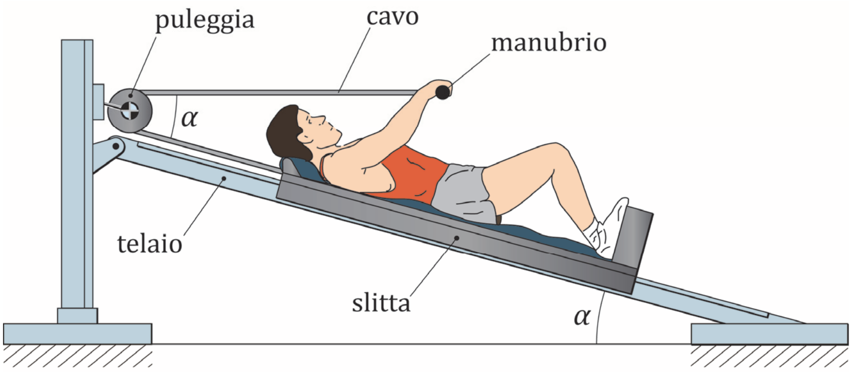
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 Giugno 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE A

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



Per potenziare i muscoli dorsali, l'atleta in figura esegue dei pull-down: ciò consiste nel ruotare in senso orario le braccia mantenute distese, spingendo il manubrio in basso/avanti, causando quindi la salita della slitta lungo il piano inclinato della macchina. Il cavo che collega slitta e manubrio è *flessibile* e *inestensibile*, ha massa trascurabile, e *non striscia* rispetto alla puleggia su cui si avvolge (quest'ultima ruota attorno ad una cerniera fissa).

1. Disegnare un meccanismo a 1 g.d.l. costituito da corpi rigidi (e cavo flessibile) che sia cinematicamente equivalente al caso reale.

Nella configurazione in figura (in cui il tratto superiore del cavo è orizzontale), considerando noti la lunghezza delle braccia *l*, l'angolo α, il raggio *r* della puleggia, l'angolo θ_b formato dalle braccia rispetto ad un asse orizzontale e la loro velocità angolare $\dot{\theta}_b = \Omega = \text{cost.}$ (oraria):

2. Determinare velocità della slitta e velocità angolare della puleggia.
3. Determinare accelerazione della slitta e accelerazione angolare della puleggia.

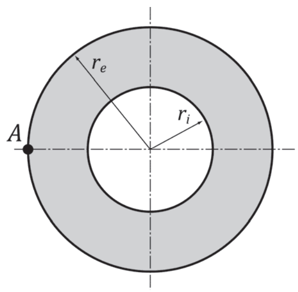
[*Suggerimento risolutivo*: dal momento che il cavo è teso e inestensibile, ad ogni istante di tempo la componente di velocità (e di accelerazione) di ciascun suo punto parallela all'asse del cavo deve essere la stessa.]

Esercizio 2

Si consideri la configurazione in figura (Es. 1) come configurazione di equilibrio statico. Sono disponibili i seguenti dati: massa atleta+slitta *m* = 100 kg; *l* = 60 cm; α = 15°; *r* = 8 cm; $\theta_b = 30°$; vincoli lisci.

1. Determinare la tensione nel cavo e la *forza* reattiva scambiata tra telaio e slitta.
2. Determinare la coppia netta che deve essere esercitata dai muscoli in corrispondenza delle articolazioni delle spalle per garantire equilibrio statico.
3. Determinare la reazione scambiata tra telaio e puleggia.

Esercizio 3

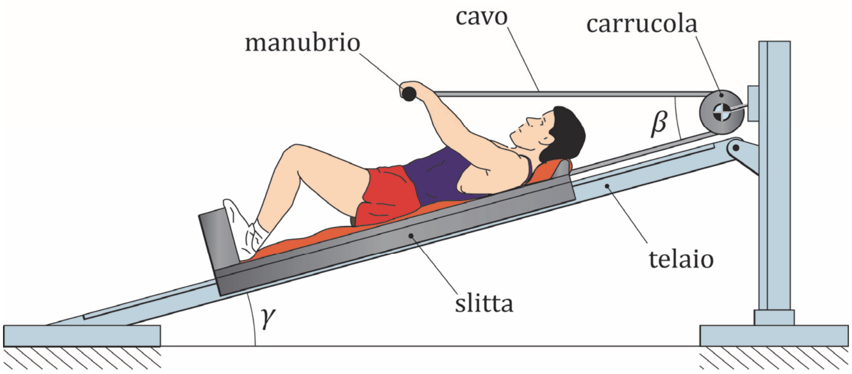


Del disco forato omogeneo rappresentato in figura sono noti la massa *m* ed i raggi r_i e r_e. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse ortogonale al piano del foglio e passante per il punto *A*.

10 Giugno 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



Per potenziare i muscoli dorsali, l'atleta in figura esegue dei pull-down: ciò consiste nel ruotare in senso antiorario le braccia mantenute distese, spingendo il manubrio in basso/avanti, causando quindi la salita della slitta lungo il piano inclinato della macchina. Il cavo che collega slitta e manubrio è *flessibile* e *inestensibile*, ha massa trascurabile, e *non striscia* rispetto alla carrucola su cui si avvolge (quest'ultima ruota attorno ad una cerniera fissa).

1. Disegnare un meccanismo a 1 g.d.l. costituito da corpi rigidi (e cavo flessibile) che sia cinematicamente equivalente al caso reale.

Nella configurazione in figura (in cui il tratto superiore del cavo è orizzontale), considerando noti la lunghezza delle braccia *l*, l'angolo $\beta = \gamma$, il raggio *r* della puleggia, l'angolo θ_b formato dalle braccia rispetto ad un asse orizzontale e la loro velocità angolare $\dot{\theta}_b = \Omega = \text{cost.}$ (antioraria):

2. Determinare velocità della slitta e velocità angolare della puleggia.
3. Determinare accelerazione della slitta e accelerazione angolare della puleggia.

[*Suggerimento risolutivo*: dal momento che il cavo è teso e inestensibile, ad ogni istante di tempo la componente di velocità (e di accelerazione) di ciascun suo punto parallela all'asse del cavo deve essere la stessa.]

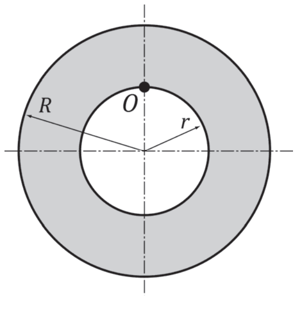
Esercizio 2

Si consideri la configurazione in figura (Es. 1) come configurazione di equilibrio statico. Sono disponibili i seguenti dati: massa atleta+slitta m = 90 kg; l = 50 cm; $\beta = \gamma$ = 20°; r = 7 cm; $\theta_b = 45°$; vincoli lisci.

1. Determinare la tensione nel cavo e la *forza* reattiva scambiata tra telaio e slitta.
2. Determinare la coppia netta che deve essere esercitata dai muscoli in corrispondenza delle articolazioni delle spalle per garantire equilibrio statico.
3. Determinare la reazione scambiata tra telaio e puleggia.

Esercizio 3

Del disco forato omogeneo rappresentato in figura sono noti la massa m ed i raggi r_i e r_e. Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse ortogonale al piano del foglio e passante per il punto O.

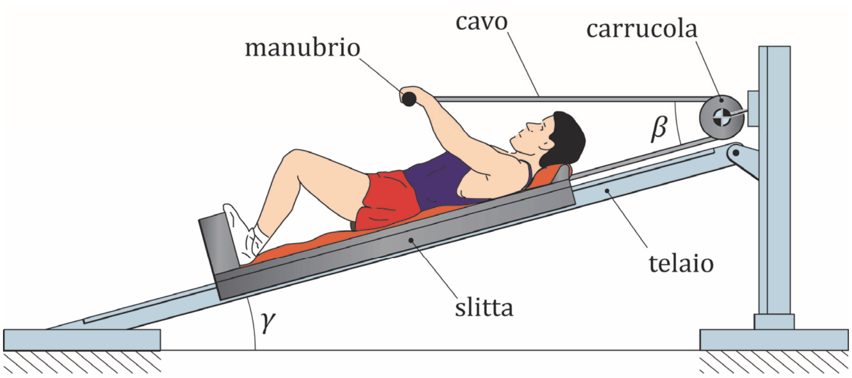


UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 Giugno 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1



Per potenziare i muscoli dorsali, l'atleta in figura esegue dei pull-down: ciò consiste nel ruotare in senso antiorario le braccia mantenute distese, spingendo il manubrio in basso/avanti, causando quindi la salita della slitta lungo il piano inclinato della macchina. Il cavo che collega slitta e manubrio è *flessibile* e *inestensibile*, ha massa trascurabile, e *non striscia* rispetto alla carrucola su cui si avvolge (quest'ultima ruota attorno ad una cerniera fissa).

1. Disegnare un meccanismo a 1 g.d.l. costituito da corpi rigidi (e cavo flessibile) che sia cinematicamente equivalente al caso reale.

Nella configurazione in figura (in cui il tratto superiore del cavo è orizzontale), considerando noti la lunghezza delle braccia l, l'angolo $\beta = \gamma$, il raggio r della puleggia, l'angolo θ_b formato dalle braccia rispetto ad un asse orizzontale e la loro velocità angolare $\dot{\theta}_b = \Omega = \text{cost.}$ (antioraria):

2. Determinare velocità della slitta e velocità angolare della puleggia.
3. Determinare accelerazione della slitta e accelerazione angolare della puleggia.

[*Suggerimento risolutivo*: dal momento che il cavo è teso e inestensibile, ad ogni istante di tempo la componente di velocità (e di accelerazione) di ciascun suo punto parallela all'asse del cavo deve essere la stessa.]

Esercizio 2

Si consideri la configurazione in figura (Es. 1) come configurazione di equilibrio statico. Sono disponibili i seguenti dati: massa atleta+slitta m = 90 kg; l = 50 cm; $\beta = \gamma = 20°$; r = 7 cm; $\theta_b = 45°$; vincoli lisci.

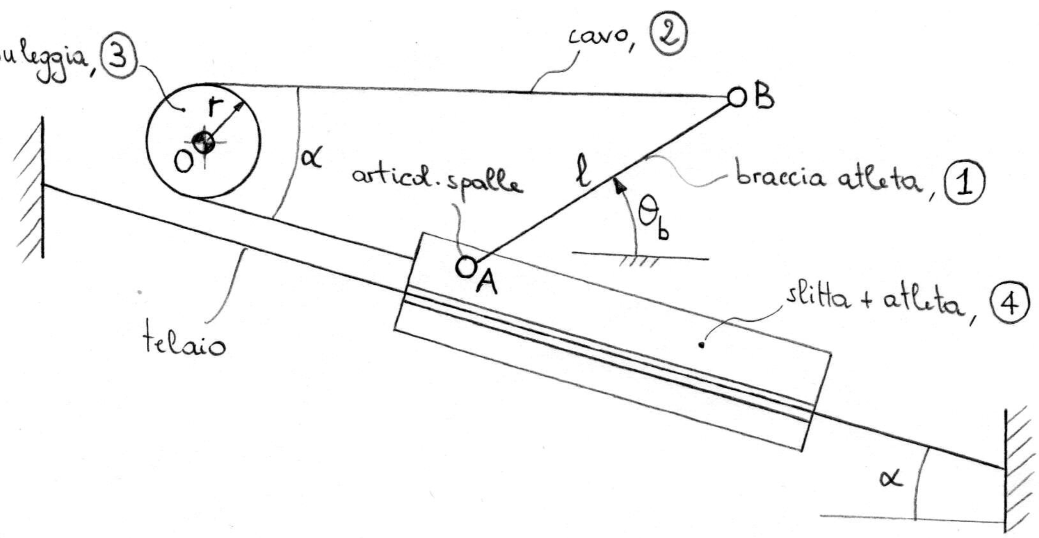
1. Determinare la tensione nel cavo e la *forza* reattiva scambiata tra telaio e slitta.
2. Determinare la coppia netta che deve essere esercitata dai muscoli in corrispondenza delle articolazioni delle spalle per garantire equilibrio statico.
3. Determinare la reazione scambiata tra telaio e puleggia.

• SOLUZIONE VERS. A •

[La soluzione della versione B è del tutto analoga.]

– ESERCIZIO 1 –

1)



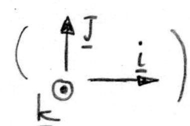
2) È molto utile sfruttare il suggerimento risolutivo dato. Nella configurazione in figura tutti i punti del cavo hanno la stessa componente di velocità parallelamente al cavo stesso, quindi nel ramo superiore del cavo tale componente, $v_{/\!/}$, sarà uguale a quella associata ai punti del ramo inferiore del cavo, e quindi alla velocità della slitta (che compie moto traslatorio):

$$\underline{v}_{slitta} = v_{/\!/}\,\underline{\lambda} \qquad , \qquad \text{con :}$$

Noi conosciamo $\dot{\theta}_b = \Omega = \text{cost.}$ (<0), quindi dobbiamo scrivere un'eq.^{ne} di chiusura per ottenere $\underline{v}_{slitta}$ in funzione dei dati del problema. Teniamo presente che mentre la velocità assoluta di tutti i punti del ramo inferiore del cavo è $v_{/\!/}\underline{\lambda}$, i punti del ramo superiore hanno anche una componente $v_\perp$, variabile da punto a punto (il ramo superiore sta ruotando).

Con queste premesse, chiudiamo sul punto notevole B:

- $\underline{v}_{BE1} = \underline{v}_{AE1} + \dot{\theta}_b \underline{k} \times \vec{AB} = v_{/\!/}\underline{\lambda} + \dot{\theta}_b \underline{k} \times \vec{AB}$
- $\underline{v}_{BE2} = v_{/\!/}\underline{i} + v_\perp \underline{J}$



Uguagliando le due espressioni:

$$\boxed{v_{/\!/}\underline{\lambda} + \Omega \underline{k} \times \vec{AB} = v_{/\!/}\underline{i} + v_\perp \underline{J}}$$

eq.^{ne} chiusura velocità (incognite: $v_{/\!/}$, $v_\perp$)

Dato che $v_\perp$ non è richiesta, si ottiene subito $v_{//}$ (e quindi $\underline{v}_{slitta}$) dall'eq.^{ne} di chiusura moltiplicandola scalarmente per il versore $\underline{i}$:

$$(v_{//}\underline{\lambda} + \Omega \underline{k} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \underline{i} = v_{//}, \quad \text{dove}: \begin{cases} \underline{\lambda} = (-\cos\alpha, \sin\alpha) \\ \overrightarrow{AB} = (l\cos\vartheta_b, l\sin\vartheta_b) \end{cases}$$

$$v_{//}(-\cos\alpha) - \Omega l \sin\vartheta_b = v_{//}$$

- $$\boxed{v_{//} = -\frac{\Omega l \sin\vartheta_b}{1+\cos\alpha}}$$ componente assiale della velocità dei punti del cavo; $\underline{v}_{slitta} = v_{//}\underline{\lambda}$

<u>Oss.</u> $v_{//} > 0$ essendo $\Omega < 0$.

Ottenere la velocità angolare della puleggia è immediato, dato che il cavo NON STRISCIA rispetto alla puleggia. Allora deve essere che la velocità (tangenziale) di ogni punto della superficie esterna della puleggia deve essere uguale a $v_{//}$, ovvero:

$$\dot{\vartheta}_3 r = v_{//} \quad \text{(dove si è assunto } \underline{\vartheta_3 > 0 \text{ se orario}})$$

- $$\boxed{\dot{\vartheta}_3 = \frac{v_{//}}{r}}$$ velocità angolare della puleggia

3) Per le accelerazioni il ragionamento è perfettamente identico a quello seguito per le velocità.

Chiusura su B:

$$a_{//}\underline{\lambda} + \cancelto{0}{\ddot{\vartheta}_b} \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\vartheta}_b^2 \overrightarrow{AB} = a_{//}\underline{i} + a_\perp \underline{J}$$

$$\boxed{a_{//}\underline{\lambda} - \Omega^2 \overrightarrow{AB} = a_{//}\underline{i} + a_\perp \underline{J}}$$ eq.^{ne} chiusura accelerazioni (incognite: $a_{//}$, $a_\perp$)

Moltiplicando scalarmente per $\underline{i}$:

$$a_{//}(-\cos\alpha) - \Omega^2 (l\cos\vartheta_b) = a_{//}$$

- $$\boxed{a_{//} = -\frac{\Omega^2 l \cos\vartheta_b}{1+\cos\alpha}}$$ componente assiale dell'accelerazione dei punti del cavo; $\underline{a}_{slitta} = a_{//}\underline{\lambda}$ (*)

<u>Oss.</u> $a_{//} < 0$ (la slitta sta decelerando)

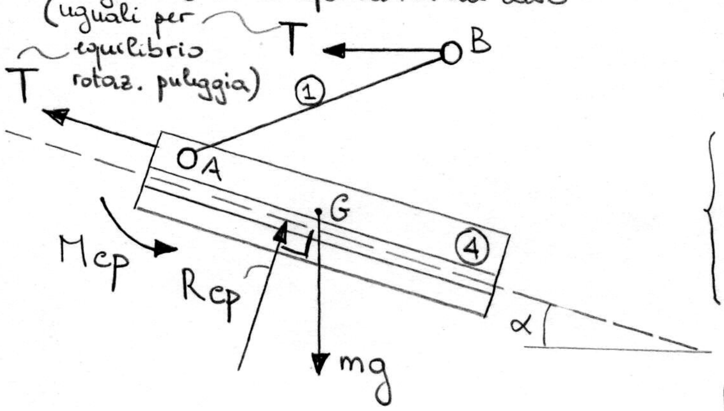
Per l'accelerazione angolare della puleggia, l'accelerazione <u>tangenziale</u> di ogni punto della superficie della puleggia deve essere uguale a $a_{//}$, e quindi:

- $$\boxed{\ddot{\vartheta}_3 = \frac{a_{//}}{r}}$$ accelerazione angolare della puleggia

(*) in alternativa si poteva derivare direttam. l'espressione di $v_{//}$ risp. a t (essendo valida "in grande")

— ESERCIZIO 2 —

1) Conviene isolare il sistema ① + ④, tagliando in corrispondenza del cavo:



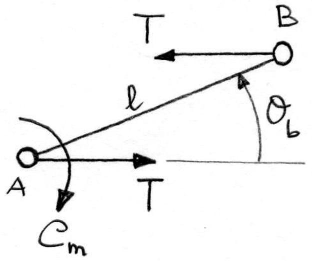
è richiesto di determinare solo T e Rcp, dunque basta scrivere la prima cardinale lungo $\underline{i}$ e lungo $\underline{J}$:

$$\begin{cases} \bullet\ \underline{i})\ R_{cp}\sin\alpha - T - T\cos\alpha = 0 \\ \bullet\ \underline{J})\ R_{cp}\cos\alpha + T\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

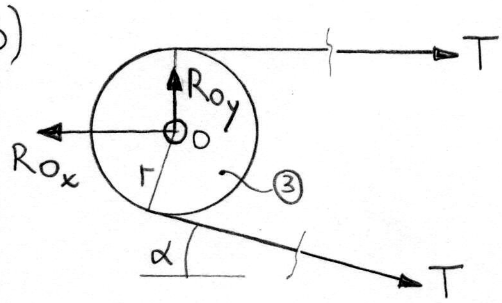
$$\begin{cases} \bullet\ R_{cp} = mg = 980\ \text{N} \\ \bullet\ T = mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 129\ \text{N} \end{cases}$$

2) Isolando ① e scrivendo la seconda cardinale:



$$\text{A})\ T\,l\sin\theta_b = C_m \longrightarrow \underbrace{C_m}_{\text{coppia muscolare netta}} = 38.7\ \text{Nm}$$

3)



Prima cardinale (2^a già soddisfatta dall'uguaglianza delle T):

$$\begin{cases} \bullet\ \underline{i})\ T + T\cos\alpha = R_{Ox} \\ \bullet\ \underline{J})\ R_{Oy} = T\sin\alpha \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \bullet\ R_{Ox} = mg\sin\alpha = 253.6\ \text{N} \\ \bullet\ R_{Oy} = mg\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = 33.4\ \text{N} \end{cases}$$

— ESERCIZIO 3 —

Momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico ⊥ piano foglio:

$$J_G = \rho\int_{r_i}^{r_e} r^2 \underbrace{2\pi r\,dr}_{dS} = 2\pi\rho\int_{r_i}^{r_e} r^3\,dr = \frac{\rho}{2}\pi\underbrace{(r_e^4 - r_i^4)}_{(r_e^2-r_i^2)(r_e^2+r_i^2)} = \frac{m}{2}(r_e^2 + r_i^2)$$

Adesso, con il teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner):

$$J_A = J_G + m r_e^2 = \frac{m}{2}(r_e^2 + r_i^2) + m r_e^2, \quad \text{quindi:}$$

$$\bullet\ \boxed{J_A = \frac{m}{2}(3r_e^2 + r_i^2)}$$