F}$ sul corpo 3 secondo la retta di applicazione assegnata (in figura).



1. **Ottenere la forza $\boldsymbol{F'}$ quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{P}$ e determinare tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.**
2. Assumendo $T_a = T$, $T_b = T$ e $T_c = 2T$, ottenere il loro sistema equivalente minimo e determinare la forza $\boldsymbol{F''}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.
3. In corrispondenza del punto C, sede di rotolamento senza strisciamento tra i corpi 2 e 3, l'equilibrio è affidabile ad un semplice vincolo di contatto monolaterale con attrito nei due casi precedenti? se sì, quali sono i valori minimi del coefficiente di attrito statico richiesti?

Per i punti **1** e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

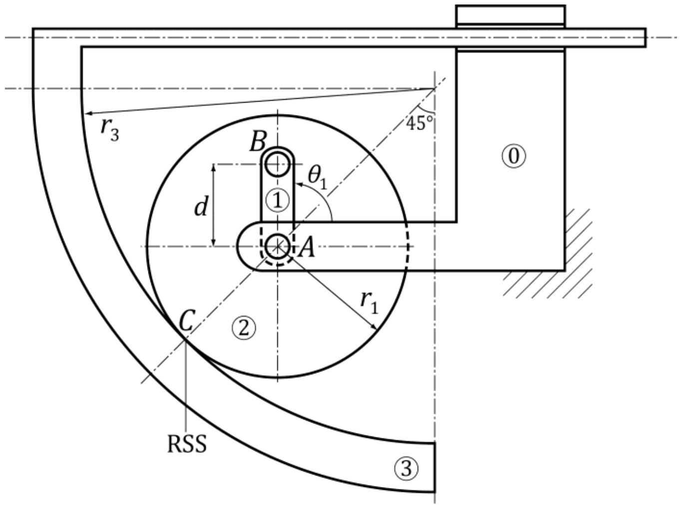
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

15 Gennaio 2018

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

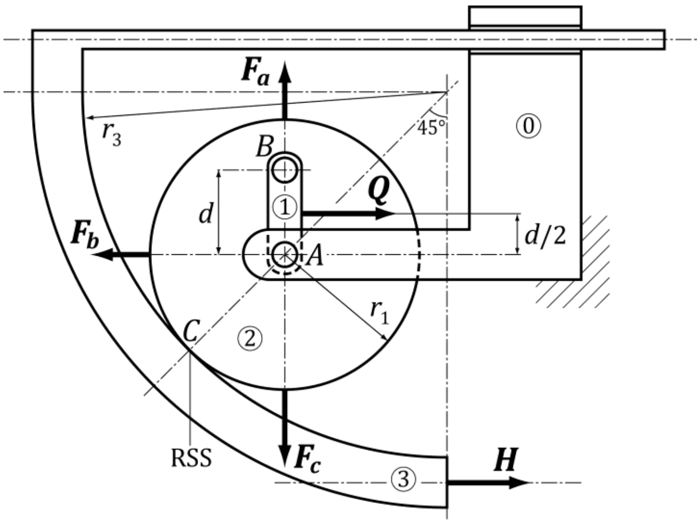
Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate velocità angolare $\dot{\theta}_1 < 0$ e accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ (corpo 1) e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 0 è bloccato. La cerniera A collega i corpi 0 e 1, mentre la cerniera B collega 1 con 2.



1. **Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità.**
2. **Determinare i centri delle velocità assoluti** e quelli relativi.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 1 agisce la forza $\boldsymbol{Q}$, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agiscono le forze $\boldsymbol{F_a}$, $\boldsymbol{F_b}$ e $\boldsymbol{F_c}$, anch'esse assegnate. Per equilibrare staticamente il sistema deve essere applicata, nei due casi, una forza $\boldsymbol{H}$ sul corpo 3 secondo la retta di applicazione assegnata (in figura).



1. **Ottenere la forza $\boldsymbol{H'}$ quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{Q}$ e determinare tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.**
2. Assumendo $F_a = F$, $F_b = F$ e $F_c = 2F$, ottenere il loro sistema equivalente minimo e determinare la forza $\boldsymbol{H''}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.
3. In corrispondenza del punto C, sede di rotolamento senza strisciamento tra i corpi 2 e 3, l'equilibrio è affidabile ad un semplice vincolo di contatto monolaterale con attrito nei due casi precedenti? se sì, quali sono i valori minimi del coefficiente di attrito statico richiesti?

Per i punti **1** e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

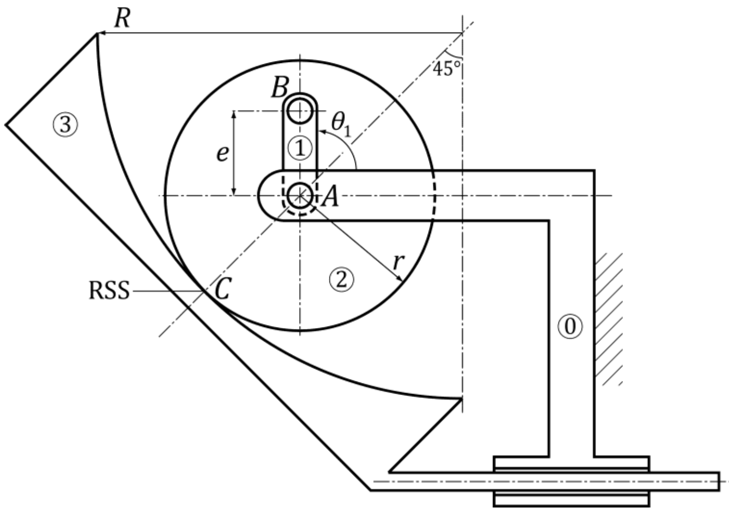
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

15 Gennaio 2018

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

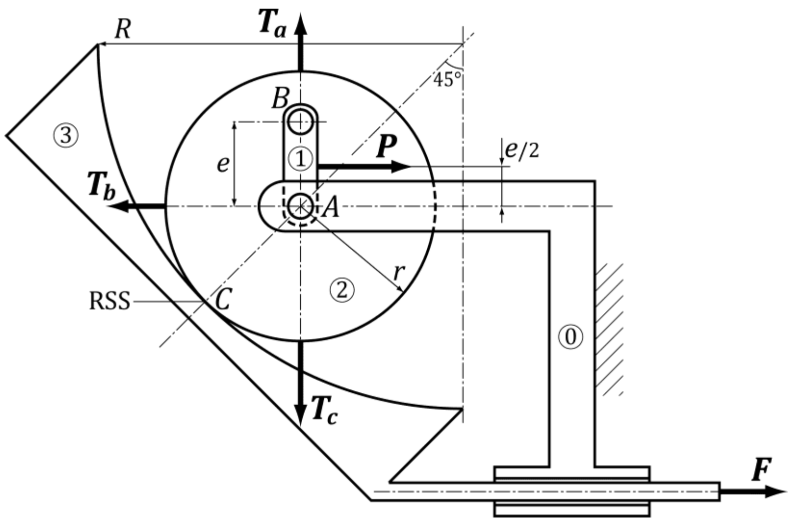
Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate velocità angolare $\dot{\theta}_1 < 0$ e accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ (corpo 1) e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 0 è bloccato. La cerniera A collega i corpi 0 e 1, mentre la cerniera B collega 1 con 2.



1. Ottenere l'equazione di chiusura per le velocità.
2. Determinare i centri delle velocità assoluti.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite in funzione dei dati del problema e confermare la correttezza dei loro segni mediante soluzione grafica (triangolo delle velocità).
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 1 agisce la forza $\boldsymbol{P}$, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agiscono le forze $\boldsymbol{T_a}$, $\boldsymbol{T_b}$ e $\boldsymbol{T_c}$, anch'esse assegnate. Per equilibrare staticamente il sistema deve essere applicata, nei due casi, una forza $\boldsymbol{F}$ sul corpo 3 secondo la retta di applicazione assegnata (in figura).



1. Ottenere la forza $\boldsymbol{F'}$ quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{P}$ e determinare tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.
2. Assumendo $T_a = T$, $T_b = T$ e $T_c = 2T$, ottenere il loro sistema equivalente minimo e determinare la forza $\boldsymbol{F''}$ e tutte le forze/coppie reattive. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi.

— SOLUZIONE VERSIONE A (sol.^{ne} vers. B analoga) —

— ESERCIZIO 1 —

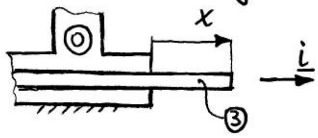
1) $\underline{v}_{B\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} = \underline{v}_{B\in 2}$

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{C\in 2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}$$

$\underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_{C\in 3}$ (per RSS in C)

Oss. • $\theta_2 > 0$ antioraria

• x coordinata assoluta presa nel modo seguente:



Pertanto:

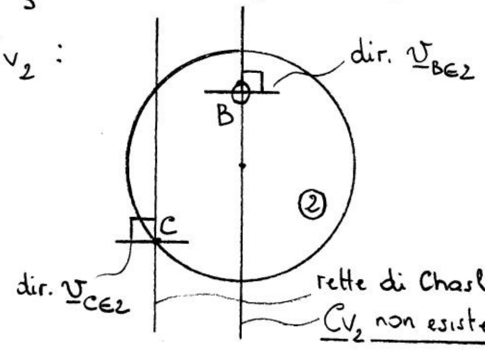
$$\boxed{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\dot{x}$, $\dot{\theta}_2$)

2) • $C_{V_1} \equiv A$ (cerniera fissa)

• C_{V_3} non esiste (moto di 3 traslatorio)

• C_{V_2}:

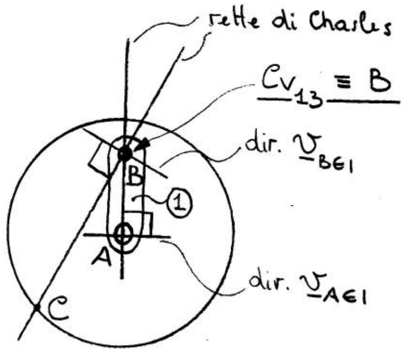


rette di Charles parallele e distinte: C_{V_2} non esiste ($\dot{\theta}_2 = 0$)

• $C_{V_{12}} \equiv B$ (cerniera mobile)

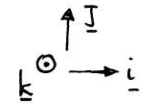
• $C_{V_{23}} \equiv C$ (RSS nel moto relativo)

• $C_{V_{13}}$: bloccando il corpo 3 (e sbloccando 0):



3) $\overrightarrow{AB} \equiv (0, e, 0)$

$\overrightarrow{CB} \equiv \left(r\frac{\sqrt{2}}{2},\ r\frac{\sqrt{2}}{2} + e,\ 0\right)$



Svolgendo i prodotti vettoriali nell'eq.^{ne} di chiusura (punto 1):

$$(-e\dot{\theta}_1)\,\underline{i} = \dot{x}\,\underline{i} - \left(r\frac{\sqrt{2}}{2} + e\right)\dot{\theta}_2\underline{i} + \left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}_2\right)\underline{j}$$

da cui:

$$\begin{cases} -e\dot{\theta}_1 = \dot{x} - \left(r\frac{\sqrt{2}}{2} + e\right)\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = -e\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 = 0 \end{array}} \quad \text{con } \dot{\theta}_1 < 0,\ \dot{x} > 0$$

come previsto al punto 2)

Il triangolo delle velocità è degenere:

$$\longrightarrow \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} \equiv \dot{x}\,\underline{i} \qquad (\dot{\theta}_1 < 0) \quad \dot{x} > 0 \quad ✓$$

(se $\dot{\theta}_2$ fosse $\neq 0$ non potremmo avere soluzione)

4) $\underline{a}_{B\in 1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} = \underline{a}_{B\in 2}$

$\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_{C\in 2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB} = \underline{a}_{C\in 2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}$ (poiché $\dot{\theta}_2 = 0$)

Si tenga presente che $\underline{a}_{C\in 2} \neq \underline{a}_{C\in 3}$. Mettendosi solidali a ③ possiamo scrivere:

$\Sigma③ : \ \underline{a}_{C\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{C\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{C\in 2} + \underline{a}^{(co)}_{C\in 2}$

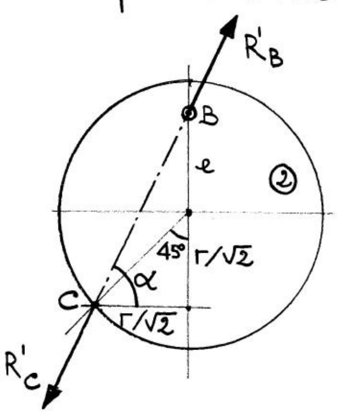
$= -D\dot{\theta}_2^2 \underline{n} + \ddot{x}\underline{i} + \underline{0}$, con $\underline{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $D = -\frac{Rr}{R-r}$

Ma $\dot{\theta}_2 = 0 \longrightarrow \underline{a}_{C\in 2} = \ddot{x}\underline{i}$, e quindi uguagliando le due espressioni ottenute per $\underline{a}_{B\in 2}$ si ottiene l'eq.ne di chiusura:

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}}$$ eq.ne di chiusura (incognite: $\ddot{x}, \ddot{\theta}_2$)

- ESERCIZIO 2 -

1) Il corpo 2 è scarico:

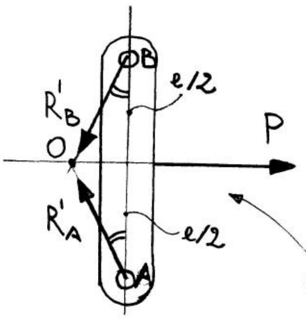


$R'_B = R'_C$

Ricaviamo subito anche l'angolo α, che sarà comodo in seguito:

- $\alpha = \arctan\left(\frac{e + r/\sqrt{2}}{r/\sqrt{2}}\right)$

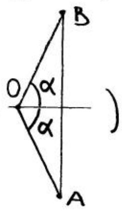
Passiamo al corpo 1, in cui P è nota:



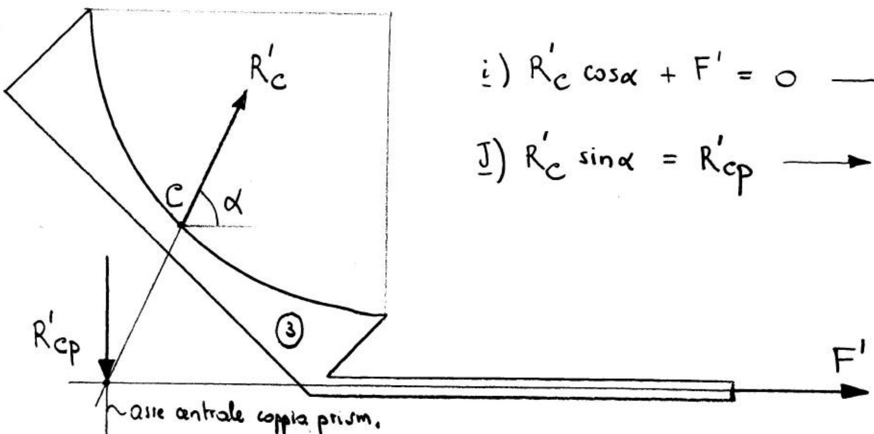
$\underline{i})\ R'_B \cos\alpha + R'_A \cos\alpha = P$

$\underline{j})\ R'_B \sin\alpha = R'_A \sin\alpha$

$\longrightarrow R'_A = R'_B = \frac{P}{2\cos\alpha} = R'_C$

(triangolo $A\hat{O}B$ isoscele: )

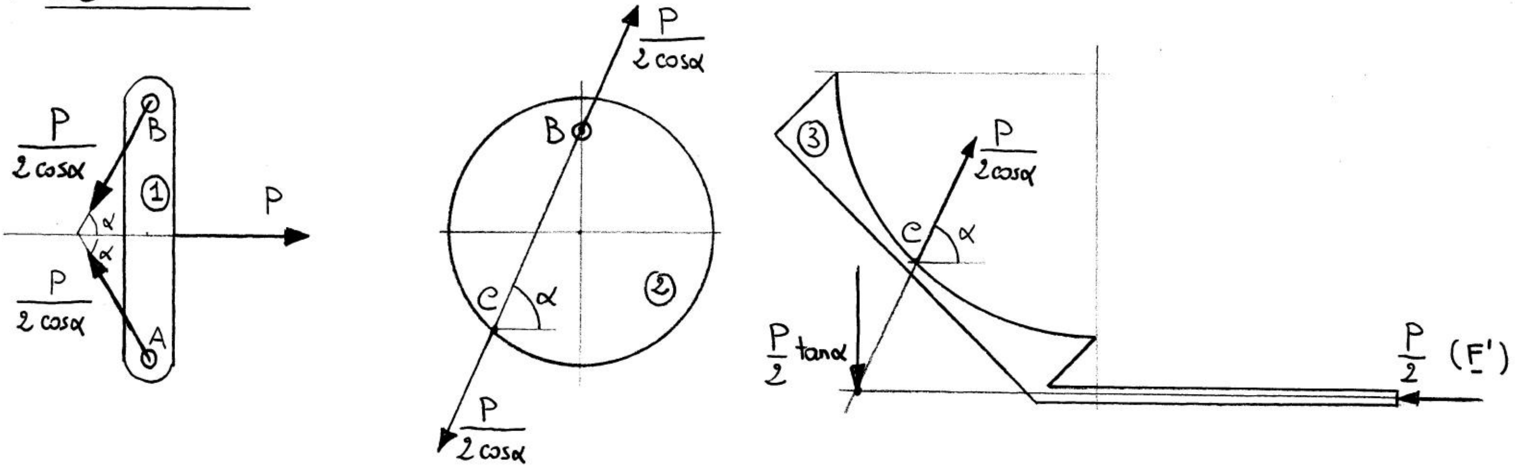
Infine il corpo 3:



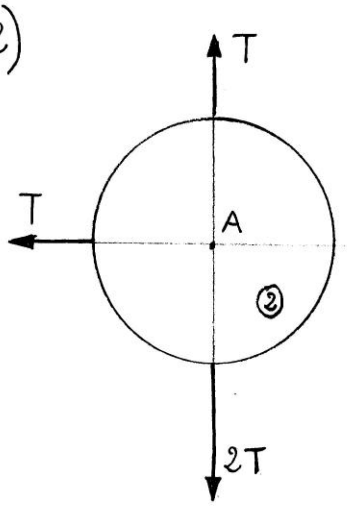
$\underline{i})\ R'_C \cos\alpha + F' = 0 \longrightarrow F' = -\frac{P}{2}$

$\underline{j})\ R'_C \sin\alpha = R'_{cp} \longrightarrow R'_{cp} = \frac{P}{2}\tan\alpha$

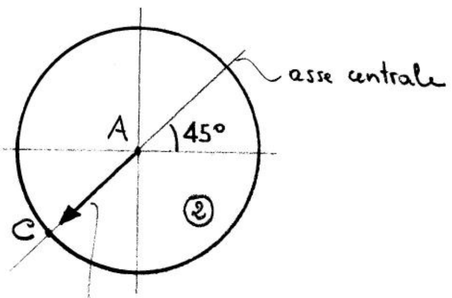
DCL risolti :



2)

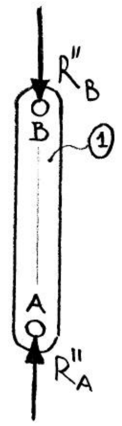


Il momento risultante rispetto ad A è nullo : A è un punto dell'asse centrale del sistema ($\underline{T}_a, \underline{T}_b, \underline{T}_c$). Poiché $\tau = 0$, il sist. equivalente minimo è costituito dalla risultante applicata in un punto dell'asse centrale :



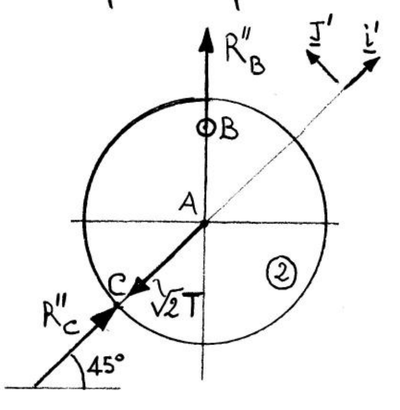
$\underline{R} = \underline{T}_a + \underline{T}_b + \underline{T}_c$, con $R = \sqrt{2}\,T$

Iniziamo l'analisi dal corpo 1, scarico :



$R''_A = R''_B$

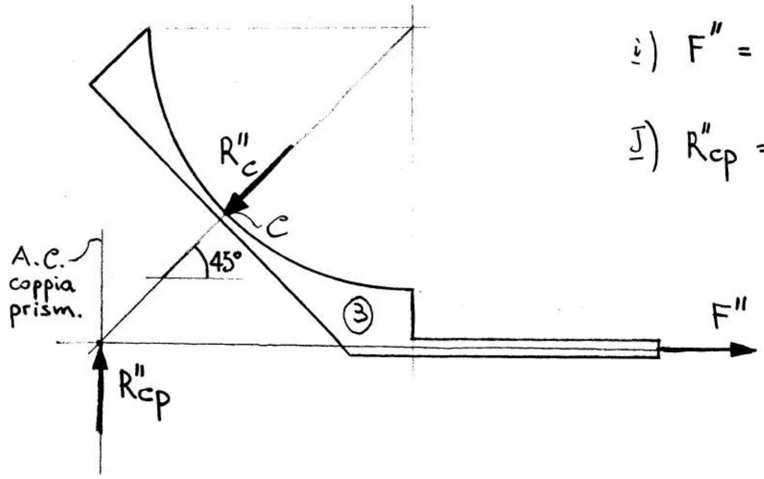
Passiamo poi al corpo 2 :



$\underline{J}'$) $R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow R''_B = 0 = R''_A$

$\underline{i}'$) $R''_C = \sqrt{2}\,T$

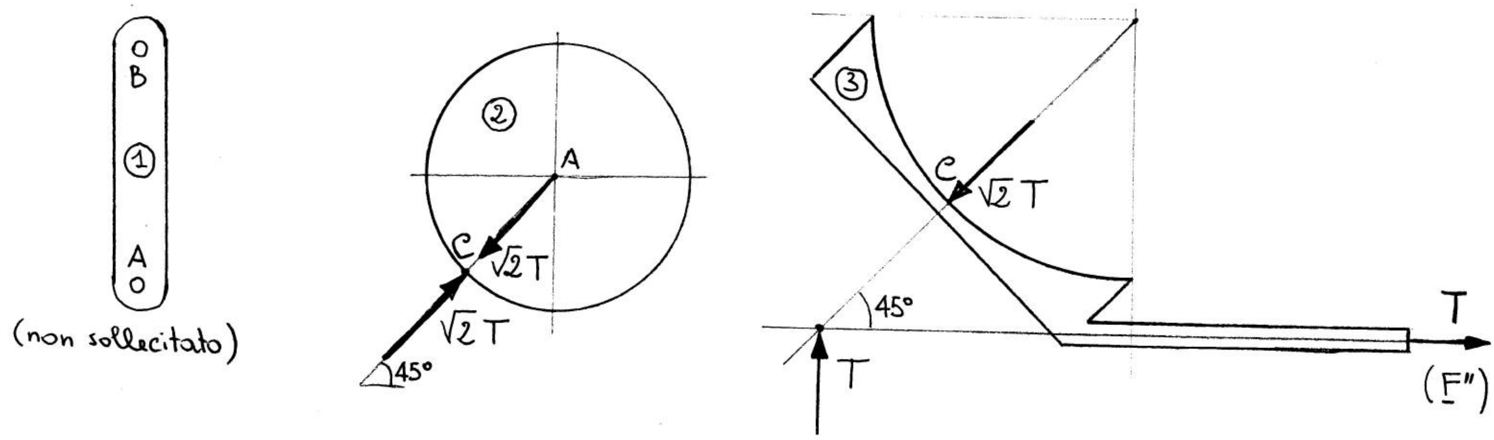
Infine il corpo 3 :



$$\underline{i}) \quad F'' = R''_C \frac{\sqrt{2}}{2} = T$$

$$\underline{J}) \quad R''_{cp} = R''_C \frac{\sqrt{2}}{2} = T$$

<u>DCL risolti</u> :



3) Nel primo caso l'equilibrio statico non può essere affidato al semplice contatto con attrito perché la reazione $\underline{R}'_C$ non è di supporto per il disco 2 bensì di "trazione" (servirebbe "colla" tra 2 e 3 affinché un tale genere di reazione di contatto si possa instaurare).

Nel secondo caso la reazione $\underline{R}''_C$ è di effettivo supporto per il disco 2, ed essendo nulla la sua componente tangenziale è anche nullo il coeff. d'attrito minimo richiesto.