

**ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE A**

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

**Esercizio 1**

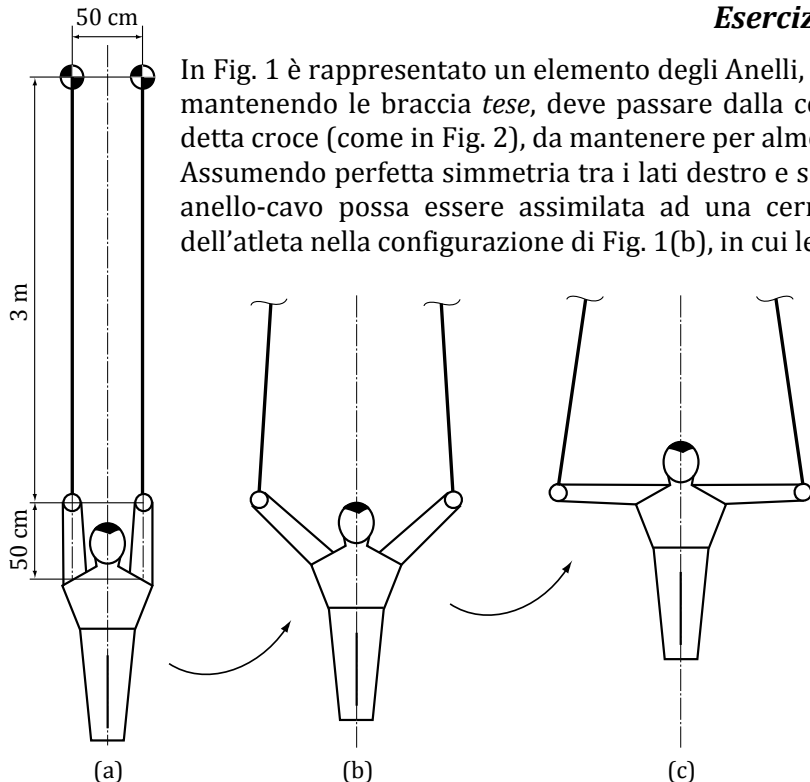


Figura 1

In Fig. 1 è rappresentato un elemento degli Anelli, una specialità della ginnastica artistica: l'atleta, mantenendo le braccia tese, deve passare dalla configurazione di Fig. 1(a) a quella di Fig. 1(c), detta croce (come in Fig. 2), da mantenere per almeno 2 secondi.

Assumendo perfetta simmetria tra i lati destro e sinistro del corpo e che l'interazione tra mano e anello-cavo possa essere assimilata ad una cerniera mobile, si vuole studiare la cinematica dell'atleta nella configurazione di Fig. 1(b), in cui le braccia sono inclinate di 45°.

In particolare, indicando con 1 il sottosistema testa-tronco-arti inferiori, con 2 il braccio destro e con 3 il cavo destro (*destro* secondo la prospettiva del lettore), e tenendo conto della simmetria del sistema:

1. determinare centri delle velocità assoluti e relativi (corpi 1, 2, 3);
2. assumendo che l'atleta stia ruotando (adducendo) le braccia con velocità angolare  $\Omega = \pi/4$  rad/s, determinare la velocità lineare del sottosistema 1 e la velocità angolare del cavo 3;
3. assumendo che l'atleta stia ruotando le braccia con accelerazione angolare nulla, determinare l'accelerazione lineare del sottosistema 1 e l'accelerazione angolare del cavo 3.

**Esercizio 2**

L'atleta in Fig. 2 (Yuri Chechi) sta eseguendo una croce, quindi si trova in una configurazione di equilibrio statico. Adottando i dati geometrici dell'Es. 1 e sapendo che l'atleta ha una massa pari a 60 kg:

1. determinare le tensioni nei due cavi;
2. determinare forze reattive e coppie articolari (muscolari) ridotte alle spalle, assumendo che ciascun braccio abbia una massa di 4 kg e che il suo baricentro sia a metà lunghezza.

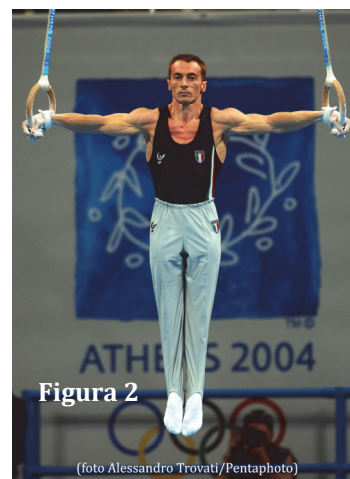


Figura 2

(foto Alessandro Trovati/Pentaphoto)

**Esercizio 3**

In Fig. 3 è mostrato un avambraccio destro la cui mano sostiene, in condizioni di equilibrio statico, un carico di 20 kg. Il vettore arancione rappresenta la risultante  $R$  delle forze muscolari esercitate dal gruppo bicipite-brachiale, applicata nell'asse centrale di queste ultime, mentre la cerniera  $A$  è rappresentativa dell'articolazione del gomito ed è fissa. L'avambraccio ha una massa di 2 kg.

1. Determinare  $R$  e la risultante delle forze reattive articolari in  $A$ .
2. Anziché modellare l'effettiva risultante  $R$  del gruppo bicipite-brachiale, si consideri adesso la cerniera  $A$  come cerniera attiva (sistema equivalente): si determini in questo caso la risultante delle forze reattive articolari in  $A$  e la coppia articolare richiesta.

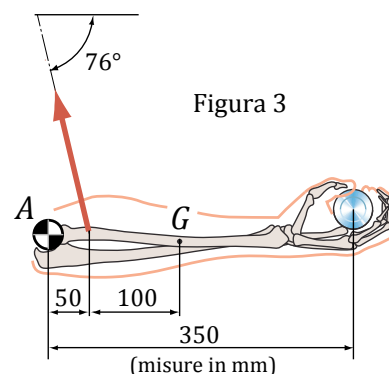


Figura 3

(misure in mm)

**ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE B**

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

**Esercizio 1**

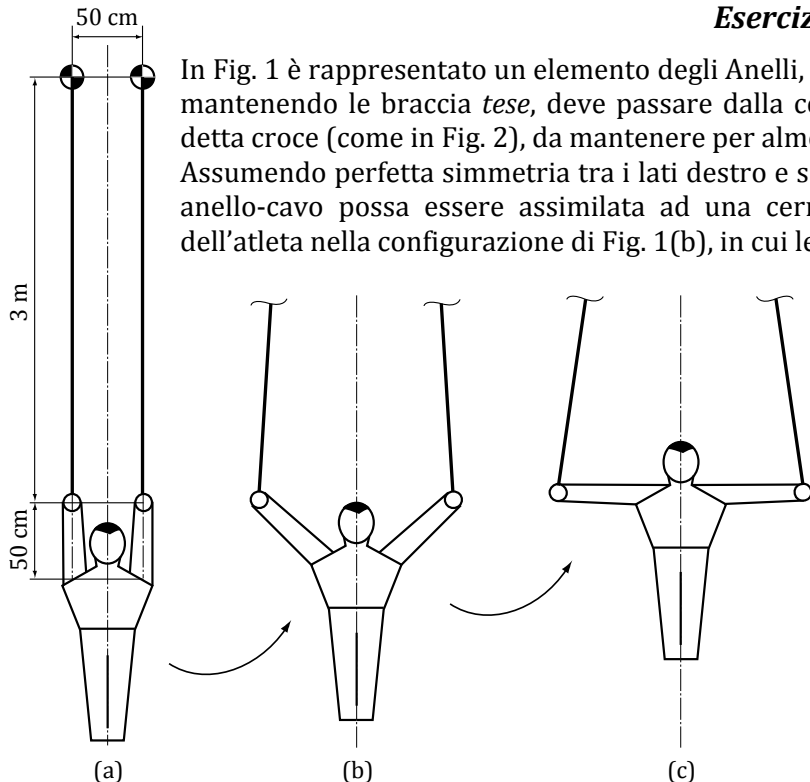


Figura 1

In Fig. 1 è rappresentato un elemento degli Anelli, una specialità della ginnastica artistica: l'atleta, mantenendo le braccia tese, deve passare dalla configurazione di Fig. 1(a) a quella di Fig. 1(c), detta croce (come in Fig. 2), da mantenere per almeno 2 secondi.

Assumendo perfetta simmetria tra i lati destro e sinistro del corpo e che l'interazione tra mano e anello-cavo possa essere assimilata ad una cerniera mobile, si vuole studiare la cinematica dell'atleta nella configurazione di Fig. 1(b), in cui le braccia sono inclinate di  $45^\circ$ .

In particolare, indicando con 1 il sottosistema testa-tronco-arti inferiori, con 2 il braccio sinistro e con 3 il cavo sinistro (sinistro secondo la prospettiva del lettore), e tendendo conto della simmetria del sistema:

1. determinare centri delle velocità assoluti e relativi (corpi 1, 2, 3);
2. assumendo che l'atleta stia ruotando (adducendo) le braccia con velocità angolare  $\Omega = \pi/4$  rad/s, determinare la velocità lineare del sottosistema 1 e la velocità angolare del cavo 3;
3. assumendo che l'atleta stia ruotando le braccia con accelerazione angolare nulla, determinare l'accelerazione lineare del sottosistema 1 e l'accelerazione angolare del cavo 3.

**Esercizio 2**

L'atleta in Fig. 2 (Yuri Chechi) sta eseguendo una croce, quindi si trova in una configurazione di equilibrio statico. Adottando i dati geometrici dell'Es. 1 e sapendo che l'atleta ha una massa pari a 60 kg:

1. determinare le tensioni nei due cavi;
2. determinare forze reattive e coppie articolari (muscolari) ridotte alle spalle, assumendo che ciascun braccio abbia una massa di 4 kg e che il suo baricentro sia a metà lunghezza.

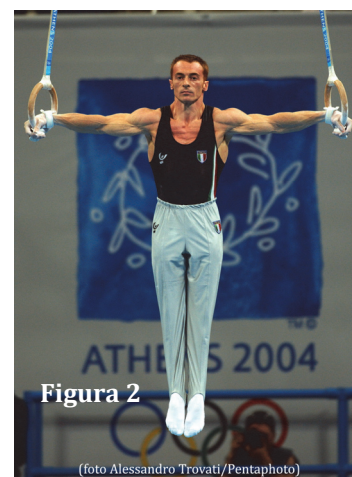


Figura 2

(foto Alessandro Trovati/Pentaphoto)

**Esercizio 3**

In Fig. 3 è mostrato un avambraccio destro la cui mano spinge (verso il basso) una cella di carico. In tale condizione di equilibrio statico, la reazione risultante esercitata dalla cella sulla mano è verticale, ha un'intensità di 200 N ed è applicata in B. Il vettore arancione rappresenta la risultante  $T$  delle forze muscolari esercitate dal tricipite, applicata nell'asse centrale di queste ultime, mentre la cerniera A è rappresentativa dell'articolazione del gomito ed è fissa. L'avambraccio ha una massa di 2 kg.

1. Determinare  $T$  e la risultante delle forze reattive articolari in A.
2. Anziché modellare l'effettiva risultante  $T$  del muscolo tricipite, si consideri adesso la cerniera A come cerniera attiva (sistema equivalente): si determini in questo caso la risultante delle forze reattive articolari in A e la coppia articolare richiesta.

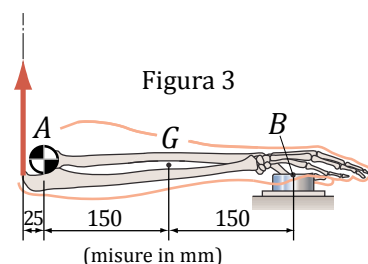


Figura 3

(misure in mm)

**ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO**

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

**Esercizio 1**

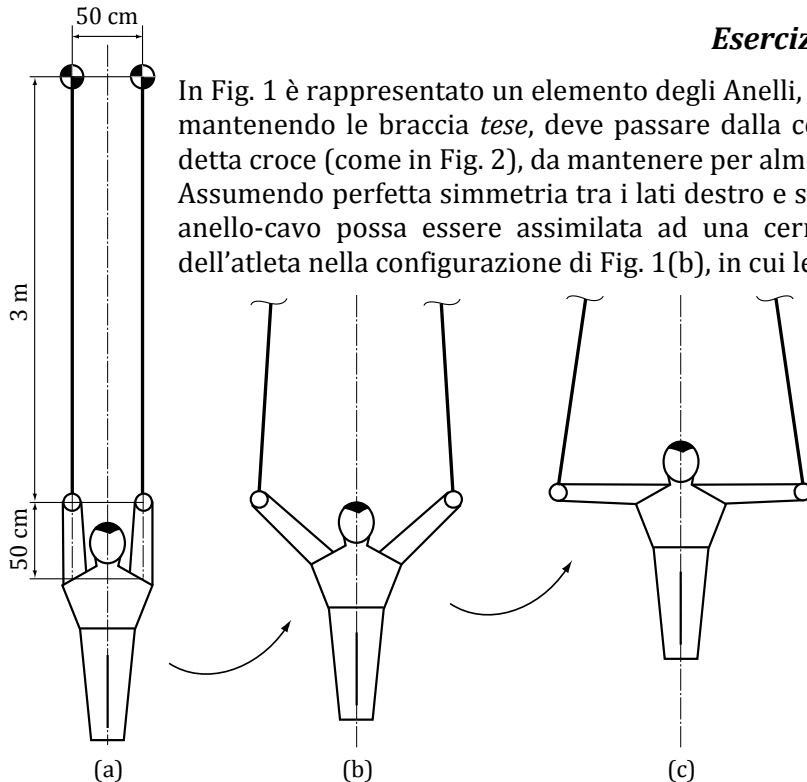


Figura 1

In Fig. 1 è rappresentato un elemento degli Anelli, una specialità della ginnastica artistica: l'atleta, mantenendo le braccia tese, deve passare dalla configurazione di Fig. 1(a) a quella di Fig. 1(c), detta croce (come in Fig. 2), da mantenere per almeno 2 secondi.

Assumendo perfetta simmetria tra i lati destro e sinistro del corpo e che l'interazione tra mano e anello-cavo possa essere assimilata ad una cerniera mobile, si vuole studiare la cinematica dell'atleta nella configurazione di Fig. 1(b), in cui le braccia sono inclinate di  $45^\circ$ .

In particolare, indicando con 1 il sottosistema testa-tronco-arti inferiori, con 2 il braccio sinistro e con 3 il cavo sinistro (sinistro secondo la prospettiva del lettore), e tendendo conto della simmetria del sistema:

1. determinare i centri delle velocità assoluti dei corpi 1, 2, 3;
2. assumendo che l'atleta stia ruotando (adducendo) le braccia con velocità angolare  $\Omega = \pi/4$  rad/s, determinare la velocità lineare del sottosistema 1 e la velocità angolare del cavo 3;
3. assumendo che l'atleta stia ruotando le braccia con accelerazione angolare nulla, determinare l'accelerazione lineare del sottosistema 1 e l'accelerazione angolare del cavo 3.

**Esercizio 2**

L'atleta in Fig. 2 (Yuri Chechi) sta eseguendo una croce, quindi si trova in una configurazione di equilibrio statico. Adottando i dati geometrici dell'Es. 1 e sapendo che l'atleta ha una massa pari a 60 kg:

1. determinare le tensioni nei due cavi;
2. determinare forze reattive e coppie articolari (muscolari) nelle spalle, assumendo che ciascun braccio abbia una massa di 4 kg e che il suo baricentro sia a metà lunghezza.

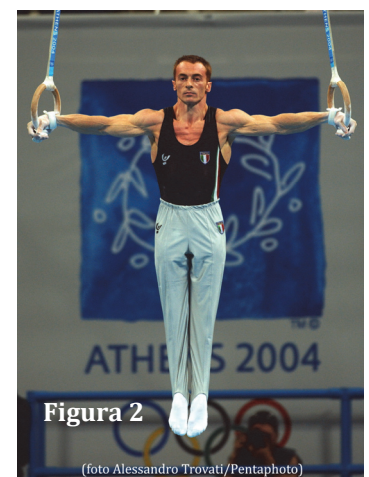


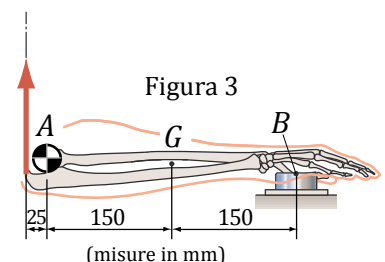
Figura 2

(foto Alessandro Trovati/Pentaphoto)

**Esercizio 3**

In Fig. 3 è mostrato un avambraccio destro la cui mano spinge (verso il basso) una cella di carico. In tale condizione di equilibrio statico, la reazione risultante esercitata dalla cella sulla mano è verticale, ha un'intensità di 200 N ed è applicata in B. Il vettore arancione rappresenta la risultante  $T$  delle forze muscolari esercitate dal tricipite, applicata nell'asse centrale di queste ultime, mentre la cerniera A è rappresentativa dell'articolazione del gomito ed è fissa. L'avambraccio ha una massa di 2 kg.

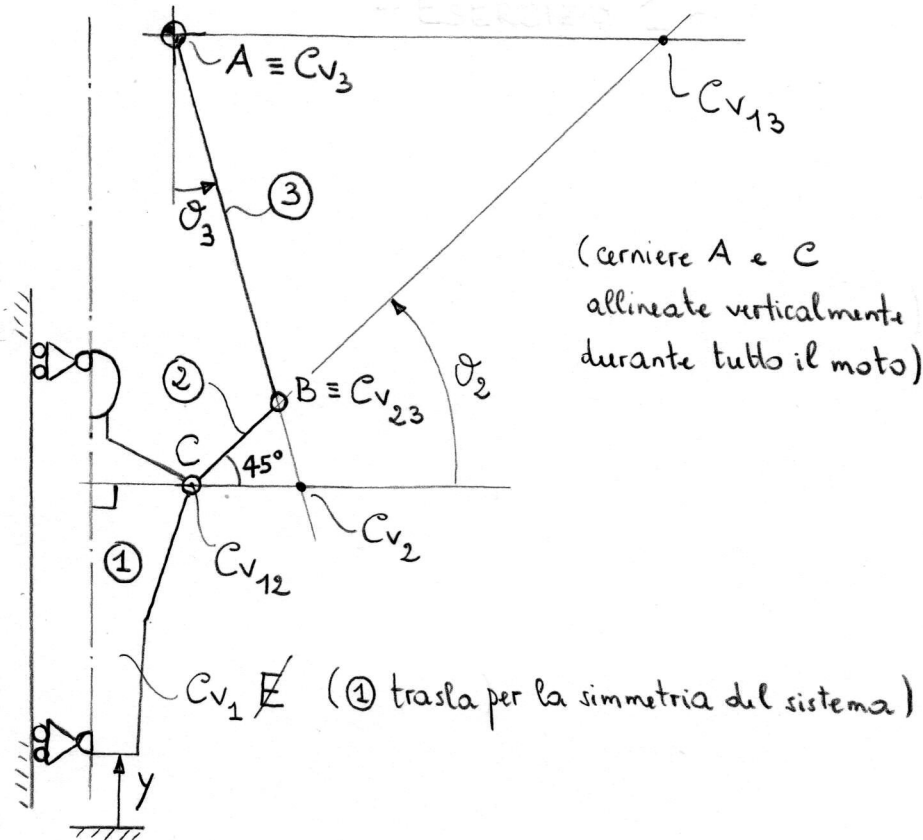
Determinare  $T$  e la risultante delle forze reattive articolari in A.



- SOLUZIONE VERS. A -

- ESERCIZIO 1 -

1)



2) Con le coordinate definite al punto 1) e con i soliti versori ( $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$ ), l'eq.<sup>m</sup> di chiusura delle velocità può essere scritta:

$$\dot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{AB} = \dot{y} \underline{j} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{CB} \quad (\text{incognite: } \dot{y}, \dot{\theta}_3)$$

Sono noti:

- $\dot{\theta}_2 = -\Omega = -\pi/4 \text{ rad/s}$  (il braccio dx sta ruotando in senso orario)
- $\vec{CB} = (50/\sqrt{2}, 50/\sqrt{2}) \text{ cm} = (35.36, 35.36) \text{ cm}$
- $\vec{AB} = (50/\sqrt{2}, -\sqrt{AB^2 - AB_x^2}) \text{ cm} = (35.36, -297.91) \text{ cm}$

Risolvendo:

$$\begin{cases} \dot{y} = 31.06 \text{ cm/s} & (\text{velocità di salita corpo atleta}) \\ \dot{\theta}_3 = 0.093 \text{ rad/s} & (\text{velocità angolare cavo 3}) \end{cases}$$

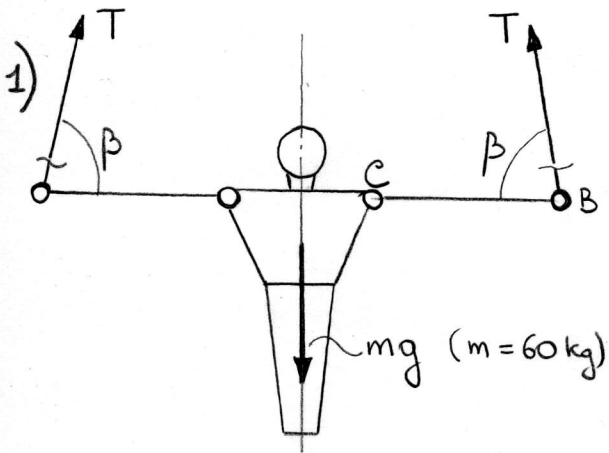
3) Procedimento del tutto analogo per le accelerazioni, per cui l'eq.<sup>m</sup> di chiusura risulta:

$$\ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{AB} - \dot{\theta}_3^2 \vec{AB} = \ddot{y} \underline{j} - \dot{\theta}_2^2 \vec{CB} \quad (\text{essendo } \ddot{\theta}_2 = 0),$$

che risulta fornisce:

$$\begin{cases} \ddot{y} = 21.84 \text{ cm/s}^2 \\ \ddot{\theta}_3 = -0.072 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

- ESERCIZIO 2 -



L'angolo  $\beta$  è facilmente determinabile: il cavo destro converge nella cerniera fissa A, allineata verticalmente con C, dunque

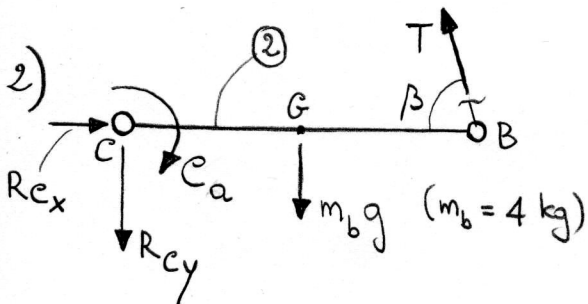
$$\overline{AB} \cos \beta = \overline{CB}$$

$$\cos \beta = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \beta = 80.41^\circ$$

Per ottenere le tensioni nei due cavi (uguali per simmetria) basta riferirsi al DCL sopra e scrivere la prima cardinale in direzione verticale:

$$2 T \sin \beta = mg \longrightarrow \bullet T = \frac{mg}{2 \sin \beta} = 298.47 \text{ N}$$



Con il DCL a lato del braccio destro teso si impone il rispetto delle eq.<sup>ni</sup> cardinali della statica. In alternativa al DCL a lato si potrebbe sfruttare il fatto che le 3 forze agenti devono avere RDA concorrenti in un punto? NO, per la presenza di  $C_a$ .

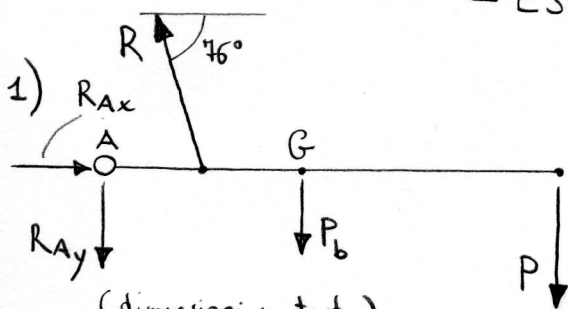
Dunque:

$$i): R_{cx} = T \cos \beta \longrightarrow \bullet R_{cx} = 49.72 \text{ N}$$

$$j): T \sin \beta = R_{cy} + m_b g \longrightarrow \bullet R_{cy} = 255.06 \text{ N}$$

$$\hat{c}): T \sin \beta (0.50 \text{ m}) = C_a + m_b g (0.25 \text{ m}) \longrightarrow \bullet C_a = 137.34 \text{ Nm}$$

- ESERCIZIO 3 -



Sono noti  $P = 20 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196.20 \text{ N}$  e  $P_b = 2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19.62 \text{ N}$ .

Per determinare  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  e  $R$  basta scrivere le eq.<sup>ni</sup> cardinali:

$$\hat{A}): R \sin(76^\circ) (0.05 \text{ m}) = P_b (0.15 \text{ m}) + P (0.35 \text{ m})$$

$$\bullet R = 1476.11 \text{ N}$$

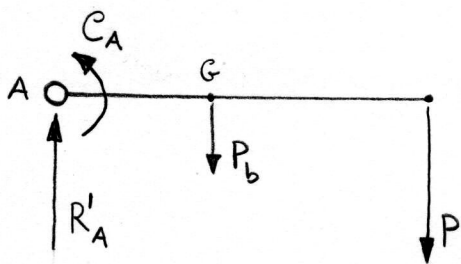
$$i): R_{Ax} = R \cos(76^\circ) \longrightarrow \bullet R_{Ax} = 357.10 \text{ N}$$

$$j): R \sin(76^\circ) = R_{Ay} + P_b + P \longrightarrow \bullet R_{Ay} = 1216.44 \text{ N}$$

La risultante  $R_A$  è quindi:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 1267.77 \text{ N}$$

2)



$$\text{I)}: R'_A = P + P_b = 215.82 \text{ N}$$

$$\text{A)}: C_A = P_b(0.15 \text{ m}) + P(0.35 \text{ m}) = 71.61 \text{ Nm}$$

Si osservi come, nonostante il sistema di azioni/reazioni  $(R'_A, C_A)$  sia EQUIVALENTE al sistema  $(R_A, R)$  del punto 1), le intensità delle reazioni articolari al gomito sono ben diverse:

$$R_A = 1268 \text{ N} \quad \text{vs.} \quad R'_A = 216 \text{ N}$$

con  $R_A$  molto più elevata e rappresentativa del caso reale.