UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

14 settembre 2017

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

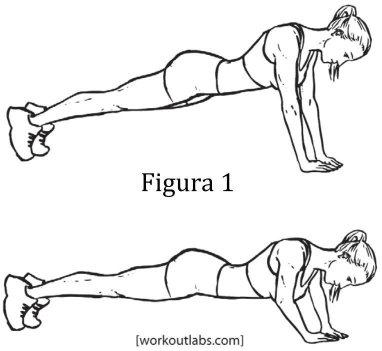


Figura 1

La Figura 1 mostra schematicamente l'esecuzione di piegamenti sulle braccia secondo una configurazione utile per il potenziamento dei muscoli tricipiti (*close-grip push-ups*). Un semplice modello del corpo dell'atleta è mostrato in Fig. 2 (si è assunto che tronco, gambe e piedi siano assimilabili ad un unico corpo rigido, corpo 3, durante l'esecuzione dell'esercizio): nella configurazione rappresentata, oltre ai parametri geometrici indicati sono assegnate la velocità angolare $\dot{\theta}_1$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ del corpo 1 (avambracci).

1) Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità angolari dei corpi 2 e 3 in funzione dei dati del problema.
2) Assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$ e con le proporzioni in Fig. 2, verificare la correttezza dei segni delle velocità angolari ottenute al punto 1 mediante il triangolo delle velocità.
3) Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4) Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

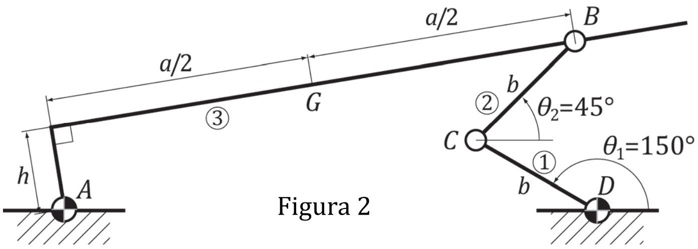


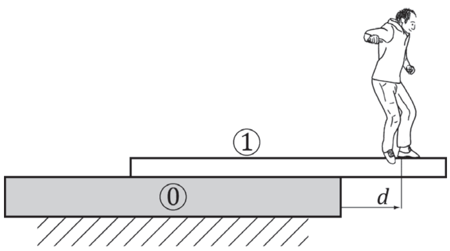
Figura 2

Esercizio 2

La contrazione dei tricipiti può essere modellata considerando la cerniera mobile C nel modello in Fig. 2 (articolazione del gomito) come *attiva* (o *attuata*), ovvero è presente una coppia interna $\boldsymbol{M}$ (oltre alla "tipica" reazione vincolare). Assumendo note la massa m dell'atleta e la posizione del suo baricentro G (Fig. 2) e supponendo trascurabili le masse dei corpi 1 e 2 rispetto alla massa del corpo 3:

1) determinare la coppia interna $\boldsymbol{M}$ e tutte le forze/coppie reattive in funzione dei parametri del problema, indicando chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi.
2) valutare numericamente le quantità determinate al punto precedente assumendo a=1.5 m, b=45 cm, h=30 cm, m=68 kg, e tracciare i diagrammi di corpo libero risolti dei tre corpi.

Esercizio 3



Nella figura a lato, una trave uniforme (corpo 1) lunga 6 m e con massa M = 102 kg è semplicemente appoggiata sul corpo 0 (fisso) con uno sbalzo di 2 m. La persona che sta camminando sulla zona a sbalzo della trave ha massa m = 82 kg.

Determinare il valore della distanza massima $d_{\max}$ percorribile oltre la quale si verifica il ribaltamento della trave.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

14 settembre 2017

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

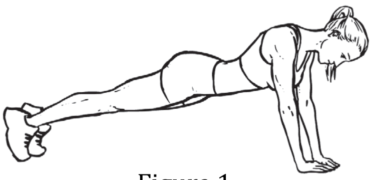
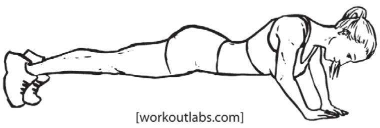


Figura 1



La Figura 1 mostra schematicamente l'esecuzione di piegamenti sulle braccia secondo una configurazione utile per il potenziamento dei muscoli tricipiti (*close-grip push-ups*). Un semplice modello del corpo dell'atleta è mostrato in Fig. 2 (si è assunto che tronco, gambe e piedi siano assimilabili ad un unico corpo rigido, corpo 3, durante l'esecuzione dell'esercizio): nella configurazione rappresentata, oltre ai parametri geometrici indicati sono assegnate la velocità angolare $\dot{\theta}_1$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_1$ del corpo 1 (avambracci).

1) Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità angolari dei corpi 2 e 3 in funzione dei dati del problema.
2) Assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$ e con le proporzioni in Fig. 2, verificare la correttezza dei segni delle velocità angolari ottenute al punto 1 mediante il triangolo delle velocità.
3) Individuare tutti i centri delle velocità assoluti.
4) Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

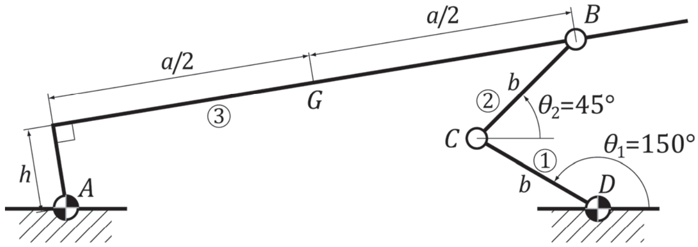


Figura 2

Esercizio 2

La contrazione dei tricipiti può essere modellata considerando la cerniera mobile C nel modello in Fig. 2 (articolazione del gomito) come *attiva* (o *attuata*), ovvero è presente una coppia interna $\boldsymbol{M}$ (oltre alla "tipica" reazione vincolare). Assumendo note la massa m dell'atleta e la posizione del suo baricentro G (Fig. 2) e supponendo trascurabili le masse dei corpi 1 e 2 rispetto alla massa del corpo 3:

1) determinare la coppia interna $\boldsymbol{M}$ e tutte le forze/coppie reattive in funzione dei parametri del problema, indicando chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi.
2) valutare numericamente le quantità determinate al punto precedente assumendo a=1.5 m, b=45 cm, h=30 cm, m=68 kg, e tracciare i diagrammi di corpo libero risolti dei tre corpi.

— ESERCIZIO 1 —

1)

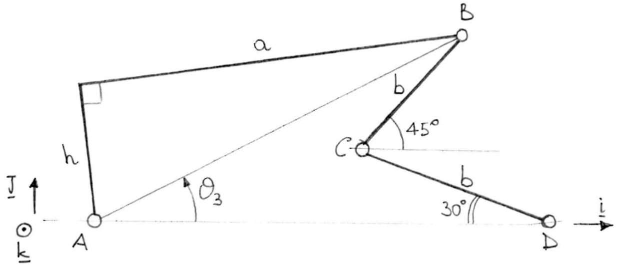
$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 3}$$

$$\underline{v}_{C\in 2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} \quad , \quad \text{con } \underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_{C\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{DC}$$

Pertanto, l'eq.ne di chiusura è

$$\underline{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{DC} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}} \qquad (\dot{\theta}_2 \text{ e } \dot{\theta}_3 \text{ incognite})$$

Per sviluppare i calcoli servono le componenti dei tre vettori $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$.



- $\overrightarrow{DC} = \left(-b\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$
- $\overrightarrow{CB} = \left(b\frac{\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
- $\overrightarrow{AB} = \left(AB_x, AB_y, 0\right)$: componenti entrambe positive, da determinare

Per determinare le comp. AB_x e AB_y in funzione dei dati del problema, con riferim. alla figura sopra si può procedere in questo modo:

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2+h^2} \quad ; \quad AB_y = \overline{AB}\sin\theta_3 = \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{2}\left(1+\sqrt{2}\right) \longrightarrow \sin\theta_3 = \frac{(1+\sqrt{2})}{2}\frac{b}{\overline{AB}}$$

L'angolo θ_3 in figura è dato dunque da : $\theta_3 = \arcsin\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}\frac{b}{\overline{AB}}\right)$

A questo punto :

$$\overrightarrow{AB} = \left(AB_x, AB_y, 0\right) = \left(\overline{AB}\cos\theta_3, \overline{AB}\sin\theta_3, 0\right)$$

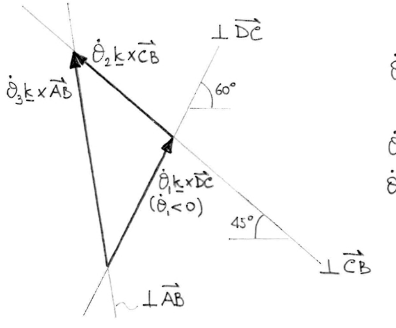
ha le componenti note in f.ne dei dati del pb.

Si continua con la sol.ne analitica dell'eq.ne di chiusura.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -\frac{b\sqrt{3}}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ \frac{b\sqrt{2}}{2} & \frac{b\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{AB_x + \sqrt{3}AB_y}{\sqrt{2}(AB_y - AB_x)}\dot{\theta}_1 \\ \bullet\ \dot{\theta}_3 = \dfrac{(1+\sqrt{3})b}{2(AB_y - AB_x)}\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

Osservando le espressioni di $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$, e tenendo presente che $AB_x > 0$, $AB_y > 0$ e $(AB_y - AB_x) < 0$, si può affermare che $\dot{\theta}_1 < 0 \longrightarrow (\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) > 0$. Confermiamo tali segni col triangolo delle velocità.

2)



$\dot{\theta}_1 < 0$

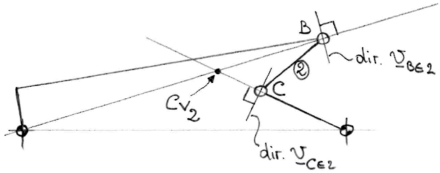
$\downarrow$

$\dot{\theta}_2 > 0$

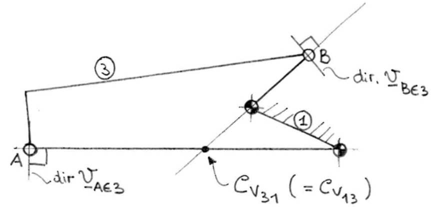
$\dot{\theta}_3 > 0$ Ok. (Braccia e tronco ruotano in senso antiorario a fronte di una rotazione oraria degli avambracci)

3) $Cv_1 \equiv D$ (cerniera fissa)
$Cv_3 \equiv A$ (" ")
$Cv_{12} \equiv C$ (" mobile)
$Cv_{23} \equiv B$ (" ")

• Cv_2 :



• Cv_{31} :



4) Si scrive l'eq.^{ne} di chiusura procedendo in maniera del tutto analoga a quanto fatto nel problema delle velocità, e usando il teorema di Rivals:

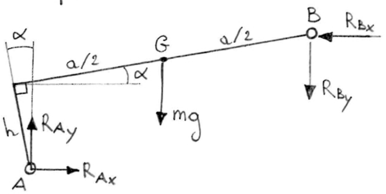
$$\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_{B\in 3}$$

$$\underline{\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{DC} - \dot{\theta}_1^2 \vec{DC} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{CB} - \dot{\theta}_2^2 \vec{CB} = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_3^2 \vec{AB}} \quad (\ddot{\theta}_2 \text{ e } \ddot{\theta}_3 \text{ incognite})$$

— ESERCIZIO 2 —

1) Non esistono corpi scarichi, né sottosistemi isostatici. Si può quindi iniziare l'analisi da uno qualunque dei tre corpi.

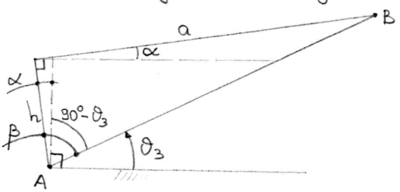
• Corpo 3 :



$$R_{Ax} = R_{Bx}$$
$$R_{Ay} = R_{By} + mg$$
$$\circlearrowleft B)\; R_{Ax}\, AB_y - R_{Ay}\, AB_x + mg\,\frac{a}{2}\cos\alpha = 0$$

v. es. 1   da determinare

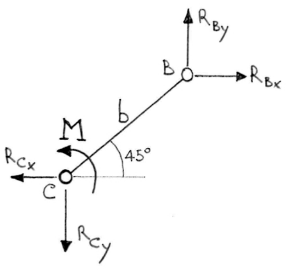
Per determinare l'angolo α basta ragionare come segue:



$$\beta = \arctan\left(\frac{a}{h}\right)$$
$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \theta_3 \longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{a}{h}\right) - \frac{\pi}{2} + \theta_3$$

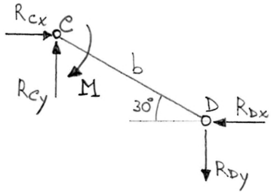
determinato in es. 1

• Corpo 2 :



$$R_{Bx} = R_{Cx}$$
$$R_{By} = R_{Cy}$$
$$\circlearrowleft C)\; M - R_{Bx}\, b\frac{\sqrt{2}}{2} + R_{By}\, b\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

• Corpo 1 :



$$R_{Cx} = R_{Dx}$$
$$R_{Cy} = R_{Dy}$$
$$\circlearrowleft C)\; -M - R_{Dx}\frac{b}{2} - R_{Dy}\frac{b\sqrt{3}}{2} = 0$$

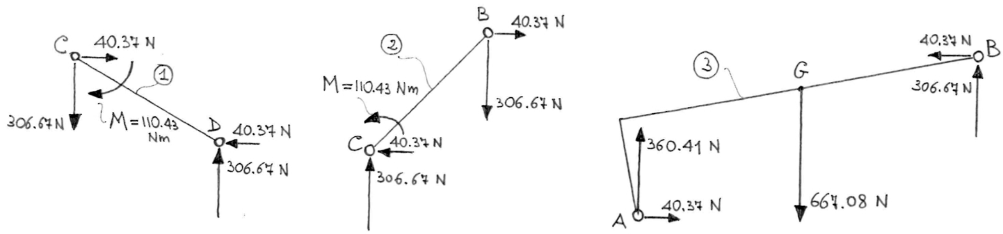
Si è ottenuto complessivamente un sistema di 9 eq.^{ni} in 9 incognite, ma considerando le semplici uguaglianze $R_{Ax} = R_{Bx} = R_{Cx} = R_{Dx}$ e $R_{By} = R_{Cy} = R_{Dy}$ il tutto si riduce a 4 eq.^{ni} in 4 incognite, la cui soluzione è la seguente :

- $R_{Ax} = R_{Bx} = R_{Cx} = R_{Dx} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2AB_x - a\cos\alpha)mg}{2\left((1+\sqrt{2})AB_x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})AB_y\right)}$
- $R_{By} = R_{Cy} = R_{Dy} = -\dfrac{(1+\sqrt{2})(2AB_x - a\cos\alpha)mg}{2\left((1+\sqrt{2})AB_x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})AB_y\right)}$
- $R_{Ay} = R_{By} + mg$
- $M = \dfrac{(1+\sqrt{3})(2AB_x - a\cos\alpha)mgb}{2\sqrt{2}\left((1+\sqrt{2})AB_x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})AB_y\right)}$

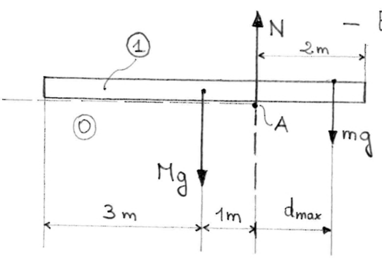
2) Con i valori numerici a disposizione si ottengono le seguenti quantità :
$AB_x = 1.430$ m , $AB_y = 0.5432$ m , $\alpha = 9.49°$, da cui :

- $R_{Ax} = R_{Bx} = R_{Cx} = R_{Dx} = 40.37$ N
- $R_{By} = R_{Cy} = R_{Dy} = -306.67$ N (negativa ⟶ cambiare di verso nei DCL finali)
- $R_{Ay} = 360.41$ N
- $M = 110.43$ Nm

D.C.L. risolti :



– ESERCIZIO 3 –



Quando il ribaltamento è incipiente, la reazione verticale di contatto (forza N) che 0 applica sulla trave 1 ha retta di applicaz. passante per il punto A in figura. Facendo l'equilibrio alla rotazione attorno a tale polo :

$$\circlearrowleft A)\; Mg\,(1\,m) = mg\, d_{max}$$

Pertanto :

$$d_{max} = \frac{M}{m} = 1.2439 \text{ m}$$