UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

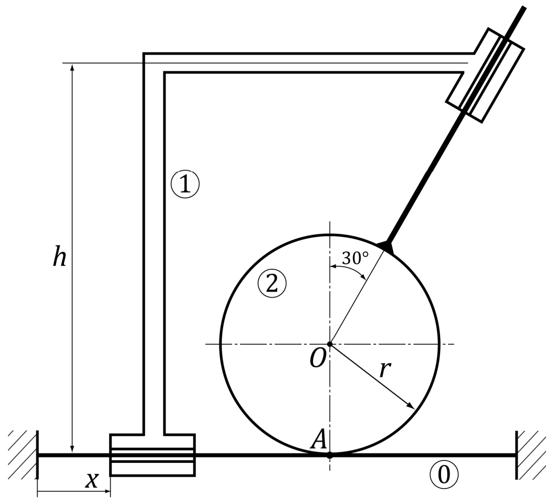
10 Giugno 2015

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – VERSIONE A

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

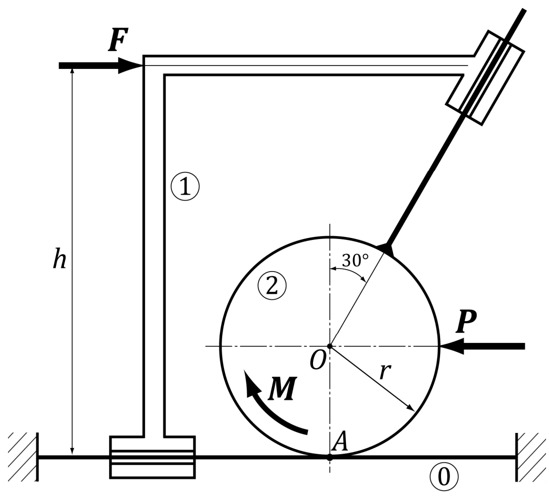
Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e quelli delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$, entrambi positivi; le lunghezze h e r. La natura dei vincoli è tale da garantire il contatto (senza attrito) tra i corpi 0 (telaio) e 2 durante il moto.



1. **Che tipo di vincolo deve esistere tra i corpi 0 e 2 affinché il meccanismo abbia un grado di libertà?**
2. **Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.**
3. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ricavare l'espressione dell'accelerazione del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agiscono, non contemporaneamente, la coppia ***M***, assegnata, e la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza ***F***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. **Determinare la forza *F'* e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia *M*.**
2. Determinare la forza ***F''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza ***P***.

Per i punti **1** e 2, **indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi *risolti in funzione dei dati del problema*.**

Esercizio 3

È assegnato il seguente sistema di forze (componenti cartesiane):

$$F_1 = (0, 2, 7.5)\ \text{N},\quad F_2 = (0, -3.6, 11)\ \text{N},\quad F_3 = (0, 8.7, -4)\ \text{N}$$

e le coordinate dei relativi punti di applicazione:

$$P_1 = (0, 0.8, 2)\ \text{m},\quad P_2 = (0, 0, 0)\ \text{m},\quad P_3 = (0, -2.3, 1)\ \text{m}$$

1. Determinare il valore del trinomio invariante del sistema di forze assegnato.
2. Da cosa è costituito il sistema equivalente minimo (il più semplice)?

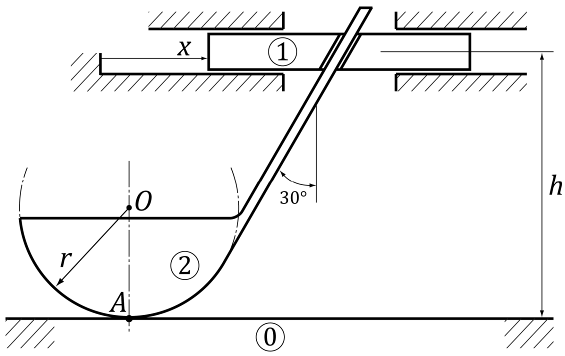
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 Giugno 2015

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – VERSIONE B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

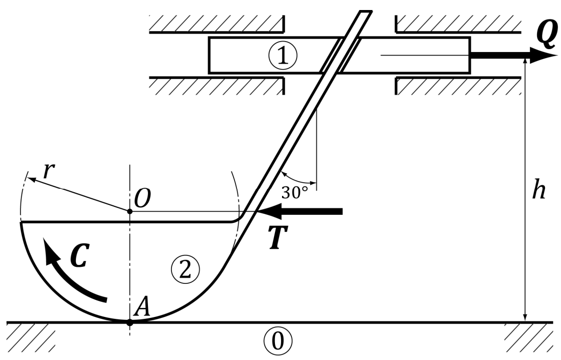
Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e quelli delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$, entrambi positivi; le lunghezze h e r. La natura dei vincoli è tale da garantire il contatto (senza attrito) tra i corpi 0 (telaio) e 2 durante il moto.



1. **Che tipo di vincolo deve esistere tra i corpi 0 e 2 affinché il meccanismo abbia un grado di libertà?**
2. **Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.**
3. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
4. Ricavare l'espressione dell'accelerazione del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agiscono, non contemporaneamente, la coppia ***C***, assegnata, e la forza ***T***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza ***Q***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. **Determinare la forza *Q'* e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia *C*.**
2. Determinare la forza ***Q''*** e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza ***T***.

Per i punti **1** e 2, **indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi *risolti in funzione dei dati del problema*.**

Esercizio 3

È assegnato il seguente sistema di forze (componenti cartesiane):

$$F_1 = (0, 3.2, 5)\ \text{N},\quad F_2 = (0, -12, 7.1)\ \text{N},\quad F_3 = (0, 4.5, 10)\ \text{N}$$

e le coordinate dei relativi punti di applicazione:

$$P_1 = (0,0,0)\ \text{m},\quad P_2 = (0, -3.7, 6)\ \text{m},\quad P_3 = (0, -2, 5.9)\ \text{m}$$

1. Determinare il valore del trinomio invariante del sistema di forze assegnato.
2. Da cosa è costituito il sistema equivalente minimo (il più semplice)?

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

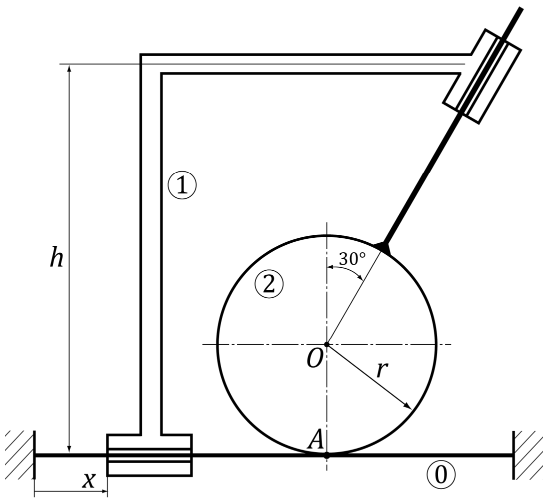
10 Giugno 2015

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

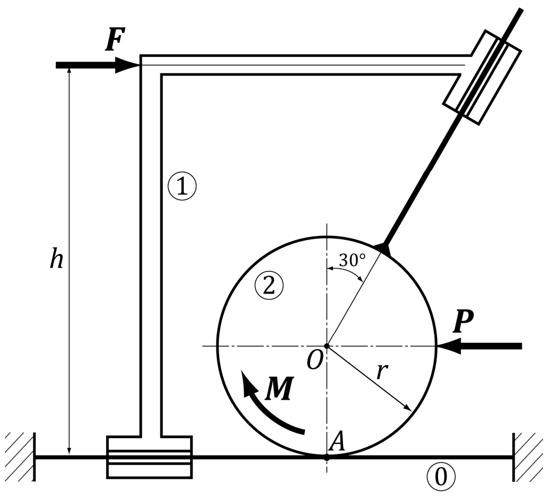
Del meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata, sono assegnati: il valore della coordinata x del corpo 1 e quelli delle sue derivate temporali $\dot{x}$ e $\ddot{x}$, entrambi positivi; le lunghezze h e r. La natura dei vincoli è tale da garantire il contatto (senza attrito) tra i corpi 0 (telaio) e 2 durante il moto.



1. Che tipo di vincolo deve esistere tra i corpi 0 e 2 affinché il meccanismo abbia un grado di libertà?
2. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.
3. Determinare il centro delle velocità del corpo 2.
4. Ricavare l'espressione dell'accelerazione del generico punto di ogni corpo, per via grafica oppure per via analitica, in funzione dei dati del problema.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 2 agiscono, non contemporaneamente, la coppia $\boldsymbol{M}$, assegnata, e la forza $\boldsymbol{P}$, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La forza $\boldsymbol{F}$, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



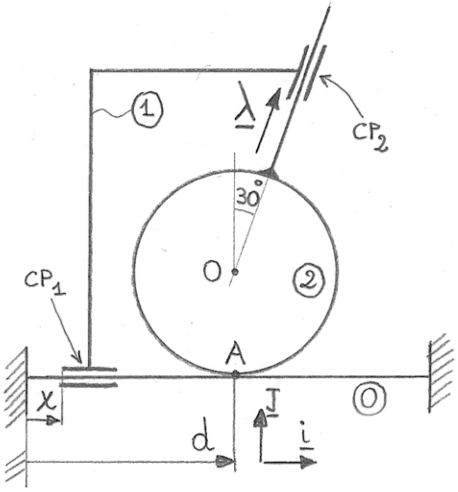
1. Determinare la forza $\boldsymbol{F}'$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la coppia $\boldsymbol{M}$.
2. Determinare la forza $\boldsymbol{F}''$ e tutte le reazioni quando agisce soltanto la forza $\boldsymbol{P}$.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero dei corpi *risolti in funzione dei dati del problema*.

• SOLUZIONE COMPITO I PARTE, VERSIONE A •

(La versione B ha la stessa soluzione.)

— ESERCIZIO 1 —



1) Il corpo Ø è bloccato (telaio), quindi l'analisi dei g.d.l. coinvolge solo i corpi 1 e 2:

- 2 corpi rigidi nel piano : 6 g.d.l. max
- 2 coppie prismatiche : −4 "

Per avere 1 g.d.l. residuo, il vincolo tra 0 e 2 deve togliere 1 g.d.l., mantenendo i corpi in contatto, quindi:

- carrello , oppure • RCS

Oss. Un vincolo RSS bloccherebbe completamente il meccanismo.

2) La coppia prismatica CP_2, solidale al corpo 1 e mobile di moto traslatorio rettilineo, impedisce al corpo 2 di mutare la sua orientazione $\longrightarrow$ $\underline{\omega}_2$ e $\dot{\underline{\omega}}_2$ sono nulli. Conseguenza di questo fatto è che anche 2 deve traslare; in particolare, poiché 2 deve essere sempre in contatto col telaio, il suo moto traslatorio deve essere orizzontale, esattamente come quello di 1. Questo ragionamento è sufficiente per concludere che 2 e 1 si muovono come un unico corpo che trasla orizzontalmente, con velocità:

$$\underline{v}_{Q\in 2} = \underline{v}_{P\in 1} = \dot{x}\,\underline{i} \qquad \text{(moto traslatorio rettilineo)}$$

Dimostriamolo anche analiticamente, scrivendo $\underline{v}_{A\in 2}$ in due modi diversi (oppure anche $\underline{v}_{O\in 2}$):

$$\underline{v}_{A\in 2} = \dot{d}\,\underline{i} \qquad \text{(con d coord. assoluta, v. fig. sopra)}$$

Mettendosi solidali a 1:

$$\Sigma(1):\ \underline{v}_{A\in 2} = \underline{v}^{(r)}_{A\in 2} + \underline{v}^{(tr)}_{A\in 2} = \dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{x}\,\underline{i}$$

Uguagliando otteniamo l'eq. di chiusura:

$$\dot{d}\,\underline{i} = \dot{s}\,\underline{\lambda} + \dot{x}\,\underline{i} \longrightarrow \dot{d}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \dot{s}\begin{bmatrix}\sin 30°\\ \cos 30°\end{bmatrix} + \dot{x}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot \underline{J}]{\cdot \underline{i}} \begin{cases}\dot{d} = \dfrac{\dot{s}}{2} + \dot{x}\\[2mm] 0 = \dot{s}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Le due eq.^{ni} scalari forniscono

$$\dot{s} = 0\ , \quad \dot{d} = \dot{x}$$

Inoltre ricordiamo che $\underline{\omega}_2 = \underline{0}$ per la presenza della CP_2. In conclusione:

$$\underline{v}_{Q\in 2} = \underline{v}_{A\in 2} + \cancel{\underline{\omega}_2} \times \overrightarrow{AQ} = \dot{d}\,\underline{i} = \dot{x}\,\underline{i}$$

3) Poiché i moti dei due corpi sono tutti traslatori (sia assoluti che relativi), tutti i centri delle velocità non esistono.

4) Per quanto osservato al punto 2, potremmo già concludere:

$$\underline{a}_{Q\in 2} = \underline{a}_{P\in 1} = \ddot{x}\,\underline{i}$$

Dimostriamolo analiticamente, scrivendo $\underline{a}_{A\in 2}$ in due modi diversi (oppure $\underline{a}_{O\in 2}$):

$$\underline{a}_{A\in 2} = \ddot{d}\,\underline{i}$$

Mettendosi solidali a 1:

$$\Sigma\,①:\ \underline{a}_{A\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{A\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{A\in 2} + \underline{a}^{(Co)}_{A\in 2} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \ddot{x}\,\underline{i} + \underline{0}$$

(perché $\underline{\omega}^{(tr)} = \underline{\omega}_1 = \underline{0}$)

Uguagliando:

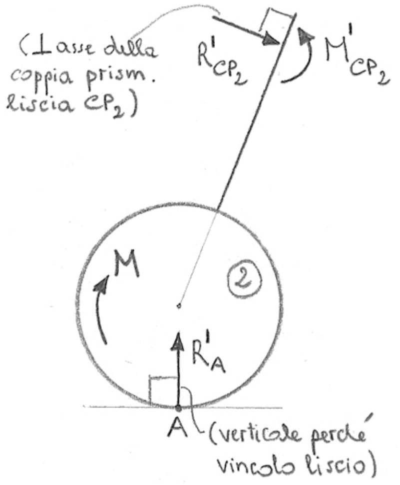
$$\ddot{d}\,\underline{i} = \ddot{s}\,\underline{\lambda} + \ddot{x}\,\underline{i} \longrightarrow \ddot{s} = 0,\ \ddot{d} = \ddot{x}$$

Tenendo presente che $\dot{\underline{\omega}}_2 = \underline{0}$ si ottiene:

$$\underline{a}_{Q\in 2} = \underline{a}_{A\in 2} + \cancelto{0}{\dot{\underline{\omega}}_2} \times \overrightarrow{AQ} - \cancelto{0}{\omega_2^2}\,\overrightarrow{AQ} = \ddot{d}\,\underline{i} = \ddot{x}\,\underline{i}$$

— ESERCIZIO 2 —

1) $\boxed{\text{Agisce } \underline{M}}$ Iniziamo dal corpo 2, sul quale sono presenti meno incognite.



Con riferimento al DCL a lato, vediamo che le due reazioni R'_A e R'_{CP_2}, aventi direzioni fissate dalla natura dei vincoli, non possono soddisfare la prima cardinale a meno che non sia:

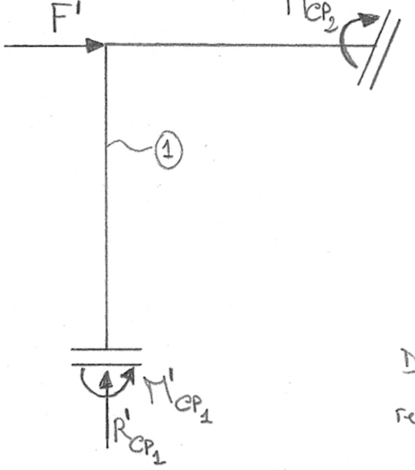
$$R'_A = R'_{CP_2} = 0$$

(dimostrabili anche proiettando analiticamente lungo $\underline{i}$ e $\underline{J}$)

Inoltre, per il rispetto della seconda cardinale:

$$M'_{CP_2} = M$$

Spostiamoci sul corpo 1. Per la 1ª cardinale:



$$F' = 0$$
$$R'_{CP_1} = 0$$

Per la 2ª cardinale:

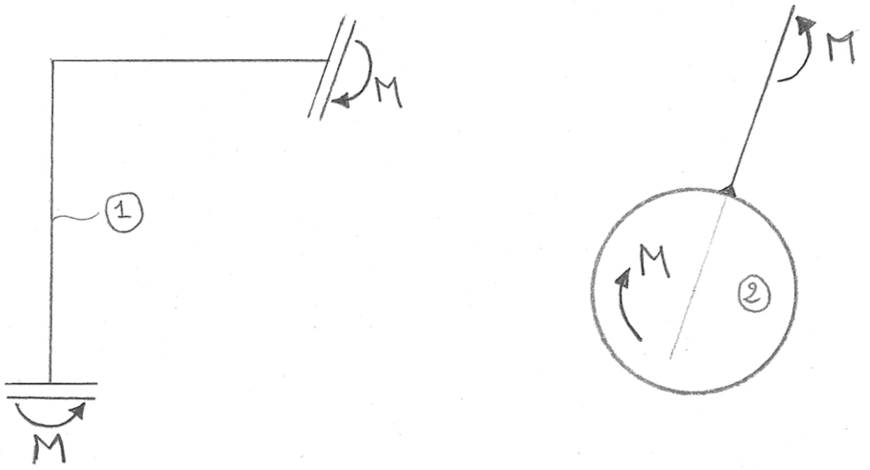
$$M'_{CP_1} = M'_{CP_2} = M$$

Dunque la coppia esterna $\underline{M}$ è equilibrata interamente dalla coppia di reazione della coppia prismatica CP_1, senza bisogno della forza $\underline{F}$.

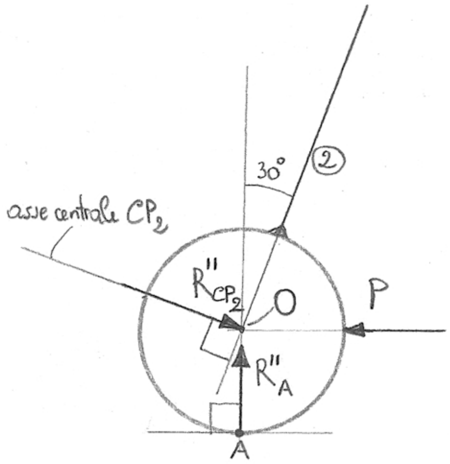
Passiamo ai diagrammi di corpo libero risolti.

DCL risolti :

$(F' = 0)$



2) $\boxed{\text{Agisce } \underline{P}}$ Iniziamo di nuovo dal corpo 2.

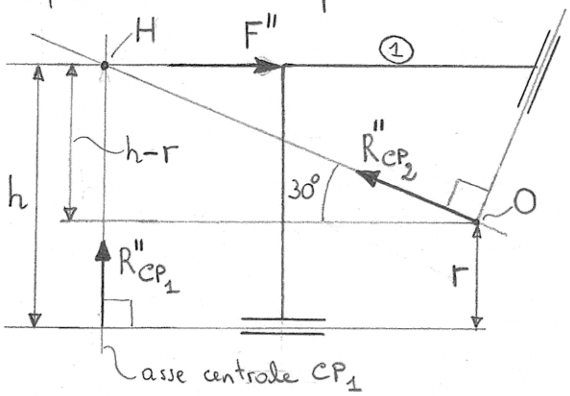


Le rette di applicazione delle forze P, R''_A e R''_{CP_2} si intersecano in O, e così facendo soddisfano la 2ª cardinale.

Prima cardinale :

$$\begin{aligned} &\underline{i}) \quad -P + R''_{CP_2}\cos 30° = 0 \\ &\underline{J}) \quad R''_A - R''_{CP_2}\sin 30° = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} R''_{CP_2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}P \\ R''_A = \dfrac{R''_{CP_2}}{2} = \dfrac{P}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Spostiamoci sul corpo 1 :



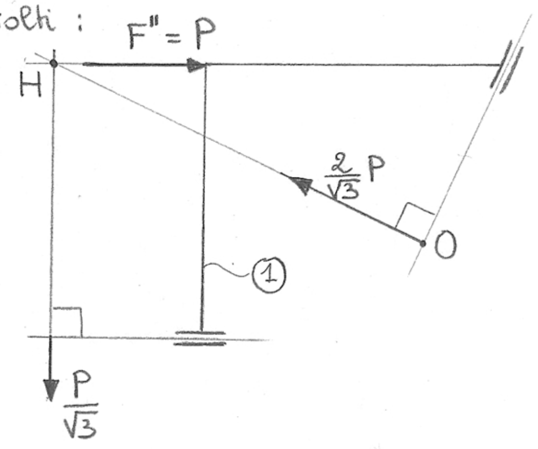
Le rette di applicazione delle forze F'', R''_{CP_1} e R''_{CP_2} si intersecano nel punto indicato con H, e così facendo soddisfano la 2ª cardinale.

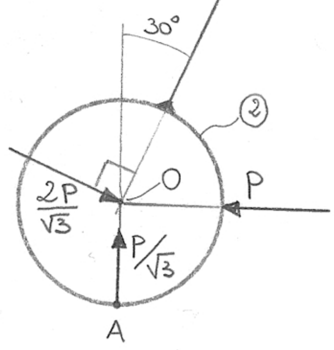
Prima cardinale :

$$\begin{aligned} &\underline{i}) \quad F'' - R''_{CP_2}\cos 30° = 0 \\ &\underline{J}) \quad R''_{CP_1} + R''_{CP_2}\sin 30° = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} F'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R''_{CP_2} = P \\ R''_{CP_1} = -\dfrac{R''_{CP_2}}{2} = -\dfrac{P}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

<u>N.B.</u> Il punto H è ben definito : la sua distanza verticale dal punto O è $(h-r)$ e quella orizzontale è $(h-r)\cot 30° = \sqrt{3}\,(h-r)$.

DCL risolti :





— Esercizio 3 —

1) Osservando le componenti cartesiane delle tre forze, si nota subito che le loro componenti x sono nulle. Lo stesso dicasi per le coordinate x dei loro punti di applicazione. Pertanto, si tratta di un SISTEMA PIANO di vettori applicati (e il piano in questione è il piano y-z). Il trinomio invariante è dunque nullo (ovviamente lo si può verificare con i calcoli).

2) Essendo $\tau = 0$, il sistema equivalente minimo è costituito dalla sola risultante applicata in un punto qualunque dell'asse centrale.