UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

4 Febbraio 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE A

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

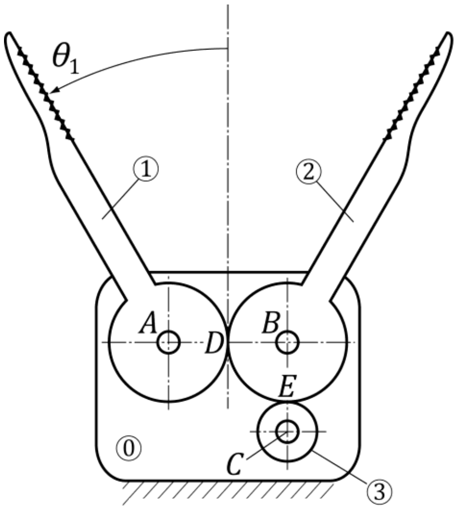


Fig. 1

La Figura 1 mostra il meccanismo di una pinza (simmetrica) che potrebbe essere impiegata in chirurgia robotica. Il corpo 0, sede delle tre cerniere A, B e C, è fisso (potrebbe essere l'estremità di un braccio robotico). In corrispondenza dei punti D ed E ci sono condizioni di rotolamento senza strisciamento (RSS) tra i corpi in contatto. Sebbene un'analisi geometrica elementare del meccanismo possa farlo sembrare non labile, la dipendenza dei vincoli garantisce un g.d.l. Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{AD} = \overline{BD} = R$, $\overline{CE} = r$.

1. **Sia richiesta una certa velocità angolare per il corpo 1 (dunque $\dot{\theta}_1$ è assegnata): determinare la velocità angolare da imprimere al corpo 3 e quella del corpo 2.**
2. Determinare i centri delle velocità di tutti i corpi mobili, sia assoluti che relativi.
3. Con $\ddot{\theta}_1$ nota, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Si deve afferrare il disco tratteggiato in Fig. 2 applicando su di esso una coppia a braccio nullo assegnata, d'intensità $\|\mathbf{S}\|$, attraverso i due punti di contatto F e G tra disco e pinza.

1. **Determinare (giustificando adeguatamente) quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico in corrispondenza dei punti di contatto F e G affinché si possano avere condizioni di equilibrio.**

Si supponga che il vincolo RSS in D ed E sia garantito da ruote dentate con angolo di pressione standard di 20°; ciò significa (Fig. 3) che la reazione ricevuta dal generico corpo in esame in corrispondenza del punto sede di RSS ha una componente tangenziale T e una componente normale N (sempre *centripeta*) dipendenti tra loro: i loro moduli sono legati dalla relazione $|N| = |T|\tan(20°)$.

2. Determinare la coppia $\boldsymbol{M}$ da applicare al corpo 3 per avere condizioni di equilibrio statico e tutte le conseguenti reazioni vincolari.
3. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

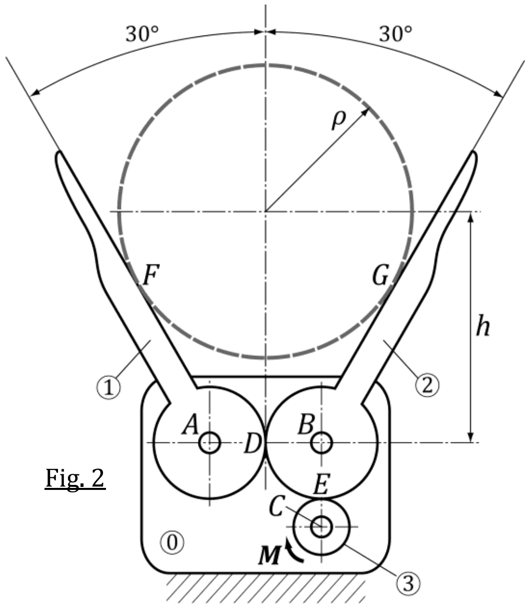


Fig. 2

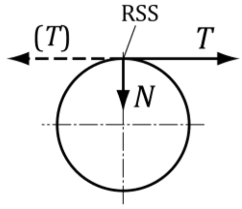
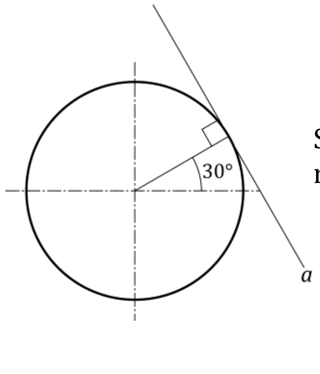


Fig. 3

Esercizio 3



Si determini il momento d'inerzia rispetto all'asse a del cerchio omogeneo in figura, avente massa m = 0.4 kg e raggio R = 100 mm.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

4 Febbraio 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE B
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

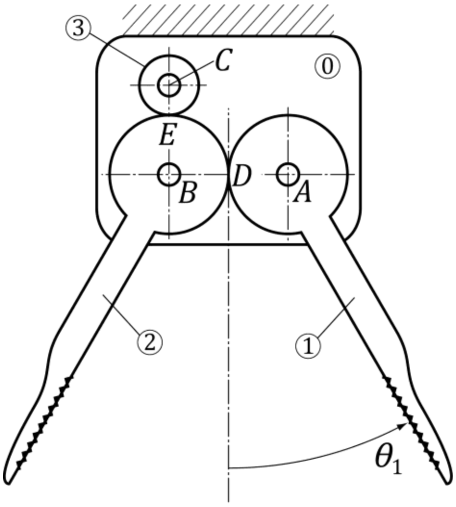


Fig. 1

La Figura 1 mostra il meccanismo di una pinza (simmetrica) che potrebbe essere impiegata in chirurgia robotica. Il corpo 0, sede delle tre cerniere A, B e C, è fisso (potrebbe essere l'estremità di un braccio robotico). In corrispondenza dei punti D ed E ci sono condizioni di rotolamento senza strisciamento (RSS) tra i corpi in contatto. Sebbene un'analisi geometrica elementare del meccanismo possa farlo sembrare non labile, la dipendenza dei vincoli garantisce un g.d.l. Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{AD} = \overline{BD} = R$, $\overline{CE} = r$.

1. **Sia richiesta una certa velocità angolare per il corpo 1 (dunque $\dot{\theta}_1$ è assegnata): determinare la velocità angolare da imprimere al corpo 3 e quella del corpo 2.**
2. Determinare i centri delle velocità di tutti i corpi mobili, sia assoluti che relativi.
3. Con $\ddot{\theta}_1$ nota, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

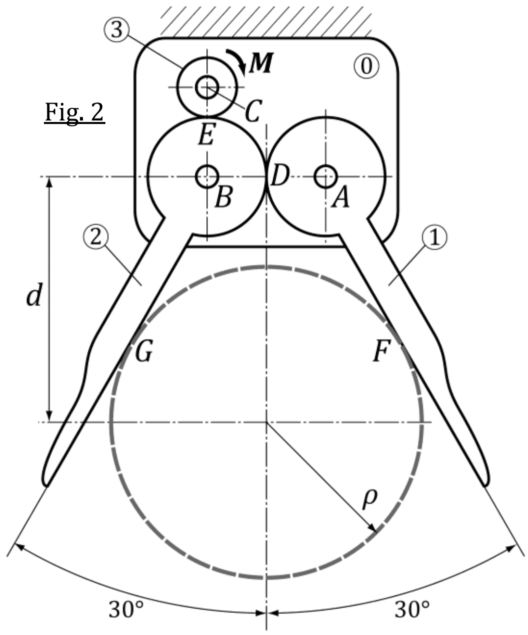


Fig. 2

Si deve afferrare il disco tratteggiato in Fig. 2 applicando su di esso una coppia a braccio nullo assegnata, d'intensità $\|\mathbf{S}\|$, attraverso i due punti di contatto F e G tra disco e pinza.

1. **Determinare (giustificando adeguatamente) quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico in corrispondenza dei punti di contatto F e G affinché si possano avere condizioni di equilibrio.**

Si supponga che il vincolo RSS in D ed E sia garantito da ruote dentate con angolo di pressione standard di 20°; ciò significa (Fig. 3) che la reazione ricevuta dal generico corpo in esame in corrispondenza del punto sede di RSS ha una componente tangenziale T e una componente normale N (sempre *centripeta*) dipendenti tra loro: i loro moduli sono legati dalla relazione $|N| = |T|\tan(20°)$.

2. Determinare la coppia $\boldsymbol{M}$ da applicare al corpo 3 per avere condizioni di equilibrio statico e tutte le conseguenti reazioni vincolari.
3. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

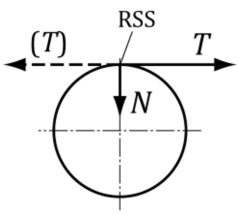
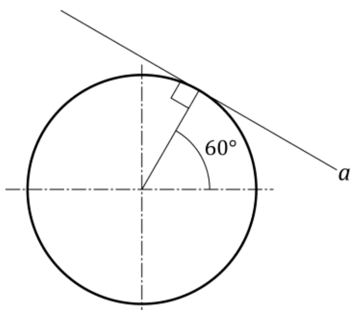


Fig. 3

Esercizio 3



Si determini il momento d'inerzia rispetto all'asse a del cerchio omogeneo in figura, avente raggio R = 0.1 m e massa m = 0.4 kg.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

4 Febbraio 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE – VERSIONE C

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

La Figura 1 mostra il meccanismo di una pinza (simmetrica) che potrebbe essere impiegata in chirurgia robotica. Il corpo 0, sede delle tre cerniere L, M e N, è fisso (potrebbe essere l'estremità di un braccio robotico). In corrispondenza dei punti O e P ci sono condizioni di rotolamento senza strisciamento (RSS) tra i corpi in contatto. Sebbene un'analisi geometrica elementare del meccanismo possa farlo sembrare non labile, la dipendenza dei vincoli garantisce un g.d.l. Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{LO} = \overline{MO} = R$, $\overline{NP} = r$.

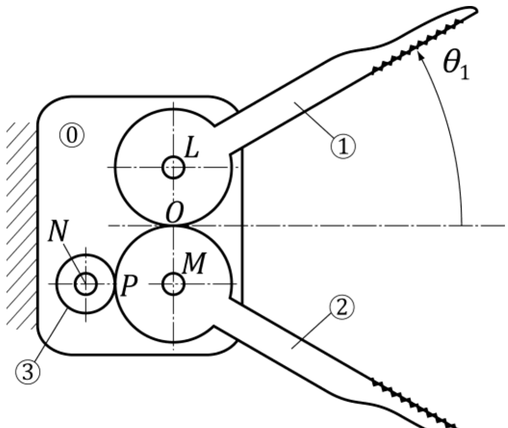


Fig. 1

1. **Sia richiesta una certa velocità angolare per il corpo 1 (dunque $\dot{\theta}_1$ è assegnata): determinare la velocità angolare da imprimere al corpo 3 e quella del corpo 2.**
2. Determinare i centri delle velocità di tutti i corpi mobili, sia assoluti che relativi.
3. Data $\ddot{\theta}_1$, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

Esercizio 2

Si deve afferrare il disco tratteggiato in Fig. 2 applicando su di esso una coppia a braccio nullo assegnata, d'intensità $\|\mathbf{S}\|$, attraverso i due punti di contatto A e B tra disco e pinza.

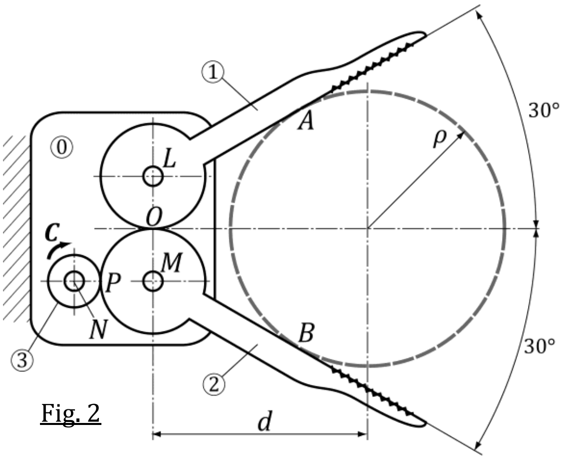


Fig. 2

1. **Determinare (giustificando adeguatamente) quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico in corrispondenza dei punti di contatto A e B affinché si possano avere condizioni di equilibrio.**

Si supponga che il vincolo RSS in O e P sia garantito da ruote dentate con angolo di pressione standard di 20°; ciò significa (Fig. 3) che la reazione ricevuta dal generico corpo in esame in corrispondenza del punto sede di RSS ha una componente tangenziale T e una componente normale N (sempre *centripeta*) dipendenti tra loro: i loro moduli sono legati dalla relazione $|N| = |T|\tan(20°)$.

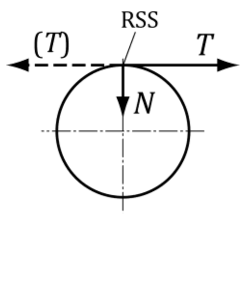
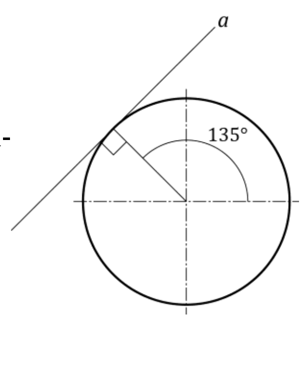


Fig. 3

2. Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ da applicare al corpo 3 per avere condizioni di equilibrio statico e tutte le conseguenti reazioni vincolari.
3. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

Esercizio 3

Si determini il momento d'inerzia rispetto all'asse a del cerchio omogeneo in figura, avente raggio R = 10 cm e massa m = 0.4 kg.



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

4 Febbraio 2019

ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

La Figura 1 mostra il meccanismo di una pinza (simmetrica) che potrebbe essere impiegata in chirurgia robotica. Il corpo 0, sede delle tre cerniere L, M e N, è fisso (potrebbe essere l'estremità di un braccio robotico). In corrispondenza dei punti O e P ci sono condizioni di rotolamento senza strisciamento (RSS) tra i corpi in contatto. Sebbene un'analisi geometrica elementare del meccanismo possa farlo sembrare non labile, la dipendenza dei vincoli garantisce un g.d.l. Sono assegnate le seguenti quantità: $\overline{LO} = \overline{MO} = R$, $\overline{NP} = r$.

1. Sia richiesta una certa velocità angolare per il corpo 1 (dunque $\dot{\theta}_1$ è assegnata): determinare la velocità angolare da imprimere al corpo 3 e quella del corpo 2.
2. Ottenere i centri delle velocità assoluti dei tre corpi mobili.
3. Data $\ddot{\theta}_1$, ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

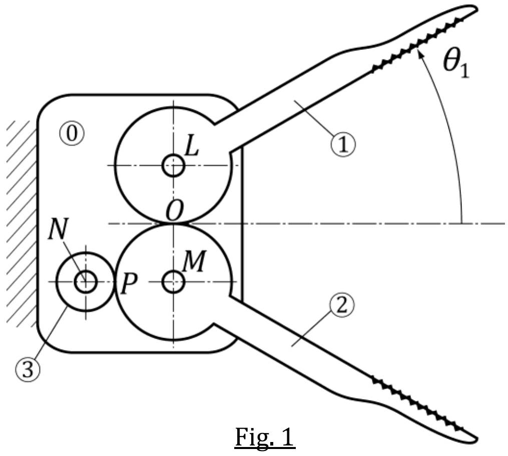


Fig. 1

Esercizio 2

Si deve afferrare il disco tratteggiato in Fig. 2 applicando su di esso una coppia a braccio nullo assegnata, d'intensità $\|\mathbf{S}\|$, attraverso i due punti di contatto A e B tra disco e pinza.

1. Determinare (giustificando adeguatamente) quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico in corrispondenza dei punti di contatto A e B affinché si possano avere condizioni di equilibrio.

Si supponga che il vincolo RSS in O e P sia garantito da ruote dentate con angolo di pressione standard di 20°; ciò significa (Fig. 3) che la reazione ricevuta dal generico corpo in esame in corrispondenza del punto sede di RSS ha una componente tangenziale T e una componente normale N (sempre *centripeta*) dipendenti tra loro: i loro moduli sono legati dalla relazione $|N| = |T|\tan(20°)$.

2. Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ da applicare al corpo 3 per avere condizioni di equilibrio statico e tutte le conseguenti reazioni vincolari.
3. Riportare i diagrammi di corpo libero risolti in funzione dei dati del problema.

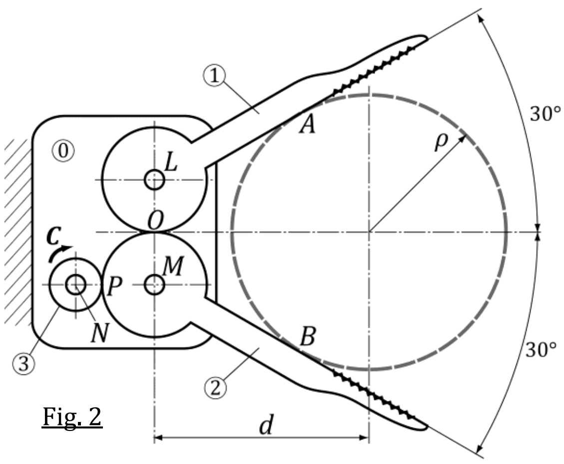


Fig. 2

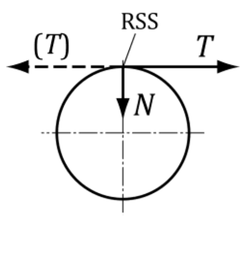


Fig. 3

– SOLUZIONE PRIMA PARTE – VERSIONE A –

– ESERCIZIO 1 –

1) Chiudendo, ad esempio, sul punto D, si ottiene un'eq.^{ne} di chiusura nelle due velocità angolari incognite.

$$\underline{v}_{D\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AD} \qquad \text{(nota)}$$

Usando la formula fondamentale della cinematica per $D \in 2$:

$$\underline{v}_{D\in 2} = \underline{v}_{E\in 2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{ED},$$

con: $\underline{v}_{E\in 2} = \underline{v}_{E\in 3}$ (per RSS), dunque:

$$\underline{v}_{D\in 2} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{CE} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{ED}$$

In virtù del vincolo RSS in D:

$$\underline{v}_{D\in 1} = \underline{v}_{D\in 2}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_1 \underline{k} \times \vec{AD} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \times \vec{CE} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \vec{ED}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$)

Si può risolvere per via analitica introducendo:

$\underline{j}$, $\underline{i}$, $\underline{k}$

$$\vec{AD} = (R, 0, 0) \qquad \vec{CE} = (0, r, 0) \qquad \vec{ED} = (-R, R, 0) \xrightarrow{\text{(risolvendo)}} \begin{cases} \cdot\ \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1 \\ \cdot\ \dot{\theta}_3 = \dfrac{R}{r}\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

(In alternativa si poteva chiudere sui punti notevoli D ed E con due semplici eq.^{ni} di chiusura distinte)

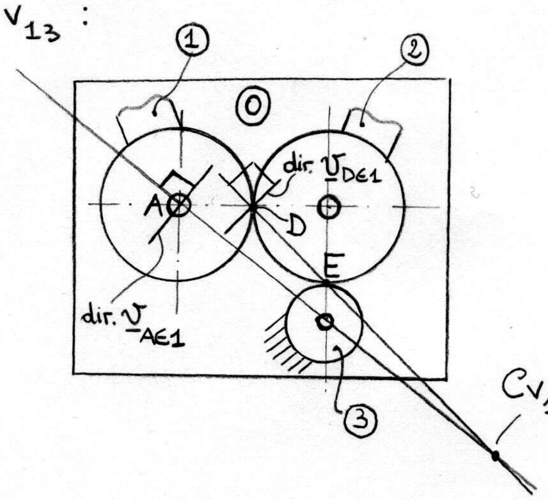
2) $Cv_1 \equiv A$ (cerniera fissa)
$Cv_2 \equiv B$ (" ")
$Cv_3 \equiv C$ (" ")
} Cv ASSOLUTI

Passiamo ai Cv RELATIVI:

$Cv_{12} \equiv D$ (sede di RSS)

$Cv_{23} \equiv E$ (" " ")

Cv_{13}:



3) Anche per le accelerazioni si può chiudere sul punto D, facendo attenzione (*) a gestire correttamente i moti relativi in corrispondenza dei punti sede di RSS.

Si possono, ad esempio, scrivere due espressioni diverse dell'accelerazione $\underline{a}_{DE2}$ come segue.

Intanto:

$$\Sigma ①: \ \underline{a}_{DE2} = \underline{a}^{(r)}_{DE2} + \underline{a}^{(tr)}_{DE2} + \underline{a}^{(Co)}_{DE2}$$

$$= \underbrace{\frac{R \cdot R}{R+R}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \underline{i}}_{\underline{a}^{(r)}_D \ (= \underline{a}_{CV_2} \text{ nel moto relativo})} + \underbrace{\ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AD} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AD}}_{\underline{a}^{(tr)}_D} + \underbrace{\underline{0}}_{\underline{a}^{(Co)}_D \ (\text{è nulla } \underline{v}^{(r)}_{DE2})}$$

Poi, per il teorema di Rivals:

$$\underline{a}_{DE2} = \underline{a}_{EE2} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{ED} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{ED},$$

dove $\underline{a}_{EE2}$ si può ottenere da:

$$\Sigma ③: \ \underline{a}_{EE2} = \underline{a}^{(r)}_{EE2} + \underline{a}^{(tr)}_{EE2} + \underline{a}^{(Co)}_{EE2}$$

$$= \underbrace{\frac{r \cdot R}{r+R}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 \underline{J}}_{\underline{a}^{(r)}_E \ (= \underline{a}_{CV_2} \text{ nel moto relativo})} + \underbrace{\ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CE} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{CE}}_{\underline{a}^{(tr)}_E} + \underbrace{\underline{0}}_{\underline{a}^{(Co)}_E \ (\text{è nulla } \underline{v}^{(r)}_{EE2})}$$

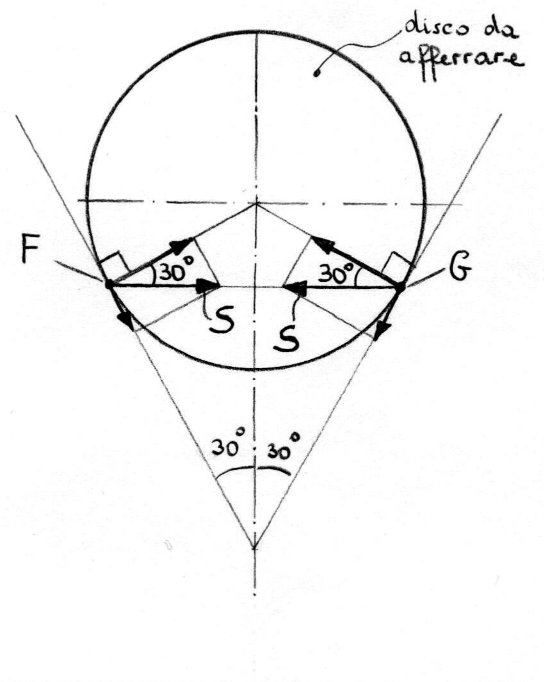
Uguagliando le due espressioni ottenute per $\underline{a}_{DE2}$:

$$\boxed{\frac{R}{2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \underline{i} + \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AD} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AD} = \frac{rR}{r+R}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3)^2 \underline{J} + \ddot{\theta}_3 \underline{k} \times \overrightarrow{CE} - \dot{\theta}_3^2 \overrightarrow{CE} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{ED} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{ED}}$$

eq.^{ne} di chiusura (incognite: $\ddot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_3$)

– ESERCIZIO 2 –

1)

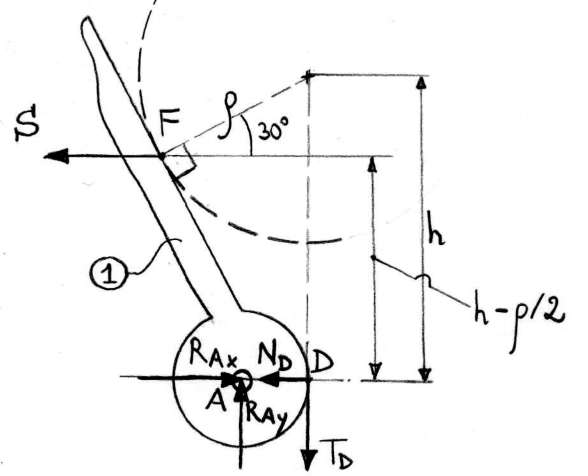


Sia in corrispondenza di F che di G, la forza di contatto $\underline{S}$ ha una direzione che forma un angolo di 30° con la direzione normale al piano di contatto. Pertanto:

$$\varphi_{s_{min}} = 30° \longrightarrow f_{s_{min}} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577$$

(*) Oppure, come per le velocità, si potevano scrivere due eq.^{ni} di chiusura distinte in $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$.

2) Non sono presenti corpi scarichi; tuttavia, il corpo 1 è isostatico:



$\underline{i})\ R_{A_x} - N_D - S = 0$

$\underline{J})\ R_{A_y} = T_D$, con $N_D = T_D \tan 20°$

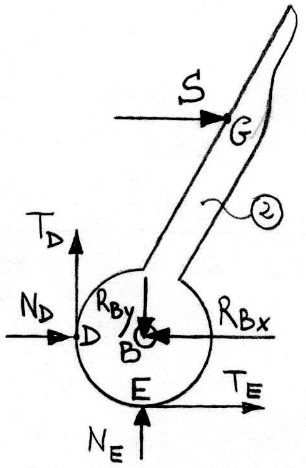
$\curvearrowleft A)\ S(h-\rho/2) = T_D R$

Risolvendo:

- $T_D = S\,\dfrac{(h-\rho/2)}{R} = R_{A_y}$ (positiva)
- $N_D = S\,\dfrac{(h-\rho/2)\tan 20°}{R}$ (positiva)
- $R_{A_x} = S\left(1+\dfrac{(h-\rho/2)}{R}\tan 20°\right)$ (positiva)

$\underline{\text{Oss}}$. Se T_D fosse risultata negativa, anche N_D lo sarebbe stata: attenzione a ripristinare correttamente la fisica del problema (N_D deve essere centripeta, v. Fig. 3).

A questo punto si può passare al corpo 2:



$\underline{i})\ S + N_D + T_E - R_{B_x} = 0$

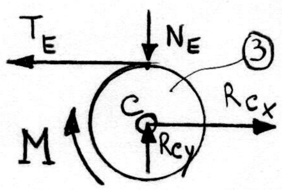
$\underline{J})\ T_D + N_E - R_{B_y} = 0$, con $N_E = T_E \tan 20°$

$\curvearrowleft B)\ T_E R - T_D R - S(h-\rho/2) = 0$

Risolvendo:

- $T_E = 2S\,\dfrac{(h-\rho/2)}{R} = 2T_D$ (positiva)
- $N_E = 2S\,\dfrac{(h-\rho/2)\tan 20°}{R} = 2N_D$ (")
- $R_{B_x} = S\left(1+\dfrac{(h-\rho/2)}{R}(2+\tan 20°)\right)$ (")
- $R_{B_y} = S\,\dfrac{(h-\rho/2)}{R}(1+2\tan 20°)$ (")

Infine il corpo 3:



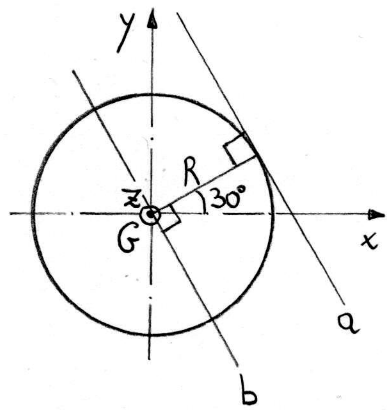
$\underline{i})\ R_{C_x} = T_E = 2S\,\dfrac{(h-\rho/2)}{R}$ (positiva)

$\underline{J})\ R_{C_y} = N_E = 2S\,\dfrac{(h-\rho/2)\tan 20°}{R}$ (")

$\curvearrowleft C)\ M = T_E r = 2S(h-\rho/2)\dfrac{r}{R}$ (")

Si possono adesso riportare i DCL risolti (già disponibili sopra avendo "indovinato" i versi corretti di tutte le reazioni).

– ESERCIZIO 3 –



Il s.d.r. $(G; x, y, z)$ è baricentrico e principale d'inerzia. È ben noto che:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2$$

e quindi che:

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{1}{4} m R^2$$

Data l'assialsimmetria del cerchio omogeneo, il momento d'inerzia attorno all'asse baricentrico b (v. figura) è ancora:

$$J_b = J_x = J_y = \frac{1}{4} m R^2$$

Si può dunque ottenere J_a utilizzando il teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner):

- $J_a = J_b + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2 = 5000 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Lo svolgimento delle versioni B e C è perfettamente analogo a quello della versione A.