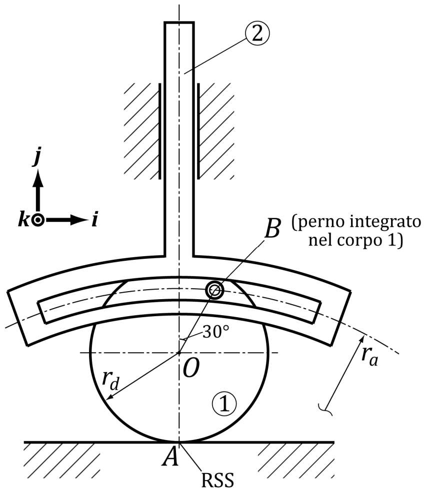
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

13 Giugno 2016

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

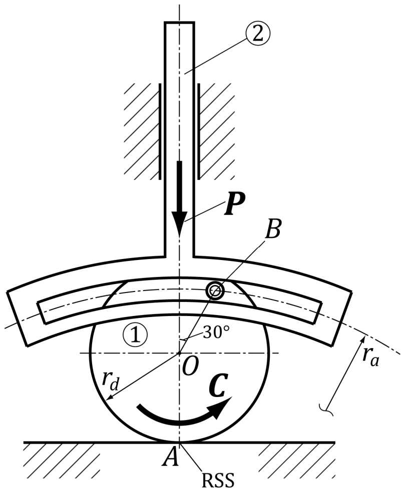
Esercizio 1



Del meccanismo a un grado di libertà in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati la distanza $\overline{OB} = d$ ed i raggi r_d del disco 1 e $r_a = 5d$ dell'asse (arco di circonferenza) dell'asola ricavata nel corpo 2. Tra il disco 1 ed il telaio è presente un vincolo di rotolamento senza strisciamento (RSS). Il corpo 2 è simmetrico rispetto all'asse verticale in figura. Si assuma θ_1 come coordinata lagrangiana (positiva se antioraria).

1. Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite, assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$.
3. Determinare analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2



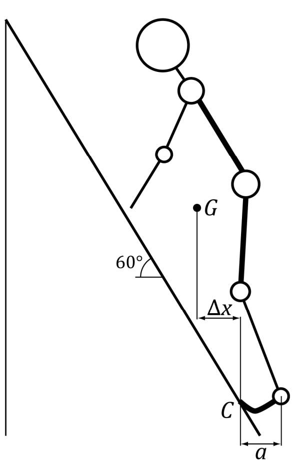
Il corpo 2 è soggetto all'azione della sua forza peso ***P***, assegnata. Una coppia ***C***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

- Determinare la coppia ***C*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce la forza ***P***.

  Indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3

Si consideri un atleta impegnato nell'arrampicata su placca: nella fase di progressione rappresentata in figura, il piede destro è sollevato dal terreno, e le reazioni scambiate tra mani e placca sono trascurabili. L'area di contatto tra piede sinistro e placca è molto ridotta, tale da poter considerare puntiforme il tipo di contatto (punto *C* in figura). Gli effetti dinamici sono trascurabili (condizioni di equilibrio statico).



1. Determinare quale deve essere la distanza orizzontale Δx tra il baricentro *G* dell'atleta ed il punto di contatto *C* al fine di avere condizioni di equilibrio.
2. Determinare quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra placca e scarpetta.
3. Si consideri l'equilibrio del piede in appoggio: determinare le reazioni articolari e la coppia esercitata dai tendini/muscoli/legamenti in corrispondenza della caviglia (cerniera attiva).

Si assuma *a* = 20 cm e una massa dell'atleta *m* = 70 kg.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

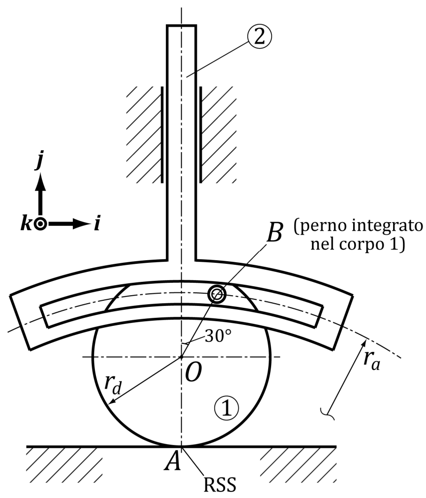
13 Giugno 2016

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

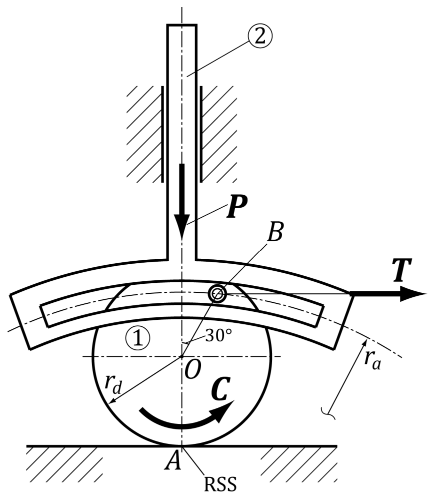
Del meccanismo a un grado di libertà in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati la distanza $\overline{OB} = d$ ed i raggi r_d del disco 1 e $r_a = 5d$ dell'asse (arco di circonferenza) dell'asola ricavata nel corpo 2. Tra il disco 1 ed il telaio è presente un vincolo di rotolamento senza strisciamento (RSS). Il corpo 2 è simmetrico rispetto all'asse verticale in figura. Si assuma θ_1 come coordinata lagrangiana (positiva se antioraria).



1. Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite, assumendo $\dot{\theta}_1 < 0$.
3. Determinare analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente.
4. Determinare i centri delle velocità assoluti dei due corpi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Il corpo 2 è soggetto all'azione della sua forza peso ***P***, assegnata, e successivamente all'azione della forza ***T***, anch'essa assegnata (vettori in figura). Una coppia ***C***, incognita, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce la sola forza ***P***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce la sola forza ***T***.

Indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.

• SOLUZIONE COMPITO 1ª PARTE •

– ESERCIZIO 1 –

1) $\underline{v}_{P\in 1} = \underset{\underset{\underline{0}}{\parallel}}{\underline{v}_{A\in 1}} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AP} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AP}$

$\underline{0}$ (per RSS su telaio)

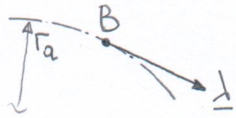
$\underline{v}_{Q\in 2} = \dot{y}\, \underline{J}$ (moto traslatorio rettilineo)

2) Si scrive l'espressione della velocità di $B \in 1$ in due modi diversi.

$\underline{v}_{B\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$

Mettendosi solidali a ②:

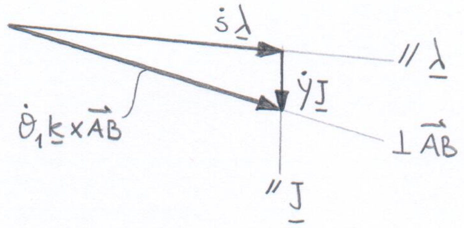
$\Sigma ② : \underline{v}_{B\in 1} = \underline{v}^{(r)}_{B\in 1} + \underline{v}^{(tr)}_{B\in 1} = \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{y}\underline{J}$, dove: •



• s è l'ascissa curvilinea con cui si può parametrizzare l'arco di circonferenza

Uguagliando: $\boxed{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} = \dot{s}\underline{\lambda} + \dot{y}\underline{J}}$ (incognite: $\dot{s}, \dot{y}$)

Triangolo delle velocità:



$(\dot{\theta}_1 < 0)$

$\dot{s} > 0$

$\dot{y} < 0$

3) $\begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ AB_x & AB_y & 0 \end{bmatrix} = \dot{s} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{y} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

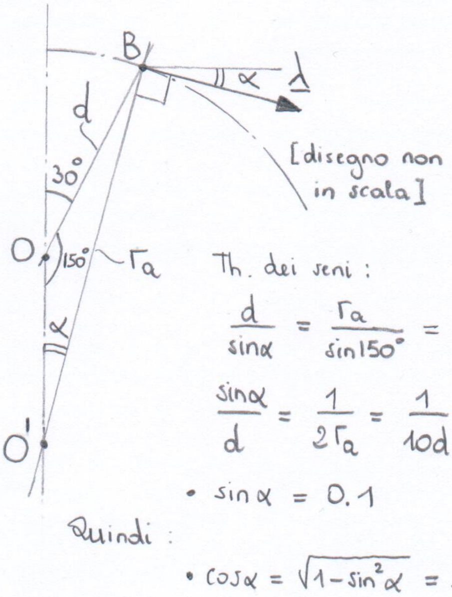
dove $(AB_x, AB_y) = \left(\frac{d}{2}, r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(\lambda_x, \lambda_y) \longrightarrow$

Svolgendo i calcoli si ottengono le due eq.ni scalari:

$$\begin{cases} -\dot{\theta}_1 \left(r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dot{s}\cos\alpha \\ \dot{\theta}_1 \frac{d}{2} = -\dot{s}\sin\alpha + \dot{y} \end{cases},$$

che risolte forniscono:

- $\dot{s} = -\left(r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\dot{\theta}_1}{\cos\alpha}$ (>0 poiché $\dot{\theta}_1 < 0$)
- $\dot{y} = \left(\frac{d}{2} - \left(r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\tan\alpha\right)\dot{\theta}_1$ (<0 poiché $\dot{\theta}_1 < 0$ e per le proporzioni geometriche assegnate)



Th. dei seni:

$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{r_a}{\sin 150°} = \frac{r_a}{1/2}$

$\frac{\sin\alpha}{d} = \frac{1}{2r_a} = \frac{1}{10d}$

• $\sin\alpha = 0.1$

Quindi:

• $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{3}{10}\sqrt{11}$

$\cong 0.995$

Pertanto:

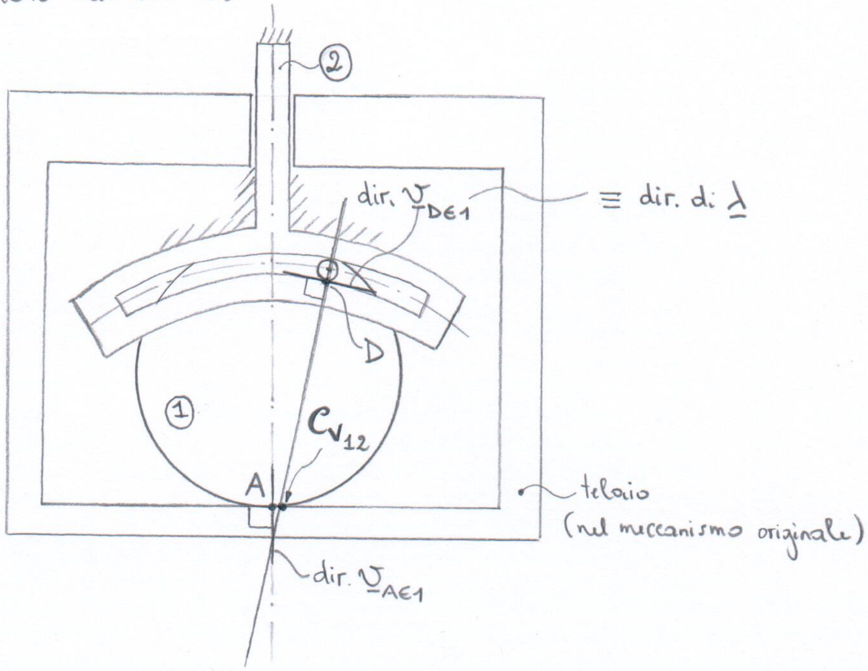
• $(\lambda_x, \lambda_y) = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$

(ed inoltre $\alpha \cong 5.74°$)

4) $C_{v_1} \equiv A$ (RSS su telaio)

C_{v_2} non esiste (moto traslatorio)

$C_{v_{12}}$:



5) Si scrivono due diverse espressioni per $\underline{a}_{BE1}$.

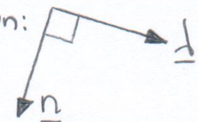
Th. di Rivals con polo A :

$$\underline{a}_{BE1} = \underline{a}_{AE1} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} = r_d \dot{\theta}_1^2 \underline{J} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB}$$

Composizione di moti :

Σ 2 : $\underline{a}_{BE1} = \underline{a}_{BE1}^{(r)} + \underline{a}_{BE1}^{(tr)} + \underline{a}_{BE1}^{(Co)}$, dove :

- $\underline{a}_{BE1}^{(r)} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \dfrac{\dot{s}^2}{r_a}\underline{n}$, con: (termine dovuto alla curvatura della traiettoria)
- $\underline{a}_{BE1}^{(tr)} = \ddot{y}\,\underline{J}$
- $\underline{a}_{BE1}^{(Co)} = \underline{0}$, poiché $\underline{\omega}^{(tr)} = \underline{\omega}_2 = \underline{0}$



Uguagliando :

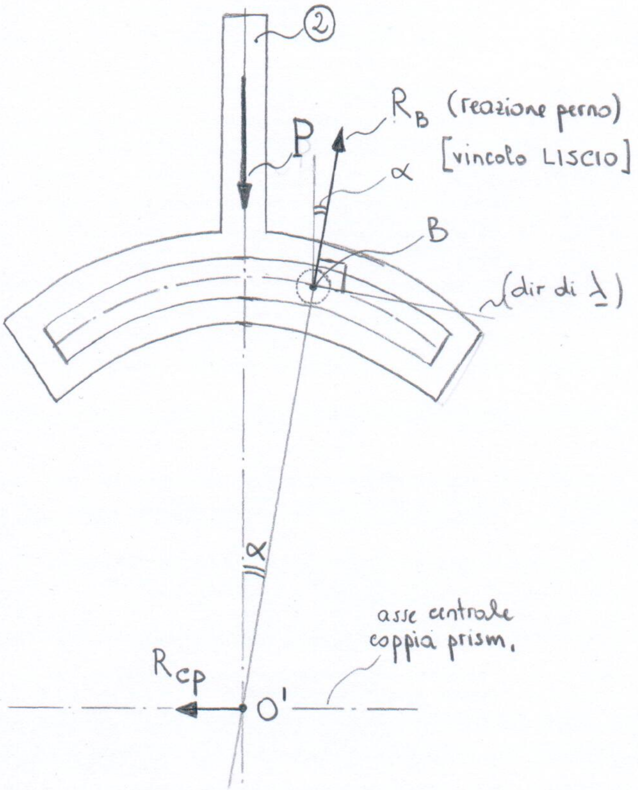
$$\boxed{r_d \dot{\theta}_1^2 \underline{J} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \frac{\dot{s}^2}{r_a}\underline{n} + \ddot{y}\,\underline{J}}$$ (incognite : $\ddot{s}, \ddot{y}$)

<u>Oss.</u> Il moto (relativo) del punto B sulla traiettoria circolare poteva essere parametrizzato anche mediante un angolo θ_B , considerando che $s = r_a \theta_B$. Come espressioni della $\underline{v}_{BE1}^{(r)}$ e della $\underline{a}_{BE1}^{(r)}$ avremmo potuto usare :

- $\underline{v}_{BE1}^{(r)} = \dot{\theta}_B \underline{k} \times \overrightarrow{O'B}$ ($\dot{\theta}_B$ incognita)
- $\underline{a}_{BE1}^{(r)} = \ddot{\theta}_B \underline{k} \times \overrightarrow{O'B} - \dot{\theta}_B^2 \overrightarrow{O'B}$ ($\ddot{\theta}_B$ ")

– ESERCIZIO 2 –

Sul corpo 2 sono presenti meno incognite:



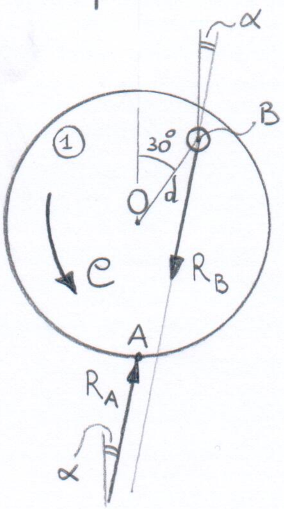
i) $R_B \sin\alpha = R_{cp}$

j) $R_B \cos\alpha = P$

$\downarrow$

- $R_B = \dfrac{P}{\cos\alpha} \cong 1.005\, P$
- $R_{cp} = P \tan\alpha \cong 0.1005\, P$

Si passa al corpo 1:



- $R_A = R_B = \dfrac{P}{\cos\alpha}$

A) (lavoro con le componenti di $\underline{R}_B$ perché geometricamente più semplice)

$$C + R_{B_x}\left(r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - R_{B_y}\frac{d}{2} = 0$$

$$C + R_B \sin\alpha\left(r_d + d\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - R_B\cos\alpha\,\frac{d}{2} = 0$$

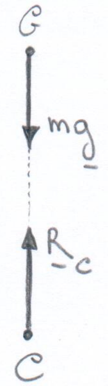
- $C = R_B\left(\dfrac{d}{2}\cos\alpha - \left(r_d + d\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\alpha\right)$

$= P\left(\dfrac{d}{2} - \left(r_d + d\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\tan\alpha\right)$ (> 0 con le proporzioni geometriche assegnate)

[Ometto i DCL risolti data la semplicità degli schemi di carico.]

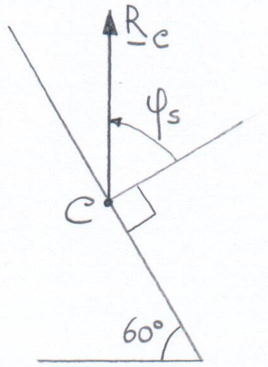
— ESERCIZIO 3 —

1) Isolando il corpo dell'atleta, è immediato osservare che le uniche due forze esterne agenti su di esso sono la sua forza peso $\underline{mg}$ e la reazione $\underline{R}_c$ in corrispondenza del punto di contatto C. Per il rispetto della prima cardinale, le due forze devono essere uguali e opposte, mentre per il rispetto della seconda cardinale esse devono avere la stessa retta di applicazione: $\underline{mg}$ ed $\underline{R}_c$ devono costituire una coppia a braccio nullo



, ovvero $\Delta x = 0$

2)

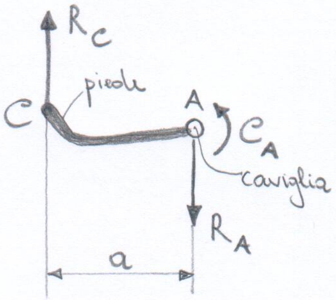


$\varphi_s = 60°$ = semiapertura (minima) del cono d'attrito statico

$\downarrow$

$f_{s_{min}} = \tan\varphi_s = \tan 60° = \sqrt{3} \cong 1.732$ minimo valore del coeff. di attrito statico tra placca e scarpetta

3)



(massa del piede trascurabile)

$R_c = mg = R_A$

$\circlearrowleft$) $C_A = R_A a = mga$

Con i valori numerici a disposizione, la reazione articolare e la coppia valgono:

- $R_A = mg = 686.7 \text{ N}$
- $C_A = mga = 137.34 \text{ Nm}$