

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE A
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

La Figura 1 mostra una protesi attiva (*C-Leg*, Ottobock) sviluppata per soggetti con amputazioni transfemorali e dotata di una sofisticata strategia di controllo dell'attuatore idraulico. Il meccanismo su cui si basa è schematizzato in Fig. 2, nella configurazione da analizzare. Il corpo 0, sede delle due cerniere *A* e *B* e destinato ad accogliere saldamente l'invaso femorale, è fisso in questo studio (la coscia è immobilizzata). Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{AB} = 25 \text{ mm}$, $\overline{AC} = 120 \text{ mm}$, $\theta_1 = 7^\circ$, $\dot{\theta}_1 = 0.7 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta}_1$.



Figura 1

1. Ottenere numericamente velocità angolare dell'attuatore idraulico (cilindro 2 + pistone 3) e velocità relativa di scorrimento tra cilindro e pistone.
2. Verificare la correttezza dei segni delle velocità ottenute al punto precedente mediante triangolo delle velocità.
3. Determinare i centri delle velocità di tutti i corpi, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Sul corpo 1 agiscono la sua forza peso, applicata in G_1 (si assuma che 1 sia l'unico corpo con massa non trascurabile) e la reazione N esercitata dal suolo sul piede protesico: sono entrambe note. L'equilibrio statico della gamba è affidato all'azione dell'attuatore idraulico.

1. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera *A* quando agisce soltanto la forza peso del corpo 1.
2. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera *A* quando agisce soltanto la reazione N .
3. Risolvere e riportare i diagrammi di corpo libero sovrapponendo gli effetti e assumendo $m_1 = 3.5 \text{ kg}$ e $|N| = 700 \text{ N}$.
4. Come alternativa all'applicazione del PSE si potrebbe anche risolvere rapidamente il problema dopo aver ridotto forza peso e reazione del suolo al loro sistema equivalente minimo: determinare tale sistema.

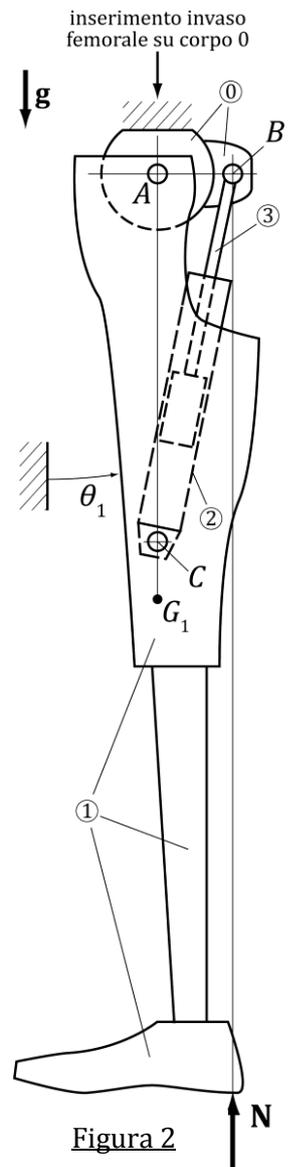
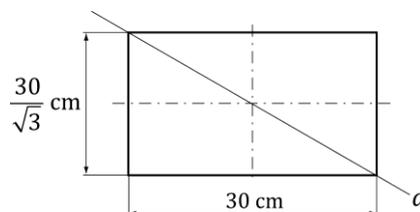


Figura 2

Esercizio 3

Si determini il momento d'inerzia rispetto all'asse diagonale a del rettangolo omogeneo in figura, avente densità $\rho = 0.004 \text{ kg/cm}^2$.



ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE B

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



Figura 1

La Figura 1 mostra una protesi attiva (*Genium*, Ottobock) sviluppata per soggetti con amputazioni transfemorali e dotata di una sofisticata strategia di controllo dell'attuatore idraulico. Il meccanismo su cui si basa è schematizzato in Fig. 2, nella configurazione da analizzare. Il corpo 0, sede delle due cerniere A e B e destinato ad accogliere saldamente l'invaso femorale, è fisso in questo studio (la coscia è immobilizzata). Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{AB} = 30 \text{ mm}$, $\overline{AC} = 125 \text{ mm}$, $\theta_1 = 5^\circ$, $\dot{\theta}_1 = -0.9 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta}_1$.

1. Ottenere numericamente velocità angolare dell'attuatore idraulico (cilindro 2 + pistone 3) e velocità relativa di scorrimento tra cilindro e pistone.
2. Verificare la correttezza dei segni delle velocità ottenute al punto precedente mediante triangolo delle velocità.
3. Determinare i centri delle velocità di tutti i corpi, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

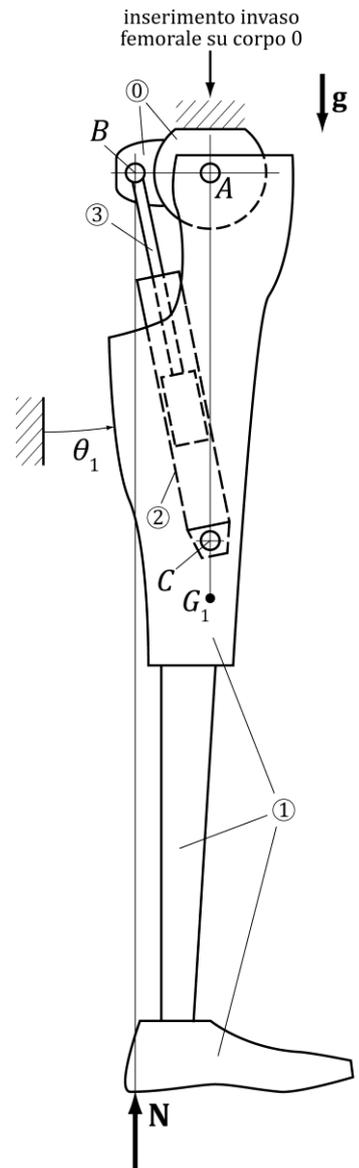


Figura 2

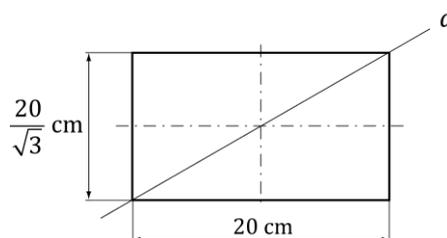
Esercizio 2

Sul corpo 1 agiscono la sua forza peso, applicata in G_1 (si assumo che 1 sia l'unico corpo con massa non trascurabile) e la reazione \mathbf{N} esercitata dal suolo sul piede protesico: sono entrambe note. L'equilibrio statico della gamba è affidato all'azione dell'attuatore idraulico.

1. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera A quando agisce soltanto la forza peso del corpo 1.
2. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera A quando agisce soltanto la reazione \mathbf{N} .
3. Risolvere e riportare i diagrammi di corpo libero sovrapponendo gli effetti e assumendo $m_1 = 4.0 \text{ kg}$ e $|\mathbf{N}| = 800 \text{ N}$.
4. Come alternativa all'applicazione del PSE si potrebbe anche risolvere rapidamente il problema dopo aver ridotto forza peso e reazione del suolo al loro sistema equivalente minimo: determinare tale sistema.

Esercizio 3

Si determini il momento d'inerzia rispetto all'asse diagonale a del rettangolo omogeneo in figura, avente densità $\rho = 0.002 \text{ kg/cm}^2$.



ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



Figura 1

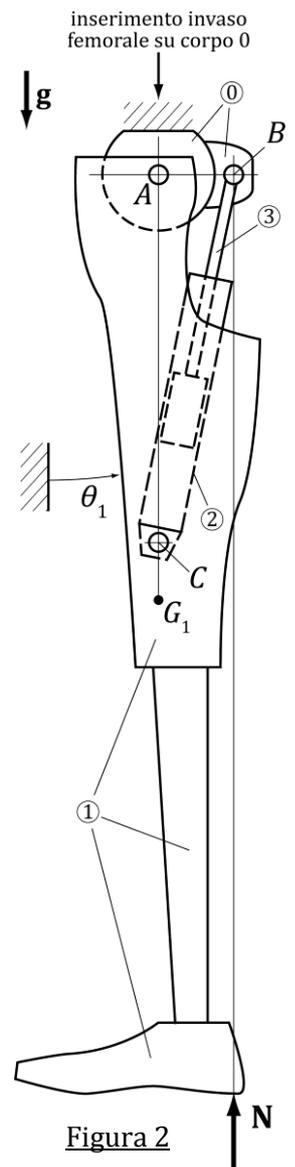
La Figura 1 mostra una protesi attiva (*C-Leg*, Ottobock) sviluppata per soggetti con amputazioni transfemorali e dotata di una sofisticata strategia di controllo dell'attuatore idraulico. Il meccanismo su cui si basa è schematizzato in Fig. 2, nella configurazione da analizzare. Il corpo 0, sede delle due cerniere *A* e *B* e destinato ad accogliere saldamente l'invaso femorale, è fisso in questo studio (la coscia è immobilizzata). Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{AB} = 25 \text{ mm}$, $\overline{AC} = 120 \text{ mm}$, $\theta_1 = 7^\circ$, $\dot{\theta}_1 = 0.7 \text{ rad/s}$, $\ddot{\theta}_1$.

1. Ottenere numericamente velocità angolare dell'attuatore idraulico (cilindro 2 + pistone 3) e velocità relativa di scorrimento tra cilindro e pistone.
2. Verificare la correttezza dei segni delle velocità ottenute al punto precedente mediante triangolo delle velocità.
3. Determinare i centri delle velocità assoluti di tutti i corpi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Sul corpo 1 agiscono la sua forza peso, applicata in G_1 (si assuma che 1 sia l'unico corpo con massa non trascurabile) e la reazione \mathbf{N} esercitata dal suolo sul piede protesico: sono entrambe note. L'equilibrio statico della gamba è affidato all'azione dell'attuatore idraulico.

1. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera *A* quando agisce soltanto la forza peso del corpo 1.
2. Determinare le forze esercitate dall'attuatore idraulico e la reazione della cerniera *A* quando agisce soltanto la reazione \mathbf{N} .
3. Risolvere e riportare i diagrammi di corpo libero sovrapponendo gli effetti e assumendo $m_1 = 3.5 \text{ kg}$ e $|\mathbf{N}| = 700 \text{ N}$.
4. Come alternativa all'applicazione del PSE si potrebbe anche risolvere rapidamente il problema dopo aver ridotto forza peso e reazione del suolo al loro sistema equivalente minimo: determinare tale sistema.



- Soluzione versione A -

- ESERCIZIO 1 -

1) Si può sfruttare il punto notevole C (cerniera mobile) per scrivere un'eq.^{te} di chiusura che coinvolge le velocità incognite richieste:

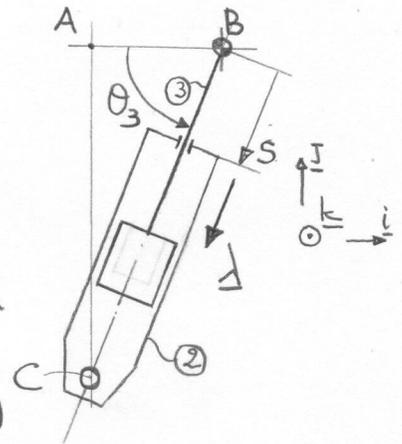
$$\underline{v}_{CE1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \underline{AC} = \underline{v}_{CE2}$$

Mettendosi solidali a ③:

$$\Sigma \textcircled{3} : \underline{v}_{CE2} = \underline{v}_{CE2}^{(r)} + \underline{v}_{CE2}^{(tr)} = \dot{s} \underline{1} + \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underline{BC}$$

Dunque:

$$\boxed{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \underline{AC} = \dot{s} \underline{1} + \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \underline{BC}} \quad \text{eq.^{te} di chiusura (in } \dot{\theta}_3, \dot{s} \text{)}$$



Le componenti dei vettori sopra nel s.d.r. definito dai versori (i, j, k) indicati in figura sono (usando i dati numerici forniti):

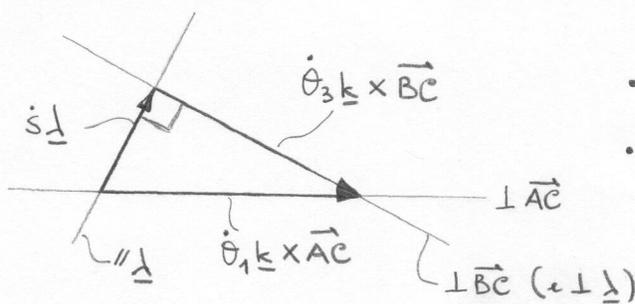
$$\underline{AC} = (0, -120 \text{ mm}, 0); \quad \underline{1} = (-0.204, -0.979, 0), \quad \text{usando } \theta_3 = \arctan \frac{AC}{AB} = 78.2^\circ;$$

$$\underline{BC} = (-25 \text{ mm}, -120 \text{ mm}, 0).$$

Risolvendo numericamente l'eq.^{te} di chiusura sopra si ottiene (con $\dot{\theta}_1 = 0.7 \text{ rad/s}$):

$$\begin{cases} \dot{s} = -17.1 \text{ mm/s} & (\text{vel. relativa tra cilindro 2 e pistone 3}) \\ \dot{\theta}_3 = 0.671 \text{ rad/s} & (\text{vel. angolare assoluta cilindro idraulico}) \end{cases}$$

2) Triangolo delle velocità ($\dot{\theta}_1 > 0$):

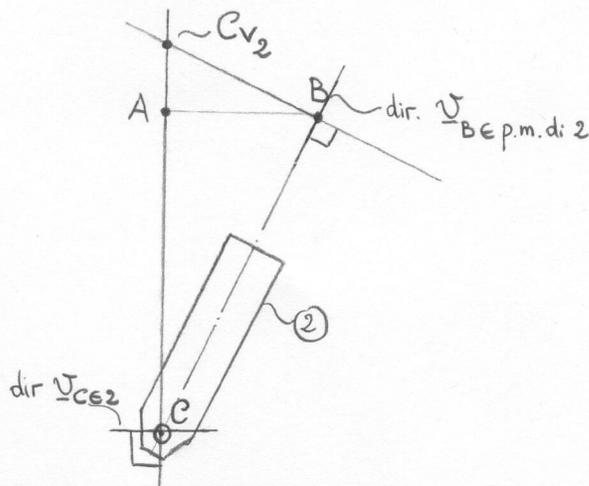


- $\dot{s} < 0$
 - $\dot{\theta}_3 > 0$
- signi confermati

3) $C_{V_1} \equiv A$ (cerniera fissa)

$C_{V_3} \equiv B$ (" ")

C_{V_2} : figura a lato

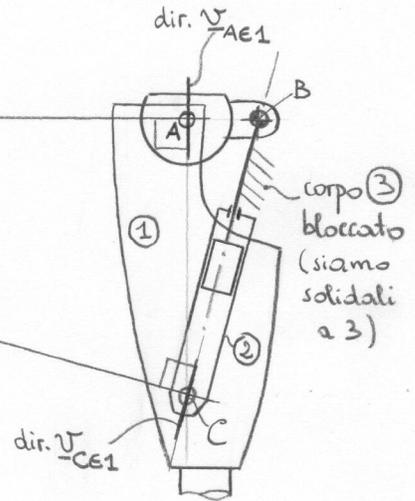


$C_{V_{12}} \equiv C$ (cerniera mobile)

$C_{V_{23}}$ non esiste (moto relativo traslatorio)

$C_{V_{13}}$:

$C_{V_{13}}$



4) Si adotta lo stesso ragionamento seguito per le velocità:

$$\underline{a}_{CE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overline{AC} - \dot{\theta}_1^2 \overline{AC} = \underline{a}_{CE2}$$

Mettonosi solidali a ③:

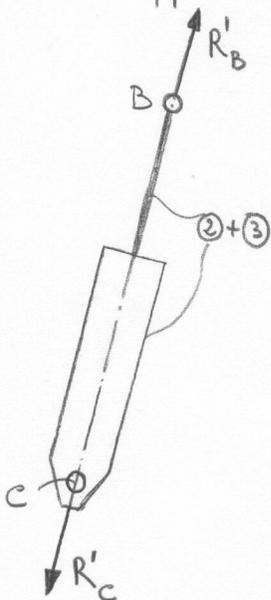
$$\Sigma ③: \underline{a}_{CE2} = \underline{a}_{CE2}^{(r)} + \underline{a}_{CE2}^{(tr)} + \underline{a}_{CE2}^{(co)} = \underbrace{\ddot{s} \underline{j}}_{\underline{a}_c^{(r)}} + \underbrace{\ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overline{BC} - \dot{\theta}_3^2 \overline{BC}}_{\underline{a}_c^{(tr)}} + \underbrace{2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s} \underline{j}}_{\underline{a}_c^{(co)}}$$

Uguagliando:

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overline{AC} - \dot{\theta}_1^2 \overline{AC} = \ddot{s} \underline{j} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overline{BC} - \dot{\theta}_3^2 \overline{BC} + 2\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \dot{s} \underline{j}} \quad \text{eq. di chiusura (in } \ddot{s}, \ddot{\theta}_3)$$

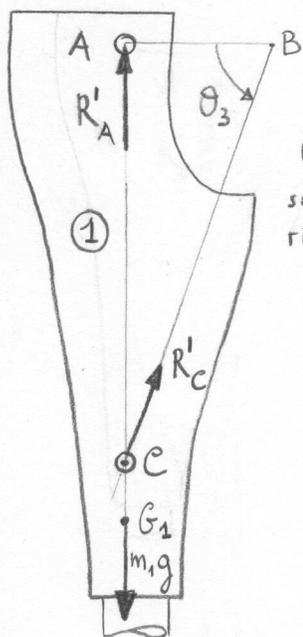
- ESERCIZIO 2 -

1) Agisce soltanto $m_1 g$. L'attuatore idraulico (cilindro ② + pistone ③) è un sistema scarrico, quindi le forze esercitate attraverso i suoi estremi (cerniere B e C) devono costituire una coppia a braccio nullo:



$$R'_B = R'_C$$

Isolando il corpo ①:



(Il cardinale soddisfatta rispetto a C)

$$i) R'_C \cos \theta_3 = 0 \rightarrow R'_C = 0 \text{ (e quindi } R'_B = 0) \text{ (attuatore non sollecitato)}$$

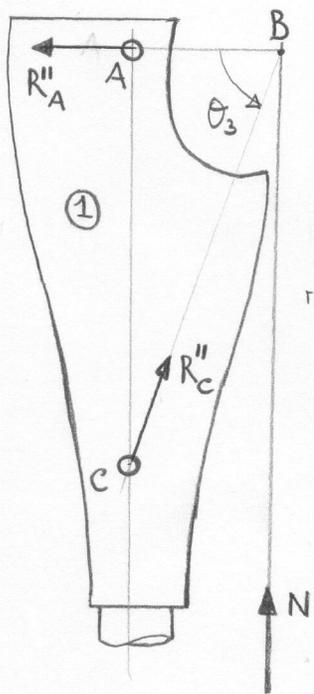
$$j) R'_A = m_1 g =$$

(il peso della gamba protesica è sostenuto interamente dalla cerniera A in questa configurazione)

2) Rispetto al punto precedente, l'equilibrio dell'attuatore richiede lo stesso sistema di carico, ovvero una coppia a braccio nullo; analogamente,

$$R''_B = R''_C \text{ (con gli stessi versi assunti al punto 1)}$$

Cambia invece l'equilibrio del corpo ①:



(Il cardinale soddisfatta rispetto a B)

$$i) R''_C \cos \theta_3 = R''_A$$

$$j) R''_C \sin \theta_3 + N = 0$$

(risolvendo)

$$\bullet R''_A = -N / \tan \theta_3$$

$$\bullet R''_C = -N / \sin \theta_3 = R''_B$$

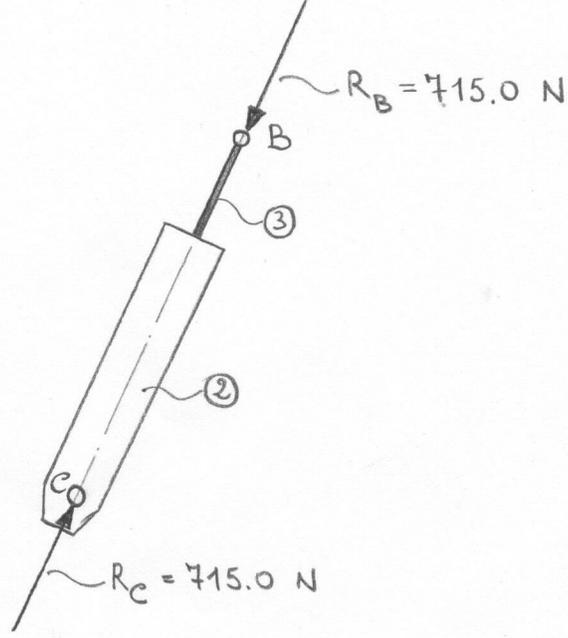
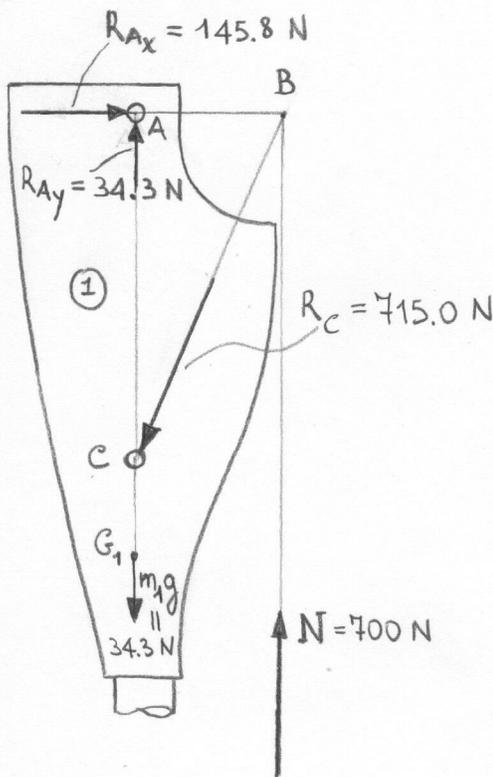
(si dovranno invertire i versi di queste reazioni sui DCL finali)

3) Assumendo $m_1 = 3.5 \text{ kg}$ e $|N| = 700 \text{ N}$ si ha:

$$\bullet R'_A = 34.3 \text{ N} ; R'_B = R'_C = 0$$

$$\bullet R''_A = -145.8 \text{ N} ; R''_B = R''_C = -715.0 \text{ N}$$

Adesso si possono sovrapporre gli effetti:



4) Le due forze m_1g e \underline{N} sono vettori paralleli e complanari: pertanto, il loro trinomio invariante è nullo ed il sistema equivalente minimo è costituito dalla loro risultante $\underline{R} = m_1g + \underline{N} = (665.7 \text{ N})\underline{j}$ applicata sull'asse centrale del sistema (m_1g, \underline{N}).

Determiniamo un punto Ω di tale asse per via analitica, usando:

$$\vec{O}\Omega = \frac{\underline{R} \times \underline{M}_O}{|\underline{R}|^2} \quad (\text{con } \vec{O}\Omega \perp \underline{R} \text{ e quindi } \vec{O}\Omega \perp \text{A.C.})$$

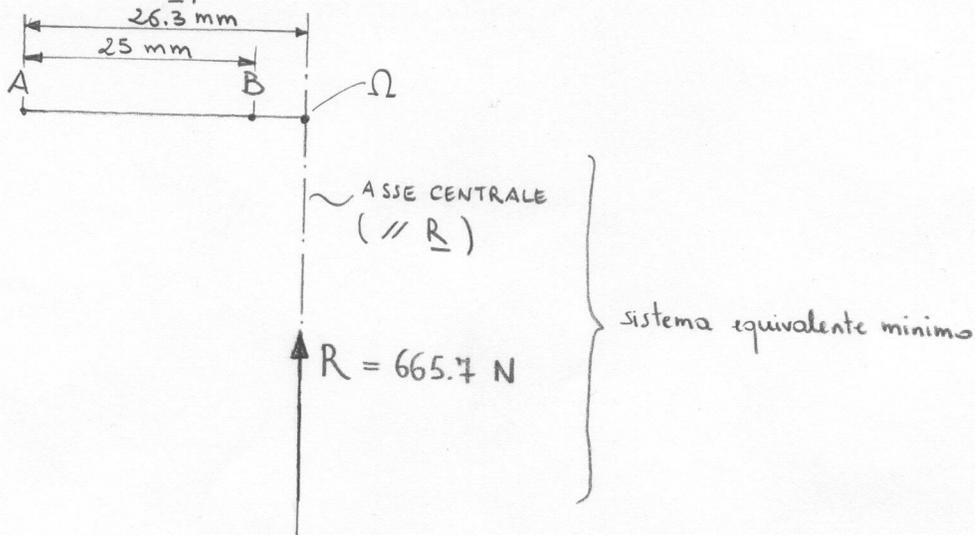
Come polo O comodo è indifferente scegliere A, B , oppure G_1 . Usando A , ad esempio:

$$\underline{M}_A = |\underline{N}| \overline{AB} \underline{k} = (700 \cdot 25 \text{ Nmm}) \underline{k} = (17500 \text{ Nmm}) \underline{k}$$

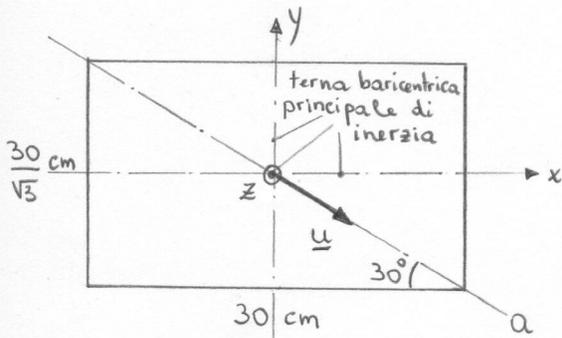
Sostituendo i valori a disposizione in:

$$\vec{A}\Omega = \frac{\underline{R} \times \underline{M}_A}{|\underline{R}|^2}, \text{ si ottiene } \vec{A}\Omega = (26.3 \text{ mm}, 0, 0)$$

Dunque:



- ESERCIZIO 3 -



$$0.004 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bullet m = \rho \cdot 30 \cdot \frac{30}{\sqrt{3}} = 2.078 \text{ kg}$$

$$\bullet \text{versore } \underline{u} = (u_x, u_y, u_z) = (\sqrt{3}/2, -1/2, 0)$$

$$\bullet J_a = J_x u_x^2 + J_y u_y^2 + J_z u_z^2 = 0$$

I momenti principali d'inerzia J_x e J_y valgono:

$$\bullet J_x = \frac{m}{12} \left(\frac{30}{\sqrt{3}} \right)^2 = 51.96 \text{ kg cm}^2 ; \quad J_y = \frac{m}{12} (30)^2 = 155.89 \text{ kg cm}^2$$

Pertanto:

$$\bullet J_a = 77.94 \text{ kg cm}^2$$

- Soluzione versione B -

La soluzione è perfettamente analoga a quella della versione A. Si riportano i risultati numerici.

ES. 1)

$$1) \dot{s} = -26.3 \text{ mm/s} \quad (\text{secondo } \nabla \alpha = 76.5^\circ)$$

$$\dot{\theta}_3 = -0.851 \text{ rad/s} \quad (\text{oraria})$$

ES. 2)

$$3) R_{Ax} = 192 \text{ N} \quad (\text{verso sinistra su } \textcircled{1})$$

$$R_{Ay} = 39.2 \text{ N} \quad (\text{verso l'alto su } \textcircled{1})$$

$$R_B = R_C = 822.7 \text{ N} \quad (\text{di compressione per l'attuatore})$$

$$4) \vec{\Delta \Omega} = (-31.5 \text{ mm}, 0, 0), \quad \underline{R} = (0, 760.8 \text{ N}, 0)$$

ES. 3)

$$J_a = 7.70 \text{ kg cm}^2$$