UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

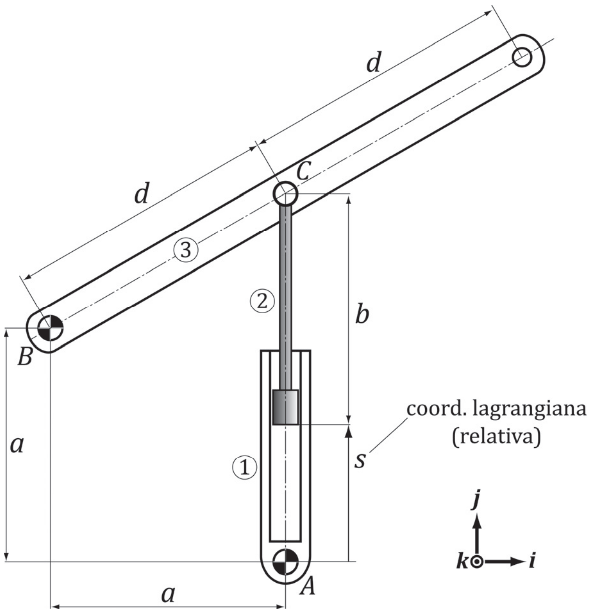
10 Giugno 2014

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Nella configurazione del meccanismo di sollevamento rappresentata in figura sono assegnate la coordinata lagrangiana s (funzione del tempo) e le altre quantità geometriche indicate.

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Assumendo $\dot{s} > 0$, ottenere l'equazione di chiusura per le velocità e risolverla per via *grafica* (triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) indicati).
3. Individuare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

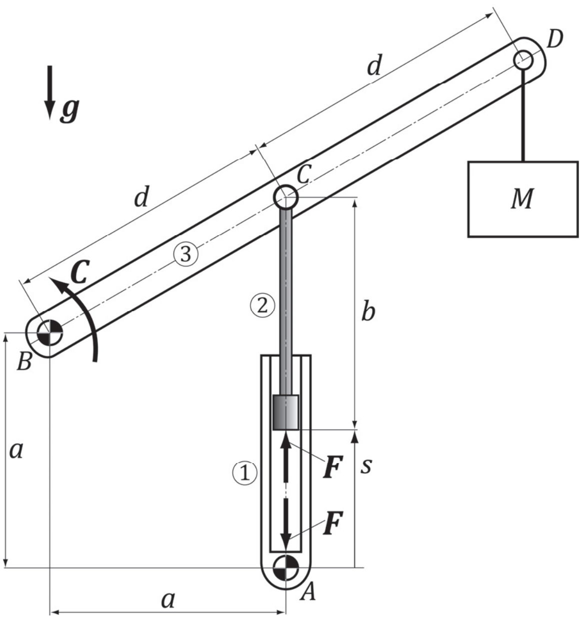


Esercizio 2

Il meccanismo dell'esercizio precedente deve sollevare il carico di massa M, incernierato in D. L'equilibrio statico del sistema è affidato all'azione dell'attuatore, rappresentata dalla coppia a braccio nullo costituita dalle due forze $\boldsymbol{F}$ in figura, di modulo e verso incogniti, agenti sui corpi 1 e 2. Sul corpo 3 agisce la coppia $\boldsymbol{C}$, assegnata.

1. Determinare $\boldsymbol{F}'$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza peso del carico.
2. Determinare $\boldsymbol{F}''$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia $\boldsymbol{C}$.
3. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, e assumendo i valori $M = 500$ kg, $a = 1$ m, $C = 2000$ Nm, $g = 9.81$ m/s^2, disegnare i diagrammi di corpo libero totali dei tre corpi, *risolti numericamente*.

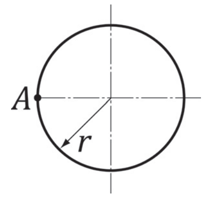
Ai punti 1 e 2, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi.



Esercizio 3

Del disco omogeneo in figura è noto il momento d'inerzia I_A rispetto all'asse passante per il punto A e ortogonale al piano del foglio. È inoltre noto il raggio r.

Determinare la massa m del disco assumendo $I_A = 0.15$ kg m^2 e $r = 10$ cm.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

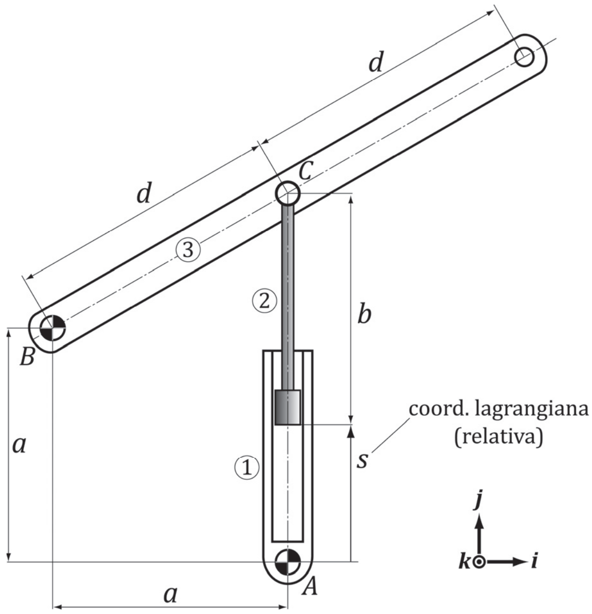
10 Giugno 2014

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Nella configurazione del meccanismo di sollevamento rappresentata in figura sono assegnate la coordinata lagrangiana s (funzione del tempo) e le altre quantità geometriche indicate.

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Assumendo $\dot{s} > 0$, ottenere l'equazione di chiusura per le velocità e risolverla per via *grafica* (triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite) e *analitica* (in funzione dei dati del problema e servendosi dei versori ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) indicati).
3. Individuare i centri delle velocità assoluti.
4. Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

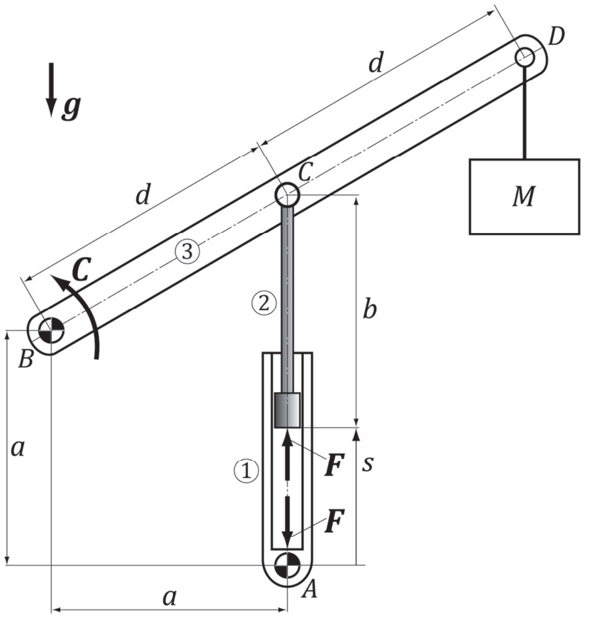


Esercizio 2

Il meccanismo dell'esercizio precedente deve sollevare il carico di massa M, incernierato in D. L'equilibrio statico del sistema è affidato all'azione dell'attuatore, rappresentata dalla coppia a braccio nullo costituita dalle due forze $\boldsymbol{F}$ in figura, di modulo e verso incogniti, agenti sui corpi 1 e 2. Sul corpo 3 agisce la coppia $\boldsymbol{C}$, assegnata.

1. Determinare $\boldsymbol{F'}$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza peso del carico.
2. Determinare $\boldsymbol{F''}$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia $\boldsymbol{C}$.

Ai punti 1 e 2 precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero ***risolti in funzione dei dati del problema***.



• SOLUZIONE COMPITO I PARTE •

— ESERCIZIO 1 —

1) $\underline{v}_{P\in 1} = \cancel{\underline{v}_{A\in 1}}^{\,0} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AP}$

$\underline{v}_{Q\in 2} =$ (comp. moti Σ ①) $\underline{v}^{(r)}_{Q\in 2} + \underline{v}^{(tr)}_{Q\in 2} = \dot{s}\underline{J} + \underbrace{\dot{\theta}_1}_{\text{incognita}} \underline{k} \times \overrightarrow{AQ}$

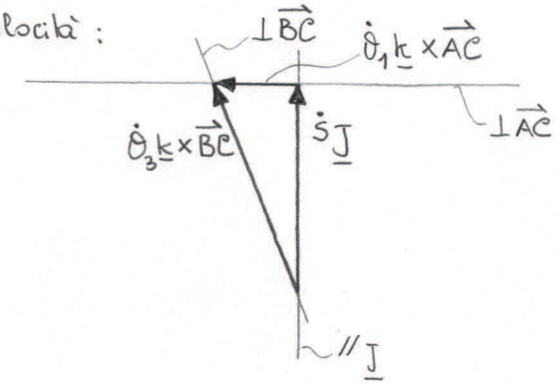
$\underline{v}_{R\in 3} = \underbrace{\dot{\theta}_3}_{\text{incognita}} \underline{k} \times \overrightarrow{BR}$

2) Per scrivere l'eq.^{ne} di chiusura sfrutto il punto notevole C :

$$\underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_{C\in 3}$$

• $\underline{\dot{s}\underline{J} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{BC}}$ EQ.^{NE} DI CHIUSURA (incognite : $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_3$)

• Triangolo delle velocità :



$(\dot{s} > 0)$
$\dot{\theta}_1 > 0$
$\dot{\theta}_3 > 0$

• Soluzione analitica :

$$\dot{s}\underline{J} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ 0 & s+b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ a & s+b-a & 0 \end{vmatrix} \quad (*)$$

$$\dot{s}\underline{J} + \underline{i}\left(-\dot{\theta}_1(s+b)\right) = \underline{i}\left(-\dot{\theta}_3(s+b-a)\right) + \underline{J}\left(\dot{\theta}_3 a\right) ,$$

da cui le due eq.^{ni} scalari :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 (s+b) = \dot{\theta}_3 (s+b-a) \\ \dot{s} = \dot{\theta}_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \dfrac{\dot{s}}{a} \dfrac{s+b-a}{s+b} \\ \dot{\theta}_3 = \dfrac{\dot{s}}{a} \quad (>0) \end{cases}$$

: si rileva dal disegno che $(s+b) > a$, quindi $\dot{\theta}_1 > 0$

3) $C_{V_1} \equiv A$

$C_{V_3} \equiv B$

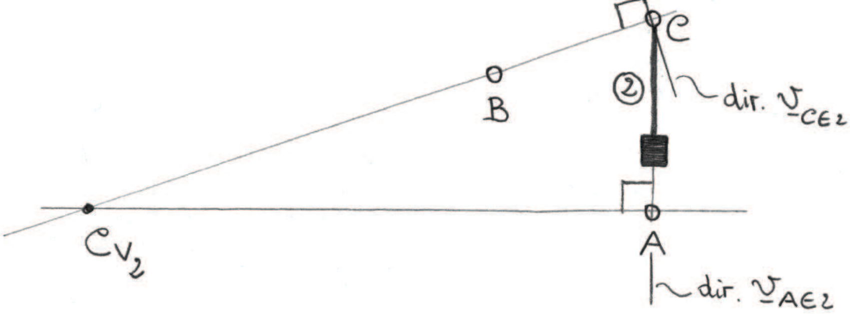
(*) Data la ridondanza delle quantità geometriche fornite nel testo, potevano anche essere usate le seguenti espr. :

$AC_y = a + \sqrt{d^2 - a^2}$
$BC_y = \sqrt{d^2 - a^2}$,

da cui : $\dot{\theta}_1 = \dfrac{\dot{s}}{a} \dfrac{\sqrt{d^2 - a^2}}{a + \sqrt{d^2 - a^2}} \quad (>0)$

(e ancora $\dot{\theta}_3 = \dot{s}/a$)

C_{V_2} :

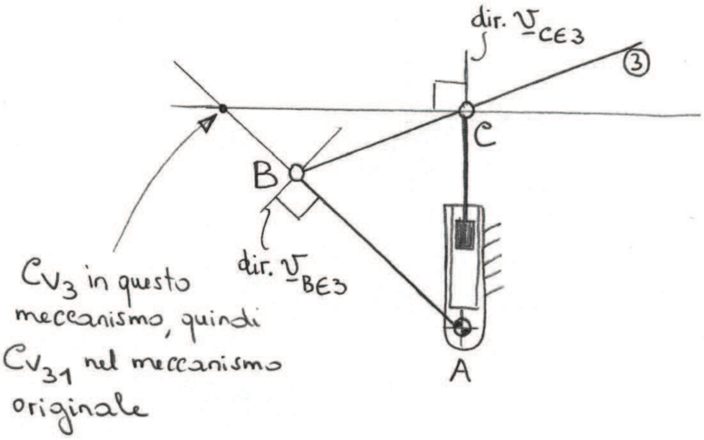


• Centri delle velocità relativi :

$C_{V_{12}}$ non esiste

$C_{V_{23}} \equiv C$

$C_{V_{31}}$ $(= C_{V_{13}})$:



4) Si procede analogamente a quanto fatto per le velocità :

$$\underline{a}_{P\in 1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AP} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AP}$$

$$\Sigma ① : \quad \underline{a}_{Q\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{Q\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{Q\in 2} + \underline{a}^{(co)}_{Q\in 2} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AQ} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AQ} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{J}$$

$$\underline{a}_{R\in 3} = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{BR} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{BR}$$

$$\underline{a}_{C\in 2} = \underline{a}_{C\in 3}$$ (condizione di chiusura su punto notevole)

$$\underline{\ddot{s}\underline{J} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AC} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AC} + 2\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \dot{s}\underline{J} = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{BC} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{BC}}$$

EQ.^{NE} DI CHIUSURA (incognite: $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_3$)

– ESERCIZIO 2 –

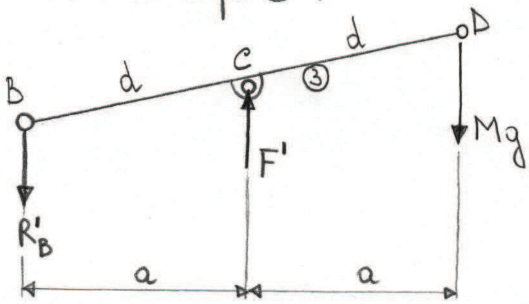
1) Agisce la forza peso Mg

Il corpo ② è scarico :

(per il rispetto delle cardinali, le reazioni della coppia prismatica devono essere nulle)

Dimostrazione rigorosa a pag. 4

Passiamo al corpo ③ :

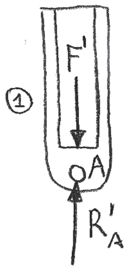


(non agiscono forze orizzontali)

$\circlearrowleft B)$ $F'a - Mg(2a) = 0 \longrightarrow F' = 2Mg$

$R'_B + Mg - F' = 0 \longrightarrow R'_B = Mg$

Infine il corpo ①:

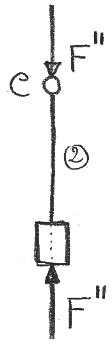


(corpo scarico)

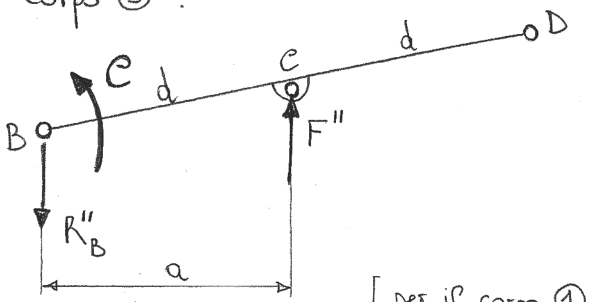
$$R'_A = F' = 2Mg$$

2) Agisce la coppia $\mathcal{C}$

Il corpo ② è ancora scarico:



Corpo ③:



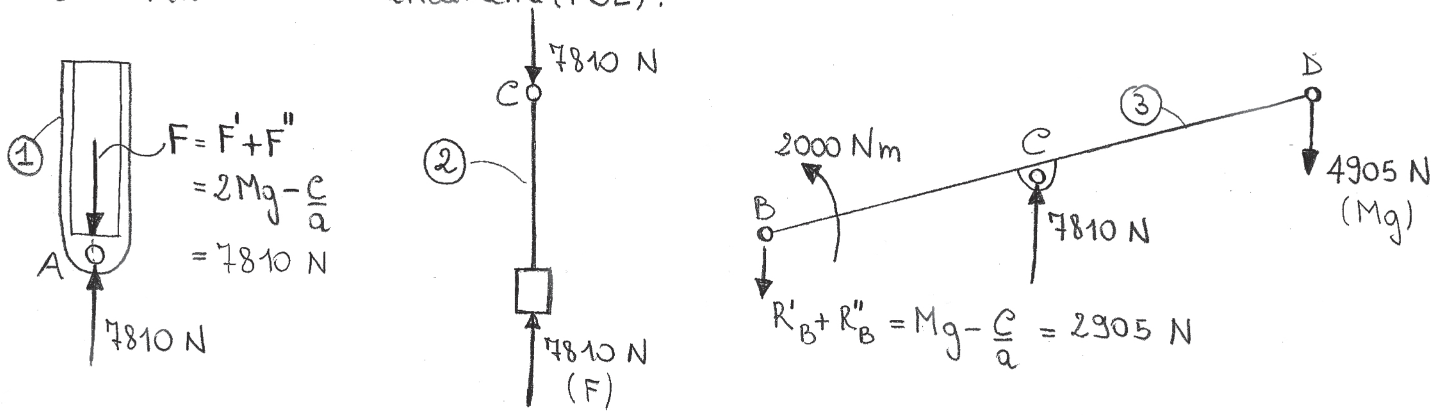
(nessuna forza orizzontale)

$$\circlearrowleft B)\ \mathcal{C} + F''a = 0 \longrightarrow F'' = -\frac{\mathcal{C}}{a}$$

$$R''_B = F'' = -\frac{\mathcal{C}}{a}$$

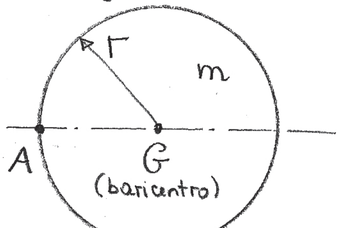
[per il corpo ①, analogamente al caso precedente, avremo $R''_A = F'' = -\frac{\mathcal{C}}{a}$]

3) DCL totali risolti numericamente (PSE):



– ESERCIZIO 3 –

Per un disco omogeneo, il momento d'inerzia I_G rispetto ad un asse baricentrico ortogonale al piano del foglio vale:



$$I_G = \frac{1}{2}mr^2$$

Per il teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner):

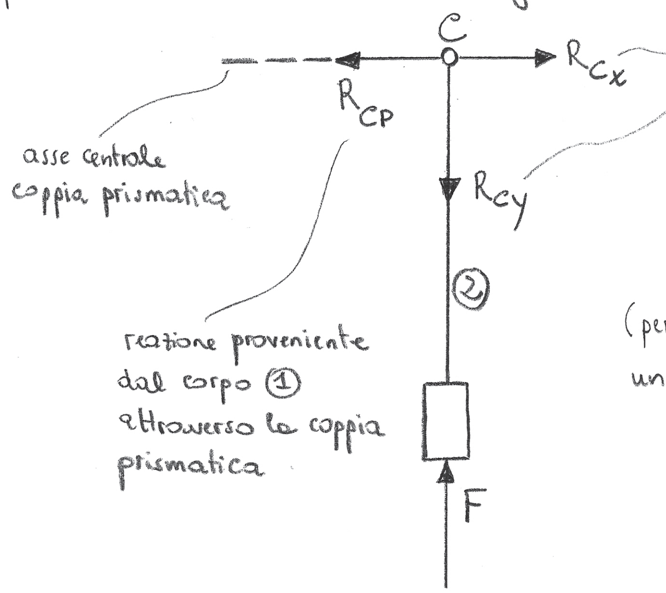
$$I_A = I_G + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

Pertanto:

$$m = \frac{2}{3}\frac{I_A}{r^2} = 10 \text{ kg}$$

• DIMOSTRAZIONE RIGOROSA DEL FATTO CHE IL CORPO ② È SCARICO (esercizio 2) •

Il corpo ② sarebbe sollecitato dalle seguenti azioni e reazioni:

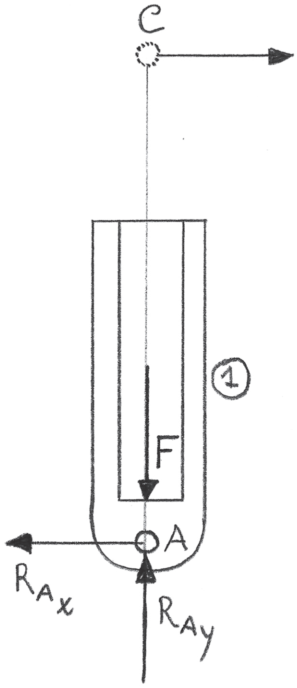


• $R_{C_y} = F$

• $R_{Cx} = R_{CP}$

(per l'equilibrio alla rotazione attorno a C, un eventuale M_{CP} dovrebbe essere nullo)

Passiamo al corpo ①:



• $R_{A_y} = F$

• $R_{Ax} = R_{CP}$

Tuttavia, l'equilibrio alla rotazione attorno ad A richiede:

$$\underline{R_{CP} = 0},$$

quindi anche

$$R_{A_x} = R_{C_x} = 0$$

In definitiva, sui corpi ① e ② deve agire una coppia a braccio nullo d'intensità F.