UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

9 Gennaio 2016

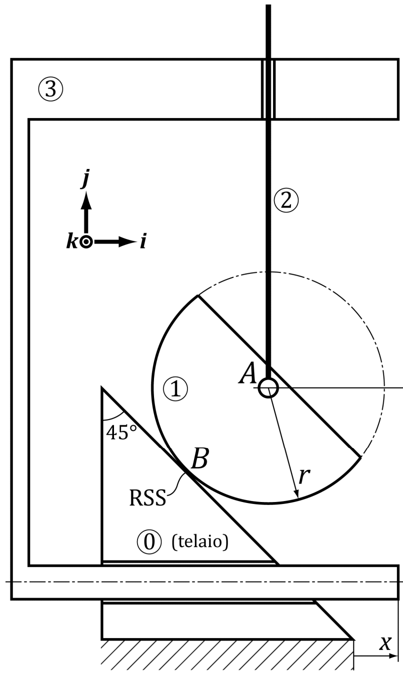
ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione A

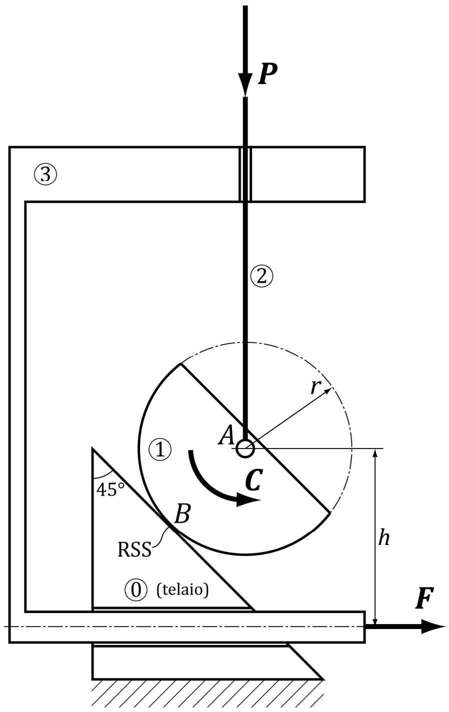
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate la velocità $\dot{x} > 0$ e l'accelerazione $\ddot{x}$ del corpo 3 e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 1 è collegato al telaio mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento.

1. **Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo**, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.





Esercizio 2

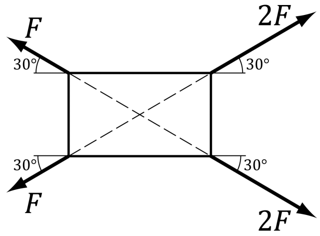
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza ***F***, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agisce la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La coppia ***C***, incognita, deve essere applicata sul corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. **Determinare la coppia *C'* e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza *F*.**
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di vettori costituito dalle quattro forze rappresentate in figura, applicate ai vertici di un rettangolo: determinare il sistema equivalente minimo.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

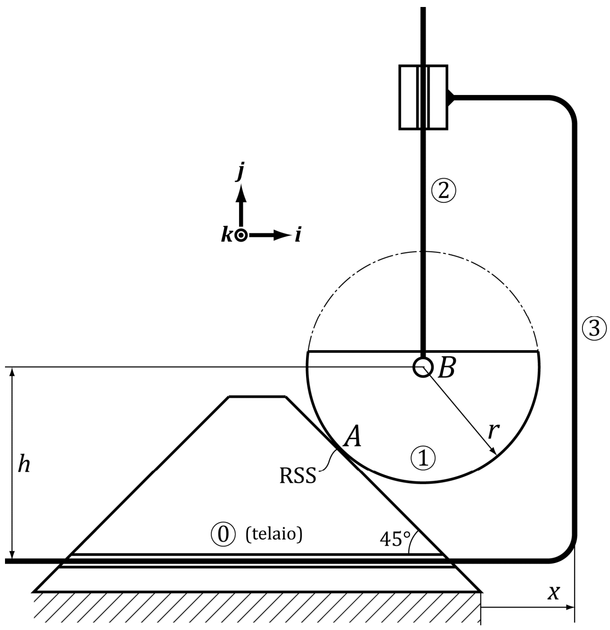
9 Gennaio 2016

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE – Versione B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

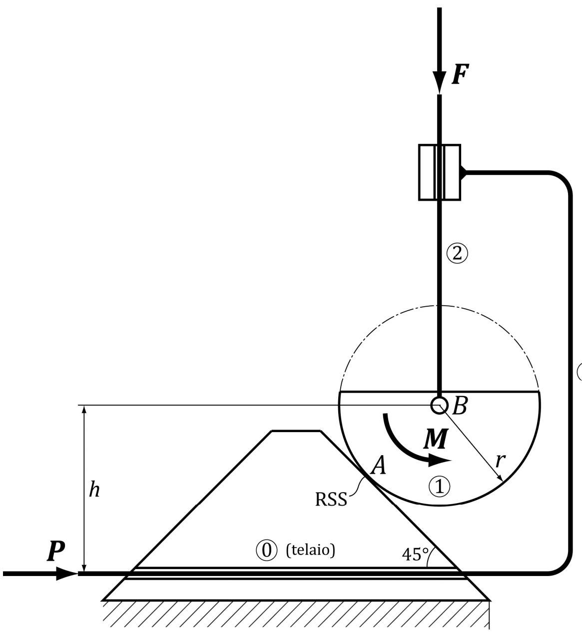
Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate la velocità $\dot{x} > 0$ e l'accelerazione $\ddot{x}$ del corpo 3 e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 1 è collegato al telaio mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento.

1. **Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo**, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.



Esercizio 2



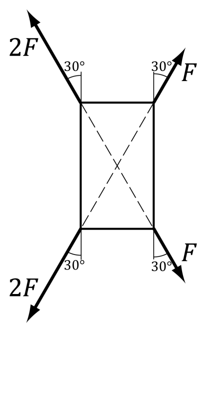
Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza ***P***, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agisce la forza ***F***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La coppia ***M***, incognita, deve essere applicata sul corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. **Determinare la coppia *M'* e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza *P*.**
2. Determinare la coppia ***M''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***F***.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di vettori costituito dalle quattro forze rappresentate in figura, applicate ai vertici di un rettangolo: determinare il sistema equivalente minimo.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

9 Gennaio 2016

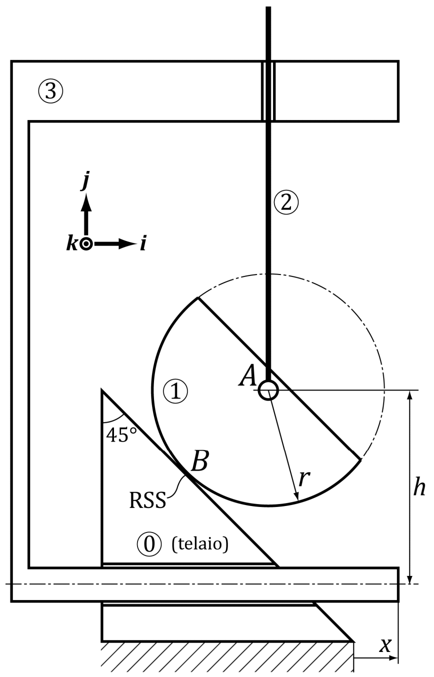
ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

Si consideri il meccanismo in figura, nella configurazione rappresentata. Sono assegnate la velocità $\dot{x} > 0$ e l'accelerazione $\ddot{x}$ del corpo 3 e le altre quantità geometriche indicate. Il corpo 1 è collegato al telaio mediante un vincolo di rotolamento senza strisciamento.

1. Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare i centri delle velocità dei tre corpi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

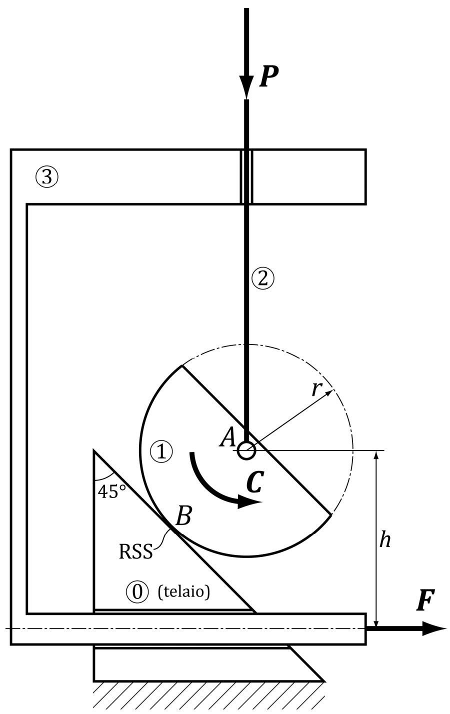


Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Sul corpo 3 agisce la forza ***F***, assegnata, e successivamente sul corpo 2 agisce la forza ***P***, anch'essa assegnata (vettori in figura).
La coppia ***C***, incognita, deve essere applicata sul corpo 1 per equilibrare staticamente il sistema.

1. Determinare la coppia ***C'*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***F***.
2. Determinare la coppia ***C''*** e tutte le forze/coppie reattive quando agisce soltanto la forza ***P***.

Per i punti 1 e 2, indicare chiaramente *l'ordine* secondo cui vengono analizzati i corpi, e riportare i diagrammi di corpo libero *risolti in funzione dei dati del problema*.



• SOLUZIONE COMPITO 1^a PARTE, vers. A •

Le due versioni A e B hanno soluzioni perfettamente analoghe.

— ESERCIZIO 1 —

1) • $$\underline{v}_{PE1} = \underline{v}_{BE1} + \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BP}$$

$$\underline{v}_{BE1} \overset{RSS}{=} \underline{v}_{BE0} = \underline{0}$$

• $$\underline{v}_{QE2} = \underline{v}_{AE2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{AQ}, \qquad \underline{v}_{AE2} = \underline{v}_{AE1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA}$$

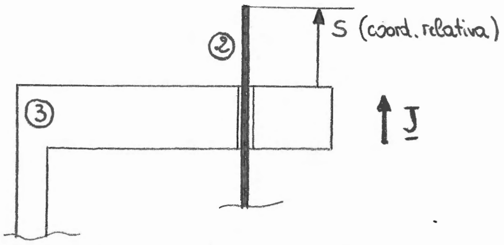
ma la coppia prismatica mobile del corpo 3 non consente al corpo 2 di variare la sua orientazione, quindi: $\begin{cases} \dot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 = 0 \end{cases}$

$$= \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA}$$ (indipendente da Q, quindi moto traslatorio)

In alternativa:

$$\Sigma\,③: \underline{v}_{QE2} = \underline{v}_{QE2}^{(r)} + \underline{v}_{QE2}^{(tr)} = \dot{s}\underline{j} + \dot{x}\underline{i}$$

• $$\underline{v}_{RE3} = \dot{x}\underline{i}$$ (moto traslatorio rettilineo)



2) Si possono scrivere due espressioni diverse di (ad esempio) $\underline{v}_{AE2}$ per ottenere l'eq.ne di chiusura:

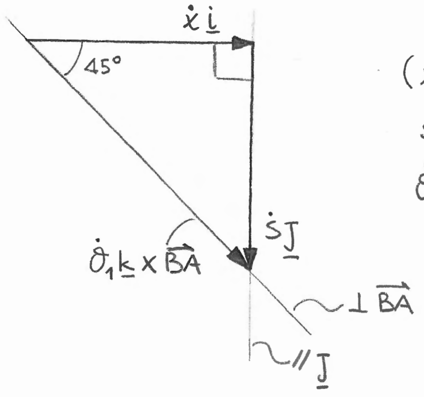
• $$\underline{v}_{AE2} = \underline{v}_{AE1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA}$$ (già ottenute al punto 1)

• $$\Sigma\,③: \underline{v}_{AE2} = \underline{v}_{AE2}^{(r)} + \underline{v}_{AE2}^{(tr)} = \dot{s}\underline{j} + \dot{x}\underline{i}$$

Uguagliandole:

$$\underline{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA} = \dot{s}\underline{j} + \dot{x}\underline{i}}$$ eq.ne di chiusura nelle incognite $\dot{\theta}_1$ e $\dot{s}$

Triangolo velocità:



$(\dot{x} > 0)$

$\left.\begin{array}{l} \dot{s} < 0 \\ \dot{\theta}_1 < 0 \text{ (oraria)} \end{array}\right\}$ segni velocità incognite

3) $$\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA} = \dot{s}\underline{j} + \dot{x}\underline{i}, \quad \text{con } \overrightarrow{BA} \equiv \left(r\frac{\sqrt{2}}{2}, r\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ r\frac{\sqrt{2}}{2} & r\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \dot{s}\underline{j} + \dot{x}\underline{i}$$

$$\left(-\dot{\theta}_1 r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\underline{i} + \left(\dot{\theta}_1 r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\underline{j} = \dot{x}\underline{i} + \dot{s}\underline{j} \longrightarrow \begin{cases} -\dot{\theta}_1 r\frac{\sqrt{2}}{2} = \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 r\frac{\sqrt{2}}{2} = \dot{s} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\sqrt{2}\,\frac{\dot{x}}{r} \\ \dot{s} = -\dot{x} \end{cases}$$

I segni ottenuti sono concordi con quelli determinati al p.to 2).

Oss. Sarebbe stato immediato ottenere le stesse espressioni di $\dot{\theta}_1$ e $\dot{s}$ lavorando direttamente sul triangolo delle velocità (rettangolo e isoscele).

4) • $C_{v_1} \equiv B$

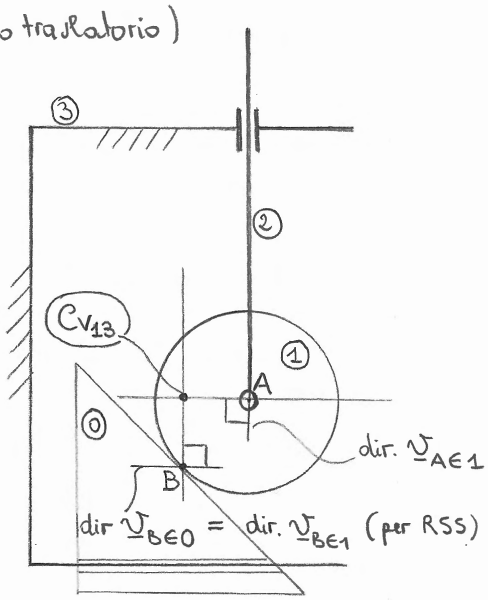
• C_{v_2} non esiste (moto traslatorio)

• C_{v_3} non esiste (" ")

• $C_{v_{12}} \equiv A$

• $C_{v_{23}}$ non esiste (moto relativo traslatorio)

• $\underline{C_{v_{13}}} = C_{v_{31}}$:



5) $\underline{a}_{A\in 1} = \underline{a}_{B\in 1} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{BA} = r\dot{\theta}_1^2 \underline{n} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{BA}$, con $\underline{n} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\| \; \underline{a}_{A\in 2}$

Si può scrivere un'altra espressione di $\underline{a}_{A\in 2}$ sfruttando i moti relativi :

Σ ③ : $\underline{a}_{A\in 2} = \underline{a}^{(r)}_{A\in 2} + \underline{a}^{(tr)}_{A\in 2} + \underline{a}^{(co)}_{A\in 2} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{x}\underline{i} + 2\underset{\underset{0}{\|}}{\underline{\omega}_3} \times \underline{v}^{(r)}_{A\in 2} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{x}\underline{i}$

Uguagliando :

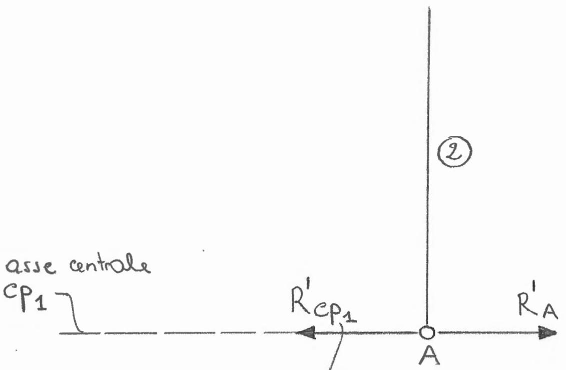
$$\underline{r\dot{\theta}_1^2 \underline{n} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{BA} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{BA} = \ddot{s}\underline{J} + \ddot{x}\underline{i}}$$

eq.^{ne} di chiusura nelle incognite $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{s}$

— ESERCIZIO 2 —

1) $\boxed{\underline{F}, \underline{C}'}$

L'asta due è sollecitata da due sole reazioni vincolari :

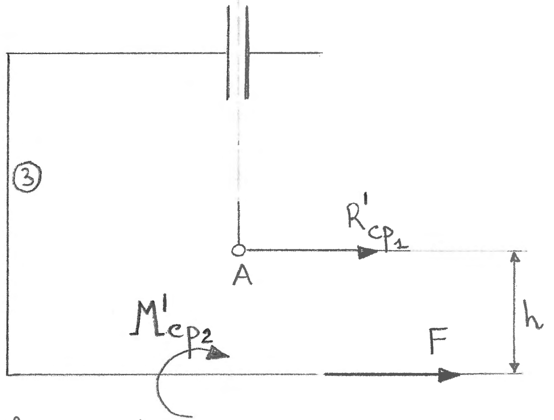


$R'_A = R'_{cp_1}$

• cp_1 : coppia prismatica mobile (corpo 2 - corpo 3)

• cp_2 : " " fissa (corpo 0 - corpo 3)

Si passa al corpo 3 (minor numero di incognite):

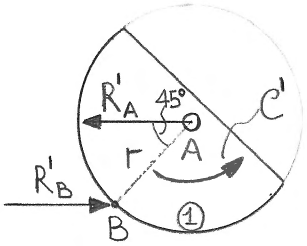


(R'_{cp_2} è nulla: sarebbe l'unica reazione lungo $\underline{J}$)

$$R'_{cp_1} = -F = R'_A$$

$$\circlearrowleft A)\ M'_{cp_2} = Fh$$

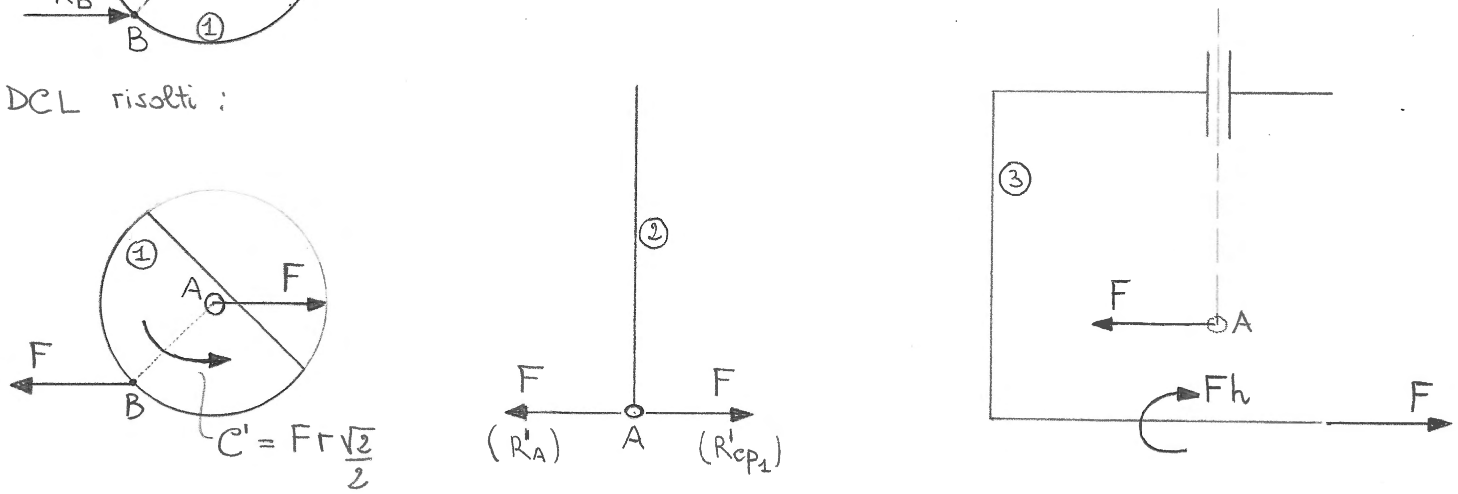
Infine il corpo 1:



$$R'_B = R'_A = -F$$

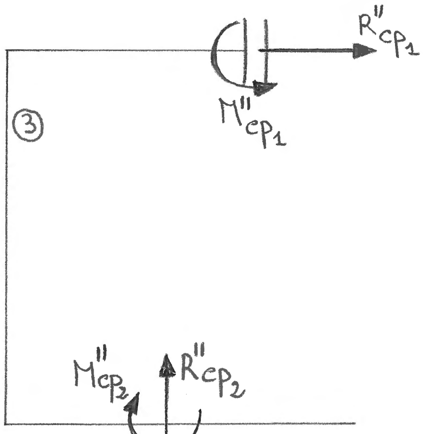
$$\circlearrowleft A)\ C' = -R'_B\, r \frac{\sqrt{2}}{2} = +F r \frac{\sqrt{2}}{2}$$

DCL risolti:



2) $\boxed{\underline{P}, \underline{C}''}$

Il corpo 3 non è sollecitato da forze/coppie esterne:

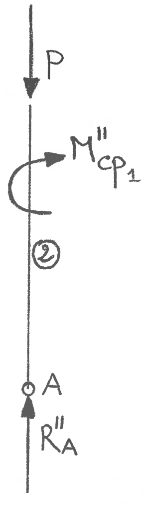


$$\underline{i})\ R''_{cp_1} = 0$$

$$\underline{J})\ R''_{cp_2} = 0$$

$$M''_{cp_1} = M''_{cp_2}$$

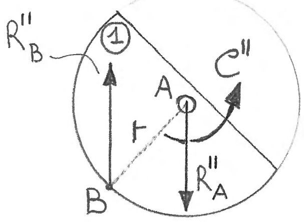
Si passa al corpo 2, su cui agisce la forza nota $\underline{P}$:



$$R''_A = P$$

$$\circlearrowleft A)\ M''_{cp_1} = 0 = M''_{cp_2}$$

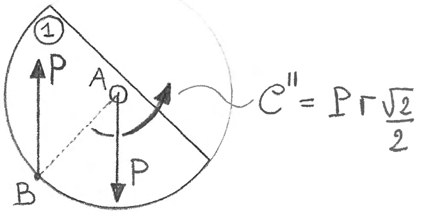
Infine il corpo 1:

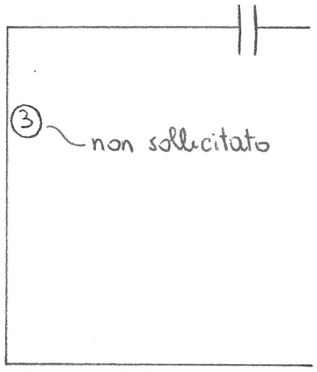


$$R''_B = R''_A = P$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A})\ C'' = R''_B\, r \frac{\sqrt{2}}{2} = P r \frac{\sqrt{2}}{2}$$

DCL risolti:





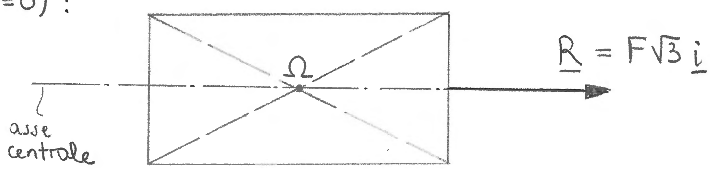
— ESERCIZIO 3 —

È immediato verificare che la risultante ha direzione orizzontale e vale

$$\underline{R} = -2F\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} + 4F\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} = F\sqrt{3}\,\underline{i}$$

Il centro geometrico del rettangolo è un punto dell'asse centrale del sistema di forze: infatti, le loro 4 rette di applicazione passano per tale punto Ω, quindi il momento risultante $\underline{M}_\Omega$ è nullo.

Il sistema equivalente minimo è costituito dalla risultante applicata in un punto dell'asse centrale (si tratta di un sistema piano, quindi $\tau = 0$):



(Nella versione B l'unica differenza è la risultante $\underline{R} = -F\underline{i}$)