UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

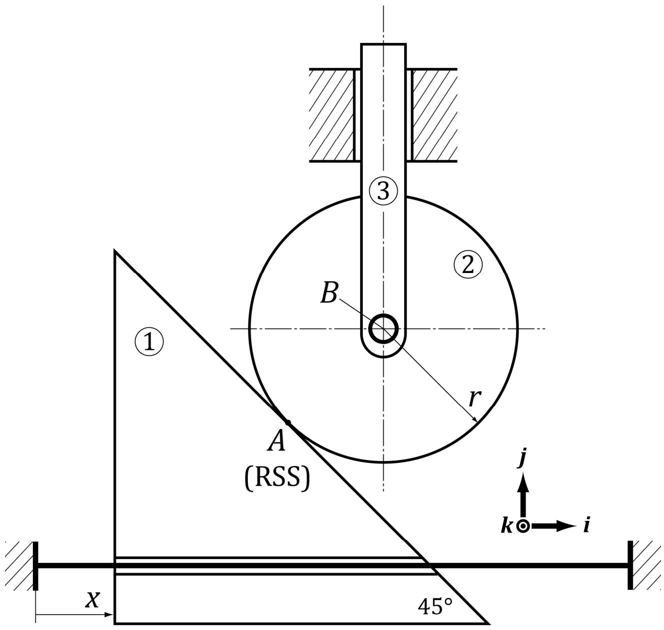
12 Gennaio 2015

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione A
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$; il raggio r del disco (corpo 2).

1. **Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.**
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità, assumendo $\dot{x} < 0$: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.**
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

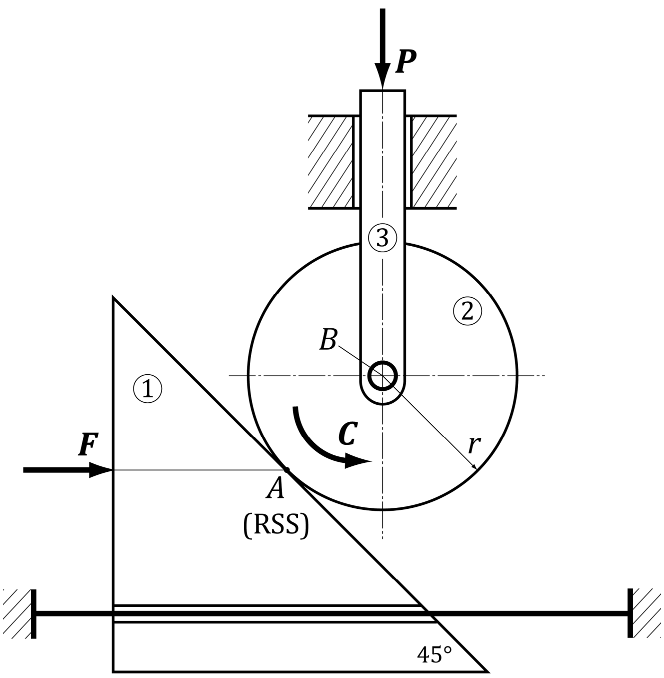


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza $\boldsymbol{P}$, assegnata, e sul disco 2 la coppia $\boldsymbol{C}$, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza $\boldsymbol{F}$, avente modulo e verso incogniti (ma retta di applicazione assegnata, passante per A), deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. **Determinare la forza *F'* e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza *P*.**
2. Determinare la forza ***F''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia ***C***.
3. Per i due casi precedenti, determinare il minimo valore del coefficiente di attrito nel punto di contatto A affinché l'equilibrio statico possa essere affidato all'attrito.

Per i punti **1** e 2, **indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi e riportare i diagrammi di corpo libero dei tre corpi *risolti in funzione dei dati del problema*.**



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

12 Gennaio 2015

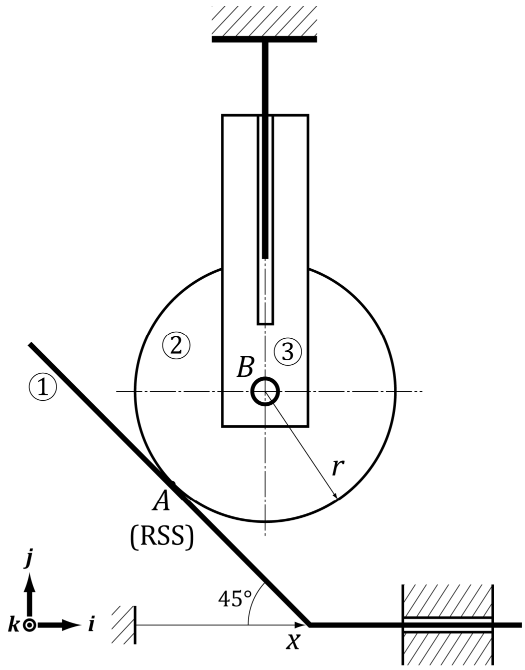
ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$; il raggio r del disco (corpo 2).

1. **Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.**
2. **Risolvere per via grafica il problema delle velocità, assumendo $\dot{x} < 0$: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.**
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

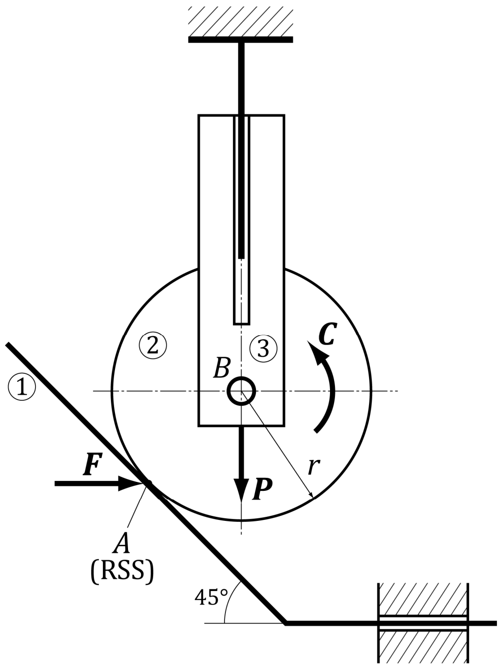


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza ***P***, assegnata, e sul disco 2 la coppia ***C***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza ***F***, avente modulo e verso incogniti (ma retta di applicazione assegnata, passante per A), deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. **Determinare la forza *F'* e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza *P*.**
2. Determinare la forza ***F''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia ***C***.
3. Per i due casi precedenti, determinare il minimo valore del coefficiente di attrito nel punto di contatto A affinché l'equilibrio statico possa essere affidato all'attrito.

Per i punti **1** e 2, **indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi e riportare i diagrammi di corpo libero dei tre corpi *risolti in funzione dei dati del problema*.**



12 Gennaio 2015

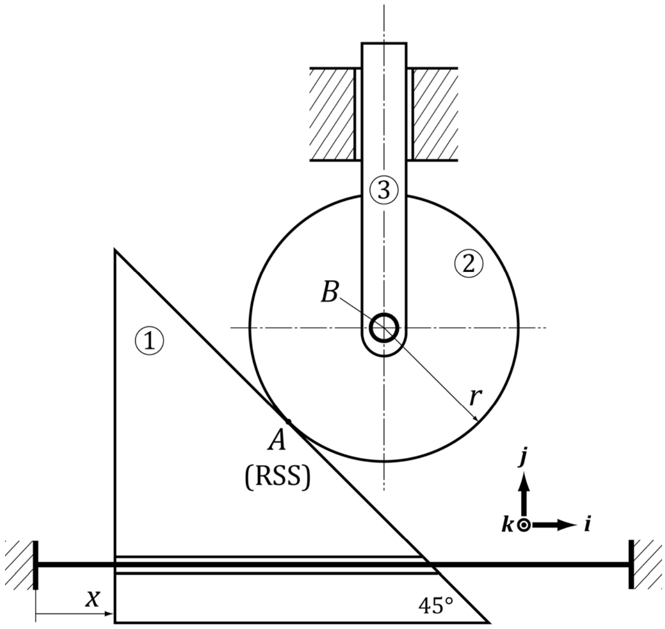
ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$; il raggio r del disco (corpo 2).

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità, assumendo $\dot{x} < 0$: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare il centro delle velocità del disco 2.
5. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

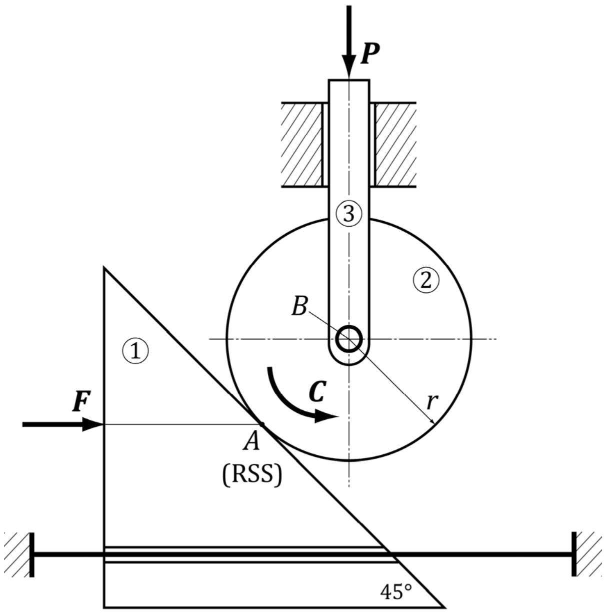


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza ***P***, assegnata, e sul disco 2 la coppia ***C***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza ***F***, avente modulo e verso incogniti (ma retta di applicazione assegnata, passante per A), deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. Determinare la forza ***F'*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza ***P***.
2. Determinare la forza ***F''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia ***C***.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi e riportare i diagrammi di corpo libero dei tre corpi *risolti in funzione dei dati del problema.*



SOLUZIONE COMPITO 1^a PARTE

N.B. Le versioni A e B hanno la medesima soluzione. Verrà risolta la versione A.

• ESERCIZIO 1 •

1) $\underline{v}_{P\in 1} = \dot{x}\,\underline{i} \longrightarrow \underline{v}_{A\in 1} = \dot{x}\,\underline{i}$ (moto traslatorio rettilineo)

$$\underline{v}_{Q\in 2} = \underbrace{\underline{v}_{A\in 2}}_{\substack{\parallel (RSS) \\ \underline{v}_{A\in 1}}} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AQ} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AQ}$$

$\underline{v}_{R\in 3} = \dot{y}\,\underline{J}$ (moto traslatorio rettilineo)

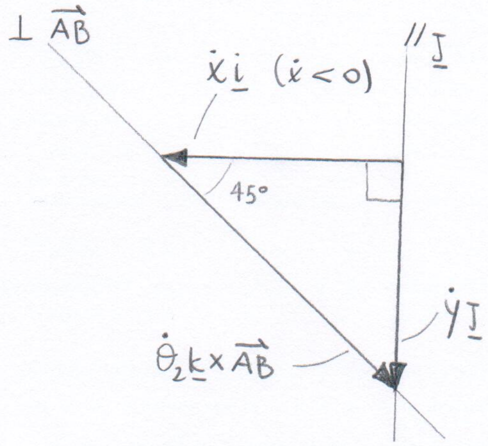
2) Per l'eq.^{ne} di chiusura sfruttiamo il punto notevole B:

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 3}$$

$$\boxed{\dot{x}\,\underline{i} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AB} = \dot{y}\,\underline{J}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\dot{\theta}_2$, $\dot{y}$)

Triangolo delle velocità:



Segni velocità:

$(\dot{x} < 0)$

$\dot{\theta}_2 < 0$

$\dot{y} < 0$

3)
$$\dot{x}\,\underline{i} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ r\frac{\sqrt{2}}{2} & r\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \dot{y}\,\underline{J}$$

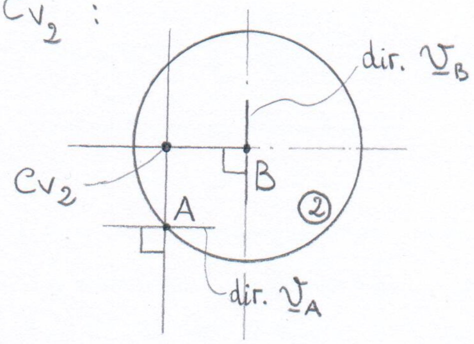
$$\dot{x}\,\underline{i} + \underline{i}\left(-\dot{\theta}_2 r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \underline{J}\left(\dot{\theta}_2 r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dot{y}\,\underline{J}$$

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{\theta}_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \dot{\theta}_2 r\frac{\sqrt{2}}{2} = \dot{y} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \sqrt{2}\,\frac{\dot{x}}{r} \\ \dot{y} = \dot{x} \end{cases}$$

essendo $\dot{x}<0$, i segni di $\dot{\theta}_2$ e $\dot{y}$ sono concordi con quelli trovati al punto 2)

4) C_{v_1} e C_{v_3} non esistono (moti traslatori).

C_{v_2} :



C_v RELATIVI :

- $C_{v_{12}} = A$
- $C_{v_{23}} = B$
- $C_{v_{13}}$: i corpi 1 e 3 non variano mai la loro orientazione, quindi la loro velocità angolare relativa è nulla $\rightarrow$ $C_{v_{13}}$ non esiste.

5) $\underline{a}_{P\in 1} = \ddot{x}\,\underline{i}$

$$\underline{a}_{Q\in 2} = \underbrace{\underline{a}_{A\in 2}}_{} + \ddot{\theta}_2\,\underline{k} \times \vec{AQ} - \dot{\theta}_2^2\,\vec{AQ}$$

$(\|\underline{n}\| = 1)$

$$\Sigma 1 : \underline{a}_{A\in 2} = \underline{a}_A^{(r)} + \underline{a}_A^{(tr)} + \underline{a}_A^{(Co)} = r\dot{\theta}_2^2\,\underline{n} + \ddot{x}\,\underline{i} + \underline{0} \quad (\underline{\omega}^{(tr)} = \underline{0})$$

$\underline{a}_{R\in 3} = \ddot{y}\,\underline{J}$

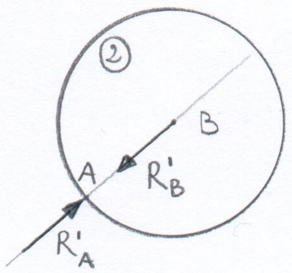
Eq.^{ne} di chiusura : $\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_{B\in 3}$

$$\boxed{r\dot{\theta}_2^2\,\underline{n} + \ddot{x}\,\underline{i} + \ddot{\theta}_2\,\underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_2^2\,\vec{AB} = \ddot{y}\,\underline{J}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite : $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{y}$)

• ESERCIZIO 2 •

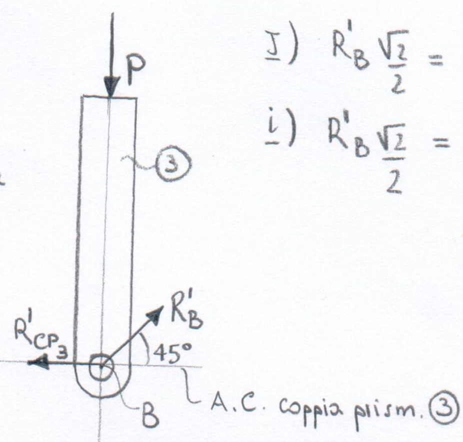
1) $\boxed{\underline{F}', \underline{P}}$ Sul corpo 2 agiscono soltanto due reazioni, che devono costituire una coppia a braccio nullo :



$R'_A = R'_B$

Si passa al corpo 3, dove $\underline{P}$ è assegnata :

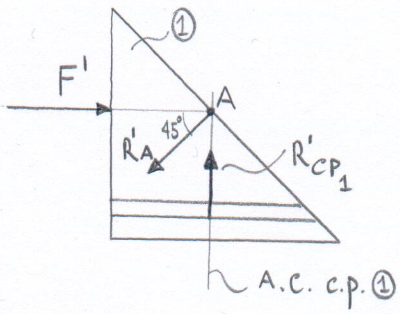
(caso di 3 forze non parallele agenti sul corpo)



$\underline{J})$ $R'_B \frac{\sqrt{2}}{2} = P \longrightarrow R'_B = \sqrt{2}\,P = R'_A$

$\underline{i})$ $R'_B \frac{\sqrt{2}}{2} = R'_{CP_3} \longrightarrow R'_{CP_3} = \underline{P}$

Infine corpo 1 :

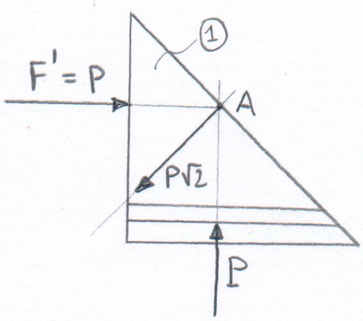


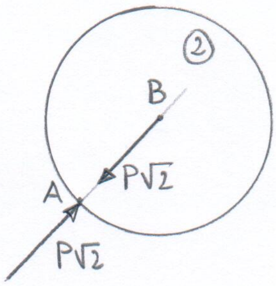
Siamo di nuovo nel caso di 3 forze non parallele.

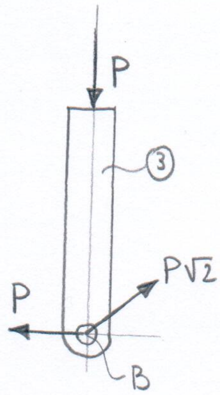
$$\underline{i}) \quad F' = R'_A \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

$$\underline{j}) \quad R'_{CP_1} = R'_A \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

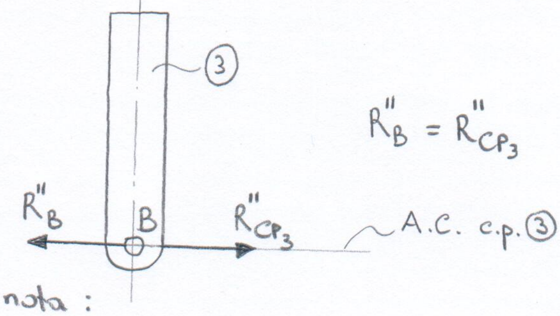
DCL risolti :





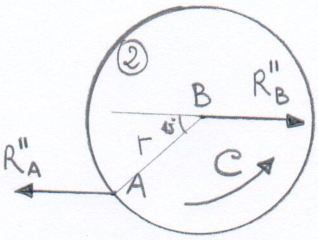


2) $\boxed{\underline{F}'', \underline{C}}$ Le uniche due reazioni agenti sul corpo ③ devono costituire una coppia a braccio nullo :



$$R''_B = R''_{CP_3}$$

Passiamo al corpo ② su cui agisce la $\underline{C}$ nota :



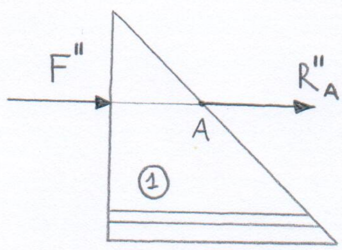
$$A) \quad C - R''_B \, r \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$R''_B = \sqrt{2} \frac{C}{r} = R''_{CP_3}$$

$$\underline{i}) \quad R''_A = R''_B = \sqrt{2} \frac{C}{r}$$

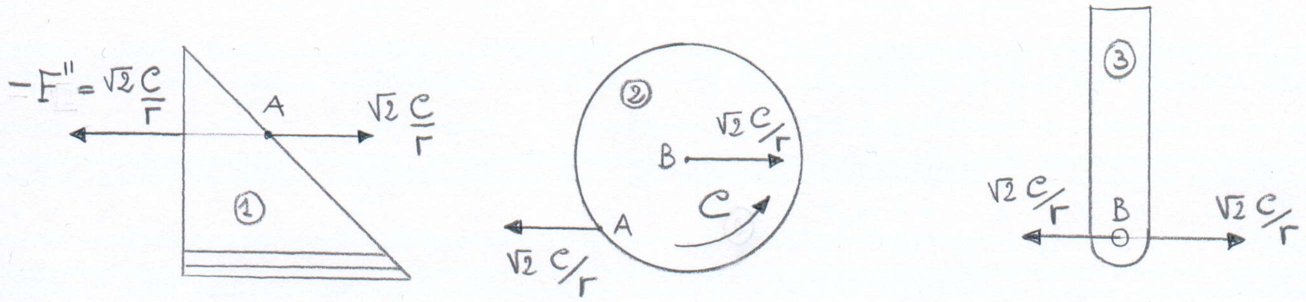
Infine il corpo ① :



$$\underline{i}) \quad F'' + R''_A = 0 \longrightarrow F'' = -\sqrt{2} \frac{C}{r}$$

(le reazioni della coppia prismatica devono essere nulle perché $\underline{F}''$ e $\underline{R}''_A$ costituiscono già una coppia a braccio nullo)

DCL risolti :



3) Al punto 1), la reazione normale $\underline{R}'_A$ = esercitata da 2 su 1 (ortogonale al piano inclinato) non ha componente tangenziale : il coefficiente d'attrito può essere nullo, quindi si ha equilibrio statico anche in assenza di attrito.

Al punto 2), la reazione $\underline{R}''_A$ esercitata da 2 su 1 non origina una componente normale di <u>pressione</u>, bensì di <u>trazione</u>. Affinché $\underline{R}''_A$ possa "tirare" il corpo 1 nel modo richiesto, l'attrito non gioca alcun ruolo (sarebbe necessario un "effetto colla") : non è quindi possibile affidare all'attrito l'equilibrio statico del sistema.