UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

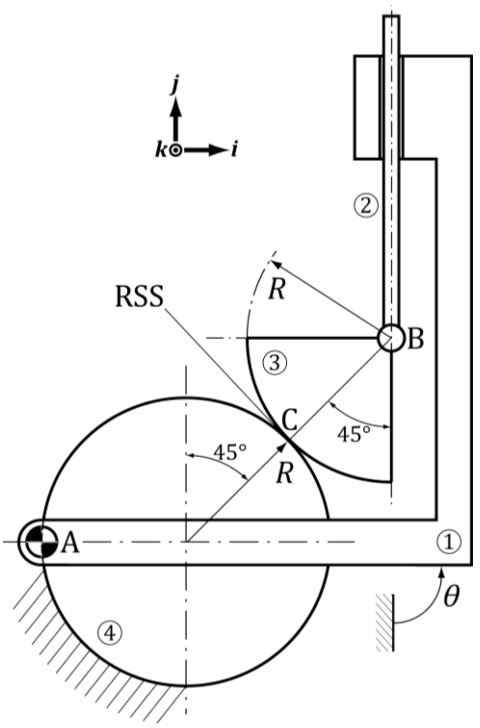
10 Gennaio 2014

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – versione A
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Nel meccanismo in figura, il disco 4, *fisso* (telaio), si collega al corpo 1 mediante una cerniera (fissa) e al corpo 3 mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ del corpo 1, entrambe positive, e i parametri geometrici indicati.

1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo e risolvere per via grafica il problema delle velocità (equazione di chiusura, triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite).
2. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente, in funzione dei dati del problema, servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati.
3. Individuare tutti i centri delle velocità.
4. Individuare tutti i centri delle velocità relativi.
5. Impostare il problema delle accelerazioni fino a ottenere l'equazione di chiusura.



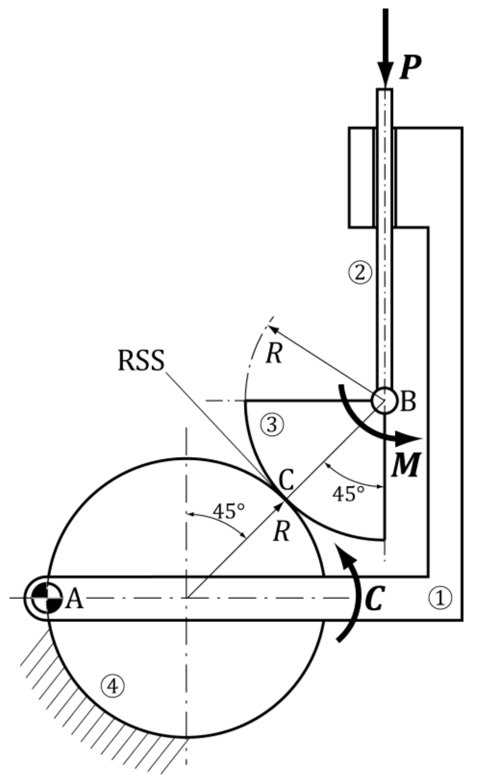
Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 3 agisce la coppia ***M***, assegnata, e sull'asta 2 la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La coppia ***C***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia ***M***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.
3. Applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per ottenere i diagrammi di corpo libero totali.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero parziali.

Tutti i diagrammi di corpo libero devono essere ***risolti in funzione dei dati del problema*** (e *verificando che siano equilibrati*).



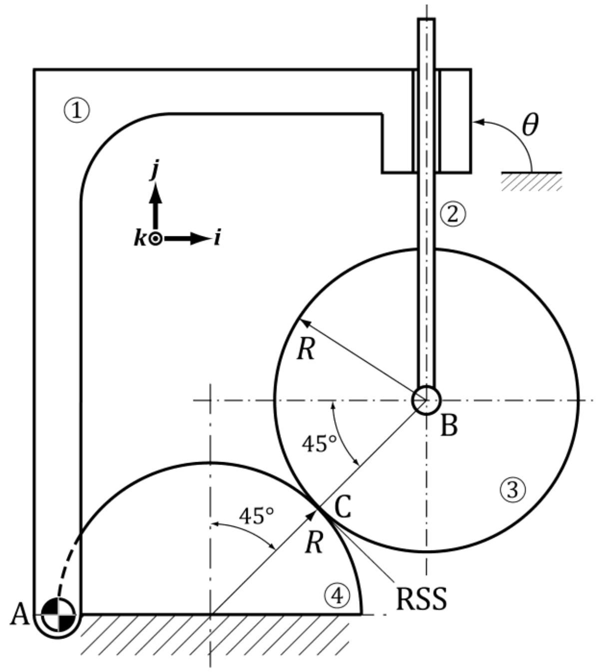
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 Gennaio 2014

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – versione B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

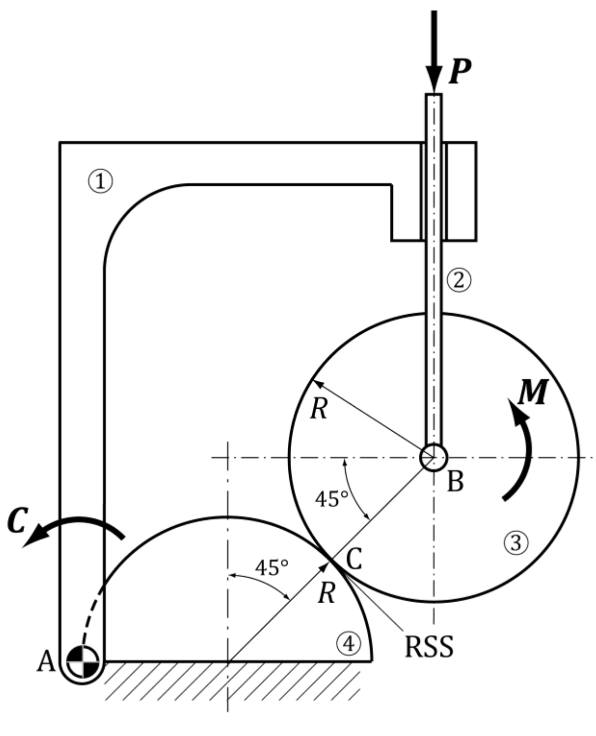
Nel meccanismo in figura, il semidisco 4, *fisso* (telaio), si collega al corpo 1 mediante una cerniera (fissa) e al disco 3 mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ del corpo 1, entrambe positive, e i parametri geometrici indicati.



1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo e risolvere per via grafica il problema delle velocità (equazione di chiusura, triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite).
2. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente, in funzione dei dati del problema, servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati.
3. Individuare tutti i centri delle velocità.
4. Individuare tutti i centri delle velocità relativi.
5. Impostare il problema delle accelerazioni fino a ottenere l'equazione di chiusura.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul disco 3 agisce la coppia ***M***, assegnata, e sull'asta 2 la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La coppia ***C***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la coppia ***M***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.
3. Applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per ottenere i diagrammi di corpo libero totali.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero parziali.

Tutti i diagrammi di corpo libero devono essere ***risolti in funzione dei dati del problema*** (e *verificando che siano equilibrati*).

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

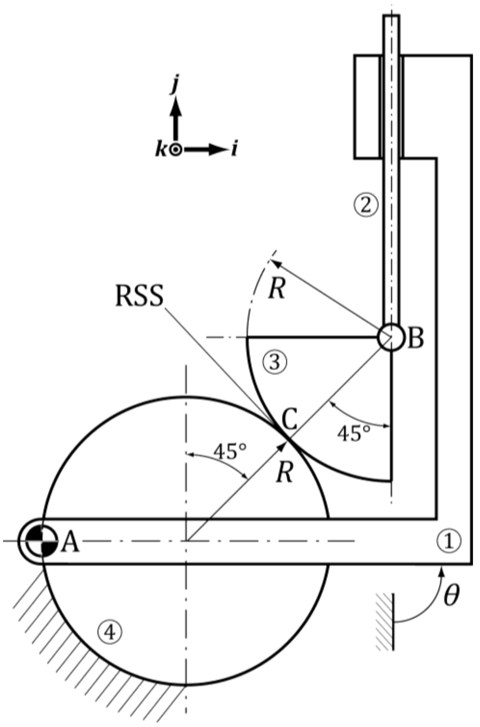
10 Gennaio 2014

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Nel meccanismo in figura, il disco 4, *fisso* (telaio), si collega al corpo 1 mediante una cerniera (fissa) e al corpo 3 mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento. Nell'atto di moto rappresentato, sono assegnati la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ del corpo 1, entrambe positive, e i parametri geometrici indicati.

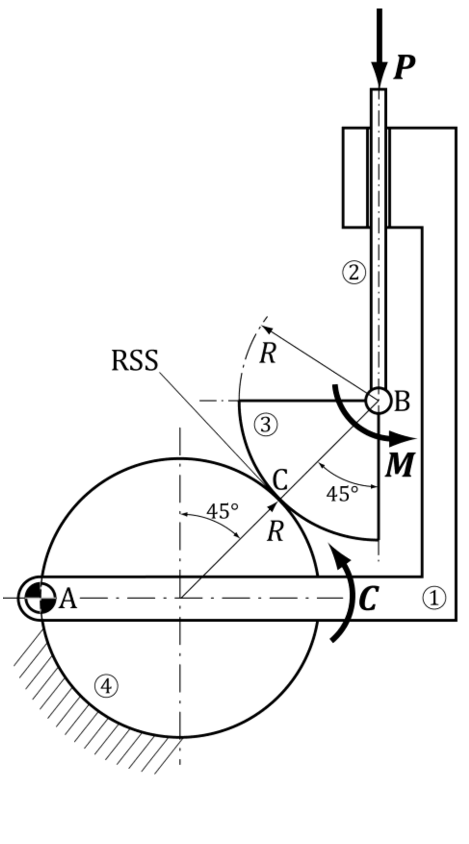


1. Ricavare l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo e risolvere per via grafica il problema delle velocità (equazione di chiusura, triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite).
2. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente, in funzione dei dati del problema, servendosi dei versori (***i***, ***j***, ***k***) indicati.
3. Individuare il centro delle velocità del corpo 2.
4. Impostare il problema delle accelerazioni fino a ottenere l'equazione di chiusura.

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio precedente. Sul corpo 3 agisce la coppia ***M***, assegnata, e successivamente sull'asta 2 agisce la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).

La coppia ***C***, avente modulo e verso incogniti, deve essere applicata al corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.



1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce la coppia ***M***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce la forza ***P***.

Per ciascuno dei due punti precedenti, indicare chiaramente l'ordine secondo cui vengono analizzati i vari corpi, e riportarne i diagrammi di corpo libero, ***risolti in funzione dei dati del problema*** (e *verificando che siano equilibrati*).

• SOLUZIONE COMPITO I PARTE •

– VERSIONE A –

N.B. Le due versioni A e B del compito di I parte (e la I parte dell'intero) hanno esattamente la stessa soluzione.

– ESERCIZIO 1 –

1) $\underline{v}_{PE1} = \dot\theta \underline{k} \times \overrightarrow{AP}$

$\underline{v}_{QE2} = \underline{v}_{BE2} + \dot\theta_2 \underline{k} \times \overrightarrow{BQ}$

B è un punto notevole: $\underline{v}_{BE2} = \underline{v}_{BE3}$

La presenza di una coppia prismatica assicura: $\dot\theta = \dot\theta_2$ e $\ddot\theta = \ddot\theta_2$

$\underline{v}_{RE3} = \cancelto{0}{\underline{v}_{CE3}} + \dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CR} \longrightarrow \underline{v}_{BE3} = \dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \underline{v}_{BE2}$

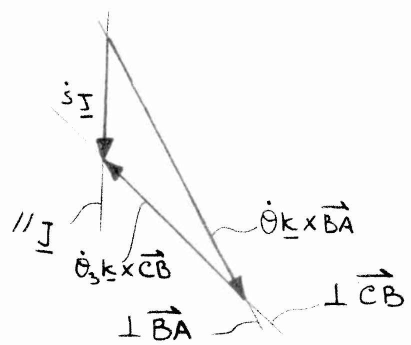
Si riscrive $\underline{v}_{QE2}$ mettendosi solidali al corpo 1:

$$\Sigma 1: \underline{v}_{QE2} = \underline{v}_{QE2}^{(r)} + \underline{v}_{QE2}^{(tr)} = \underbrace{\dot s}_{\text{coord. relativa}} \underline{J} + \dot\theta \underline{k} \times \overrightarrow{AQ}$$

Si ottiene l'eq.^{ne} di chiusura uguagliando le due espressioni ottenute per $\underline{v}_{QE2}$:

$$\dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} + \underbrace{\dot\theta_2}_{=\dot\theta} \underline{k} \times \overrightarrow{BQ} = \dot s \underline{J} + \dot\theta \underline{k} \times \overrightarrow{AQ}$$

$$\boxed{\dot\theta_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} + \dot\theta \underline{k} \times \overrightarrow{BA} = \dot s \underline{J}}$$ (incognite: $\dot\theta_3$, $\dot s$)



$\dot\theta > 0$ (dato)

$\dot\theta_3 > 0$

$\dot s < 0$

2) Componenti cartesiane di $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{CB} = \left(R\frac{\sqrt{2}}{2}, R\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(-R(1+\sqrt{2}), -R\sqrt{2}, 0 \right)$$

Si svolgono i prodotti vettoriali nell'eq.^{ne} di chiusura:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot\theta_3 \\ R\frac{\sqrt2}{2} & R\frac{\sqrt2}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot\theta \\ -R(1+\sqrt2) & -R\sqrt2 & 0 \end{vmatrix} = \dot s\,\underline{j}$$

$$\underline{i}\left(-\dot\theta_3 R\frac{\sqrt2}{2}\right) + \underline{j}\left(\dot\theta_3 R\frac{\sqrt2}{2}\right) + \underline{i}\left(\dot\theta R\sqrt2\right) + \underline{j}\left(-\dot\theta R(1+\sqrt2)\right) = \dot s\,\underline{j},$$

da cui le due eq.ni scalari:

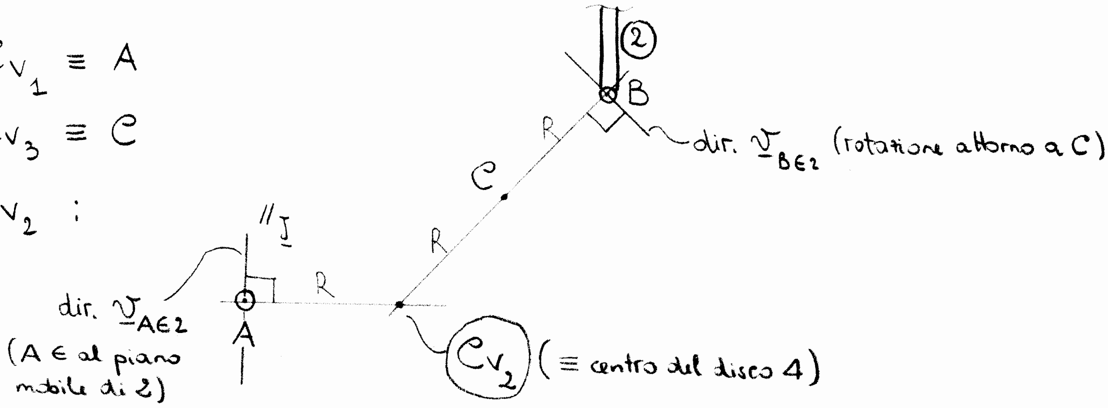
$$\begin{cases} -\dot\theta_3 R\frac{\sqrt2}{2} + \dot\theta R\sqrt2 = 0 \\ \dot\theta_3 R\frac{\sqrt2}{2} - \dot\theta R(1+\sqrt2) = \dot s \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot\theta_3 = 2\dot\theta \\ \dot s = -\dot\theta R \end{cases}$$

(segni concordi con quelli ottenuti col triangolo delle velocità)

3) $C_{v_1} \equiv A$

$C_{v_3} \equiv C$

C_{v_2} :

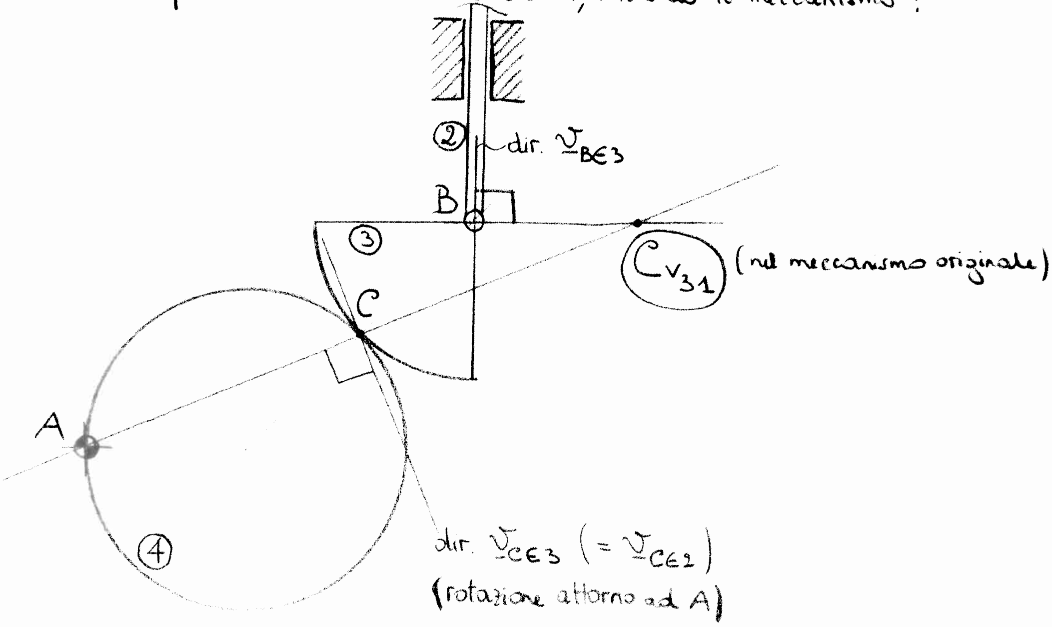


4) $C_{v_{12}}$ non esiste (il moto relativo è traslatorio)

$C_{v_{23}} \equiv B$

$C_{v_{13}} = C_{v_{31}}$:

si blocca il corpo 1 e si sblocca il telaio 4, ottenendo il meccanismo:



(al solito, in alternativa si poteva bloccare 3 e sbloccare 4 per determinare $C_{v_{13}}$, oppure si potevano usare le triplette di Kennedy)

5) $\underline{a}_{P\in 1} = \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{AP} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{AP}$

$\underline{a}_{Q\in 2} = \underline{a}_{B\in 2} + \ddot{\theta}_2\,\underline{k} \times \overrightarrow{BQ} - \dot{\theta}_2^2\,\overrightarrow{BQ} = \underline{a}_{B\in 3} + \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{BQ} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{BQ}$

$\underline{a}_{R\in 3} = \underline{a}_{C\in 3} + \ddot{\theta}_3\,\underline{k} \times \overrightarrow{CR} - \dot{\theta}_3^2\,\overrightarrow{CR}$, dove:

$\underline{a}_{C\in 3} = \underline{a}_{C_{V_3}} = -D\dot{\theta}_3^2\,\underline{n}$, con $\underline{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ $\nearrow^{\underline{n}}$ 45°,

in cui:

$$D^{-1} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m} = \frac{1}{\underline{n}\cdot\overrightarrow{CO_4}} - \frac{1}{\underline{n}\cdot\overrightarrow{CB}} = \frac{1}{-R} - \frac{1}{R} = -\frac{2}{R} \longrightarrow D = -\frac{R}{2}$$

centro disco 4

Pertanto:

$$\underline{a}_{C\in 3} = \frac{R}{2}\dot{\theta}_3^2\,\underline{n}$$

Possiamo ora esplicitare $\underline{a}_{Q\in 2}$ come:

$$\underline{a}_{Q\in 2} = \frac{R}{2}\dot{\theta}_3^2\,\underline{n} + \ddot{\theta}_3\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_3^2\,\overrightarrow{CB} + \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{BQ} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{BQ}$$

Analogamente a quanto fatto per le velocità, riscriviamo $\underline{a}_{Q\in 2}$ mettendosi solidali a 1:

$$\Sigma 1: \quad \underline{a}_{Q\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{Q\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{Q\in 2} + \underline{a}^{(co)}_{Q\in 2} = \ddot{s}\,\underline{J} + \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{AQ} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{AQ} + 2\dot{\theta}\,\underline{k} \times \dot{s}\,\underline{J}$$

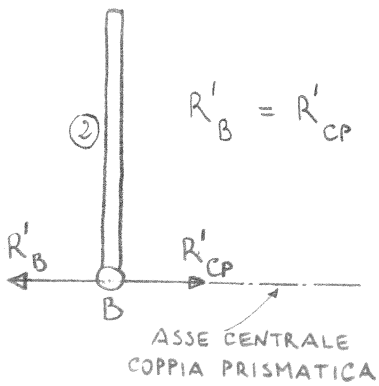
Uguagliando le due espressioni si ottiene l'eq. di chiusura:

$$\boxed{\frac{R}{2}\dot{\theta}_3^2\,\underline{n} + \ddot{\theta}_3\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_3^2\,\overrightarrow{CB} + \ddot{\theta}\,\underline{k} \times \overrightarrow{BA} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{BA} = \ddot{s}\,\underline{J} + 2\dot{\theta}\,\underline{k} \times \dot{s}\,\underline{J}}$$ (nelle inc. $\ddot{\theta}_3$ e $\ddot{s}$)

— ESERCIZIO 2 —

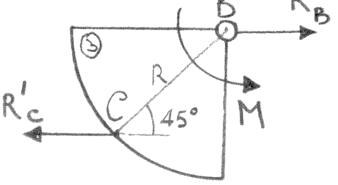
1) $\boxed{M, C'}$

L'asta 2 riceve due sole reazioni, che dovranno costituire una coppia a braccio nullo:



$R'_B = R'_{CP}$

Si passa al corpo 3:



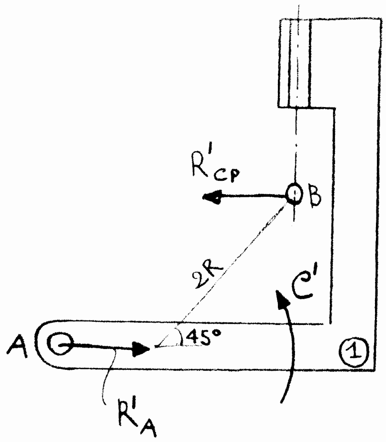
$R'_B = R'_C$

$\circlearrowleft B)\; M - R'_C R\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\downarrow$

$R'_C = \sqrt{2}\frac{M}{R} = R'_B = R'_{CP}$

Ci si sposta ora sul corpo 1, facendo attenzione a riportare correttamente la reazione R'_{cp} esercitata dall'asta 2 su 1 attraverso la coppia prismatica.



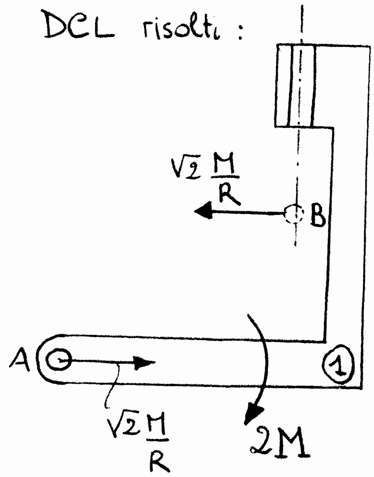
$$R'_A = R'_{CP} = \sqrt{2}\,\frac{M}{R}$$

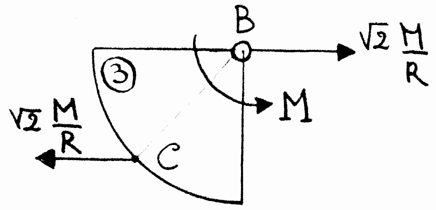
$$A)\quad C' + R'_{CP}\, 2R \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

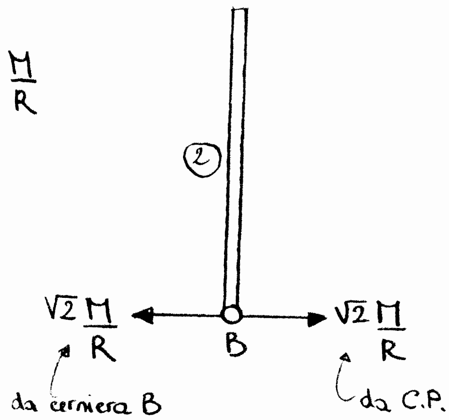
$$\downarrow$$

$$C' = -\sqrt{2}\, R\, R'_{CP} = -2M$$

DCL risolti :

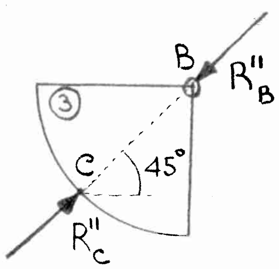






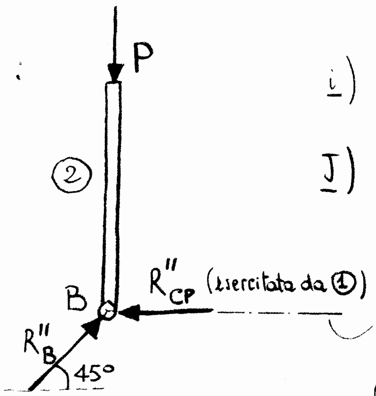
2) $\boxed{P, C''}$

Stavolta il corpo ③ è scarico :



$$R''_B = R''_C$$

Passando al corpo ② :

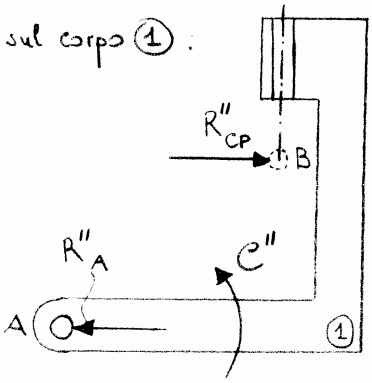


$$\underline{i})\quad R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} = R''_{CP} \qquad\longrightarrow\qquad R''_B = \sqrt{2}\,P = R''_C$$

$$\underline{J})\quad R''_B \frac{\sqrt{2}}{2} = P \qquad\qquad R''_{CP} = P$$

per il rispetto della II cardinale, questo deve essere di nuovo l'asse centrale della coppia prismatica (3 forze non parallele agenti su un corpo)

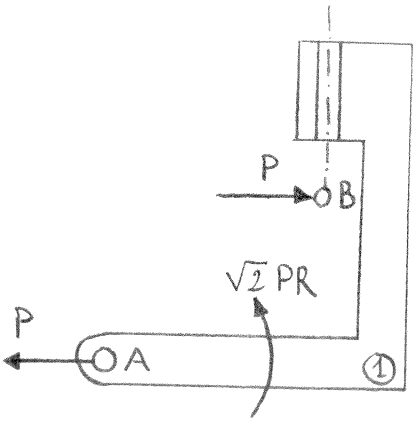
Infine, sul corpo ① :

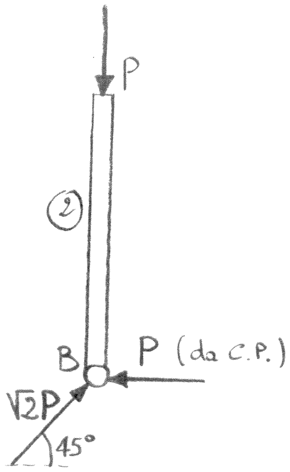


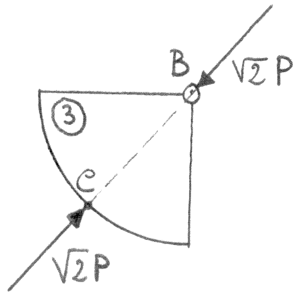
$$R''_A = R''_{CP} = P$$

$$A)\quad C'' - R''_{CP}\, 2R \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow C'' = \sqrt{2}\, PR$$

DCL risolti :







3)