UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

3 Settembre 2015

ESAME DI MECCANICA – solo PRIMA PARTE

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

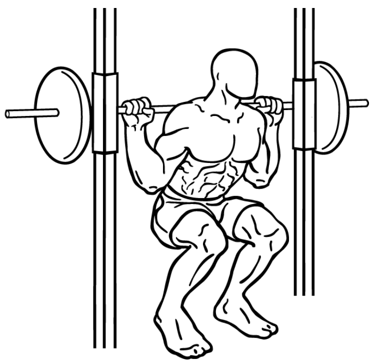


Figura 1

La Figura 1 mostra schematicamente l'esercizio di squat alla Smith machine. In prima approssimazione, atleta, bilanciere e macchina possono essere assimilati al meccanismo reppresentato in Fig. 2 (in cui il corpo 1 rappresenta il bilanciere e la parte superiore del corpo dell'atleta, il corpo 2 le cosce, e il corpo 3 il resto delle gambe).

Nella configurazione rappresentata, si considerino assegnate la velocità $\dot{y}$ e l'accelerazione $\ddot{y}$ del corpo 1 e le altre quantità geometriche indicate in figura.

1. Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità, assumendo $\dot{y} > 0$: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

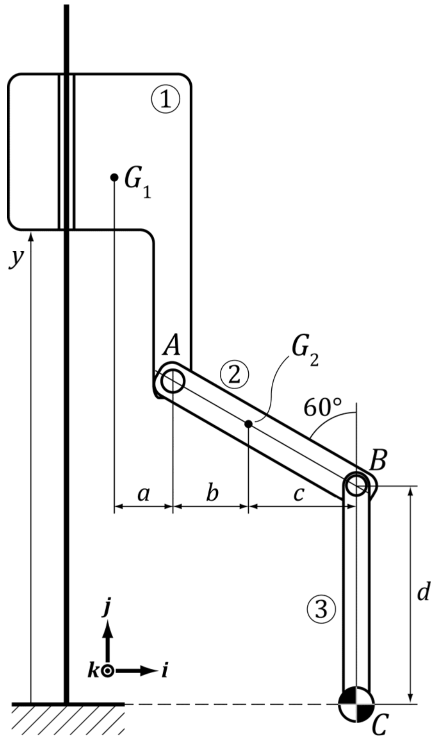


Figura 2

Esercizio 2

Si vogliono ora valutare, in prima approssimazione, le reazioni sviluppate dal corpo dell'atleta per sostenere il proprio peso e quello del bilanciere, come rappresentato in Fig. 3. Per instaurare condizioni di equilibrio statico, il corpo umano genera azioni interne tramite muscoli, tendini, legamenti, ecc. In corrispondenza di ciascuna cerniera (articolazione), tali azioni **interne** possono essere sostituite da un sistema equivalente costituito da una reazione (due componenti scalari) ed una coppia; una tale cerniera si dice *attiva*. Nel caso in esame, si supponga per semplicità che l'unica cerniera attiva sia la cerniera B (articolazione ginocchia). Si consideri inoltre trascurabile la massa del corpo 3.

1. Determinare tutte le forze/coppie reattive in funzione dei parametri del problema.
2. Determinare tutte le forze/coppie reattive con i seguenti valori numerici: $m_1 = 110$ kg, $m_2 = 30$ kg, $a = 0.1$ m, $b = 0.15$ m, $c = 0.2$ m, $d = 0.4$ m.

Per i punti 1 e 2, riportare i diagrammi di corpo libero *risolti*.

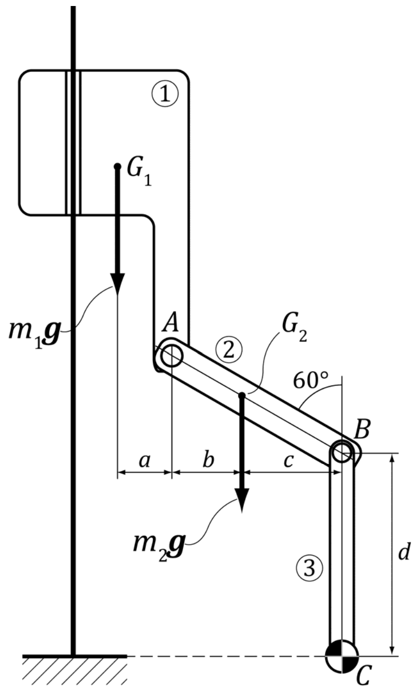


Figura 3

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

3 Settembre 2015

ESAME DI MECCANICA –PRIMA PARTE DI INTERO

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Esercizio 1

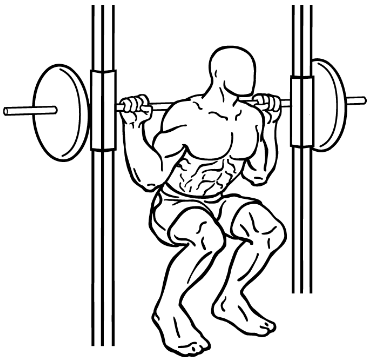


Figura 1

La Figura 1 mostra schematicamente l'esercizio di squat alla Smith machine. In prima approssimazione, atleta, bilanciere e macchina possono essere assimilati al meccanismo reppresentato in Fig. 2 (in cui il corpo 1 rappresenta il bilanciere e la parte superiore del corpo dell'atleta, il corpo 2 le cosce, e il corpo 3 il resto delle gambe).

Nella configurazione rappresentata, si considerino assegnate la velocità $\dot{y}$ e l'accelerazione $\ddot{y}$ del corpo 1 e le altre quantità geometriche indicate in figura.

1. Scrivere l'espressione della velocità del generico punto di ogni corpo, anche in funzione di grandezze ancora incognite.
2. Risolvere per via grafica il problema delle velocità, assumendo $\dot{y} > 0$: equazione di chiusura, triangolo delle velocità e segni delle velocità incognite.
3. Ottenere analiticamente le espressioni delle velocità incognite di cui al punto precedente in funzione dei dati del problema.
4. Determinare il centro delle velocità del corpo 2.
5. Ottenere l'equazione di chiusura per le accelerazioni.

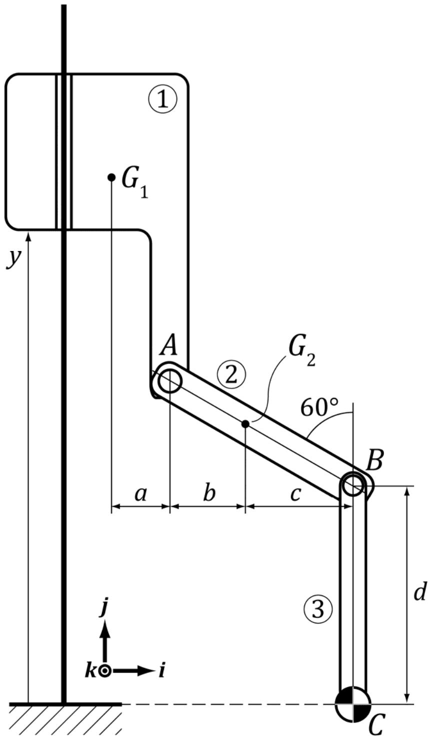


Figura 2

Esercizio 2

Si vogliono ora valutare, in prima approssimazione, le reazioni sviluppate dal corpo dell'atleta per sostenere il proprio peso e quello del bilanciere, come rappresentato in Fig. 3. Per instaurare condizioni di equilibrio statico, il corpo umano genera azioni interne tramite muscoli, tendini, legamenti, ecc. In corrispondenza di ciascuna cerniera (articolazione), tali azioni **interne** possono essere sostituite da un sistema equivalente costituito da una reazione (due componenti scalari) ed una coppia; una tale cerniera si dice *attiva*. Nel caso in esame, si supponga per semplicità che l'unica cerniera attiva sia la cerniera *B* (articolazione ginocchia). Si consideri inoltre trascurabile la massa del corpo 3.

Determinare tutte le forze/coppie reattive in funzione dei parametri del problema. Riportare i diagrammi di corpo libero *risolti*.

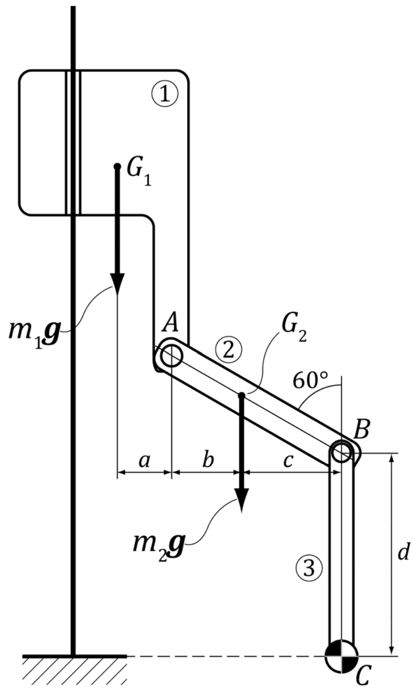


Figura 3

• SOLUZIONE COMPITO 1ª PARTE •

– ESERCIZIO 1 –

1) $\underline{v}_{P\in 1} = \dot{y}\,\underline{J}$ (moto traslatorio rettilineo)

$$\underline{v}_{Q\in 2} = \underset{\underset{\underline{v}_{A\in 1}}{\parallel}}{\underline{v}_{A\in 2}} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AQ} = \dot{y}\,\underline{J} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AQ}$$

(A punto notevole)

$\underline{v}_{R\in 3} = \cancel{\underline{v}_C}^{\,0} + \dot{\theta}_3\,\underline{k}\times\overrightarrow{CR}$ (moto rotatorio attorno a C)

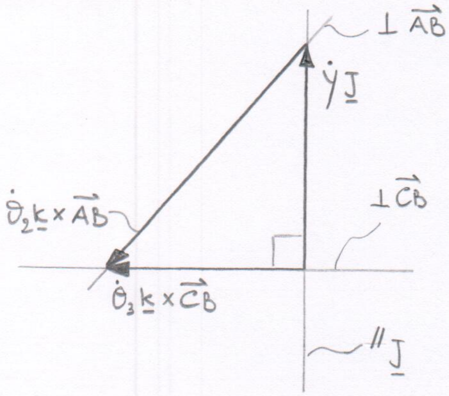
2) Sfruttiamo il punto notevole B per la chiusura:

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 3}$$

$$\underline{\dot{y}\,\underline{J} + \dot{\theta}_2\,\underline{k}\times\overrightarrow{AB} = \dot{\theta}_3\,\underline{k}\times\overrightarrow{CB}}$$

eq.ne di chiusura nelle incognite $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$

Triangolo delle velocità:



$(\dot{y} > 0)$

$\dot{\theta}_2 < 0$

$\dot{\theta}_3 > 0$

3)
$$\dot{y}\,\underline{J} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{J} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_3 \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} AB_x = b+c \\ AB_y = -(b+c)\tan 30° = -\dfrac{b+c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\dot{y}\,\underline{J} + \frac{b+c}{\sqrt{3}}\dot{\theta}_2\,\underline{i} + (b+c)\dot{\theta}_2\,\underline{J} = -\dot{\theta}_3 d\,\underline{i}$$

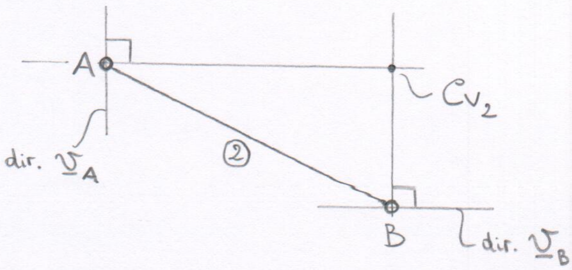
$$\begin{cases} \dfrac{b+c}{\sqrt{3}}\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3 d \\ \dot{y} + (b+c)\dot{\theta}_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_2 = -\dfrac{\dot{y}}{b+c} \\ \dot{\theta}_3 = \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{3}\,d} \end{cases}$$

(segni concordi con quelli ottenuti col triangolo delle velocità)

4) Cv_1 non esiste (moto traslatorio)

$Cv_3 \equiv C$ (cerniera fissa)

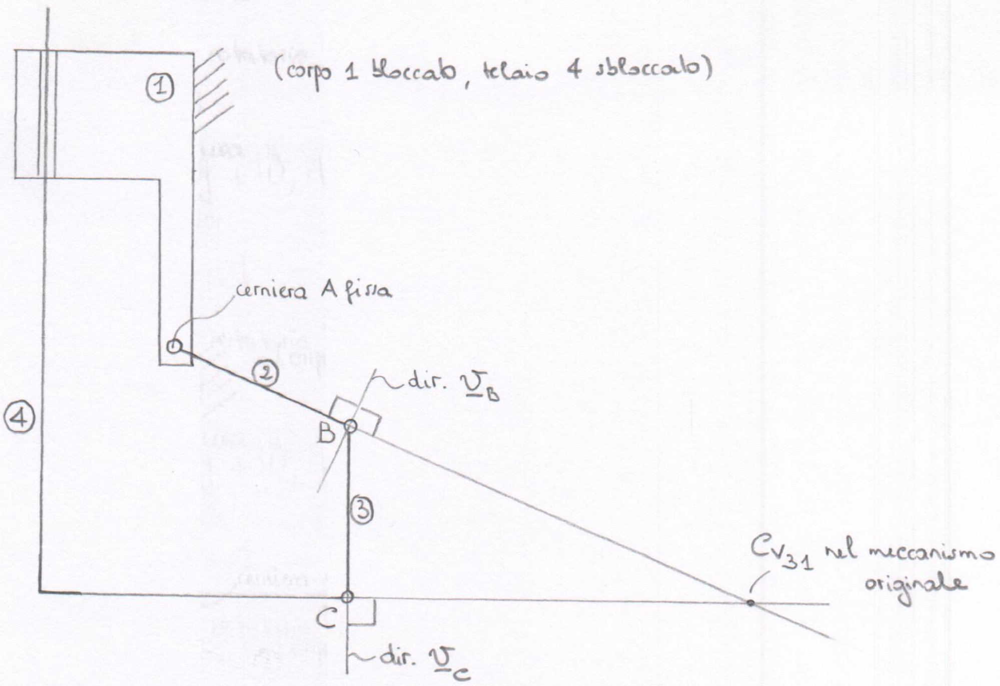
Cv_2 : vedi a lato



$Cv_{12} \equiv A$

$Cv_{23} \equiv B$

$Cv_{13} = Cv_{31}$:



5) $\underline{a}_{A\in 1} = \underline{a}_{A\in 2} = \ddot{y}\,\underline{J}$

$\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_A + \ddot{\theta}_2\,\underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_2^2\,\overrightarrow{AB}$

$\underline{a}_{B\in 3} = \ddot{\theta}_3\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_3^2\,\overrightarrow{CB}$

$$\underline{a}_{B\in 2} = \underline{a}_{B\in 3}$$

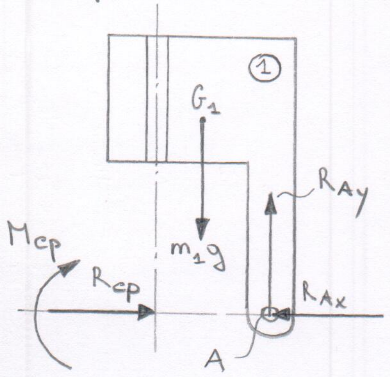
$$\underline{\ddot{y}\,\underline{J} + \ddot{\theta}_2\,\underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_2^2\,\overrightarrow{AB} = \ddot{\theta}_3\,\underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_3^2\,\overrightarrow{CB}}$$

eq.^{ne} di chiusura nelle incognite $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$

– ESERCIZIO 2 –

Per risolvere il problema potremmo applicare il PSE facendo agire prima $\underline{m_1 g}$, ad esempio, poi $\underline{m_2 g}$. Tuttavia, se quando agisce solo $\underline{m_2 g}$ il corpo 1 risulta scarico, quando agisce solo $\underline{m_1 g}$ nessun corpo è scarico (2 non lo è per la presenza della cerniera attiva B); quindi, usare il PSE non porta vantaggi rispetto ad analizzare il sistema in compresenza delle due forze peso. (ma ovviam. si può usare).

1) Il sistema non è esternamente isostatico, né esistono sottosistemi isostatici, tuttavia è globalmente isostatico (9 eq.^{ni} cardinali scalari in 9 forze/coppie incognite, ricordando che tra le ultime compare anche la coppia interna C_B). È necessario studiare gli equilibri dei singoli corpi. Iniziamo, ad esempio, dal corpo 1.



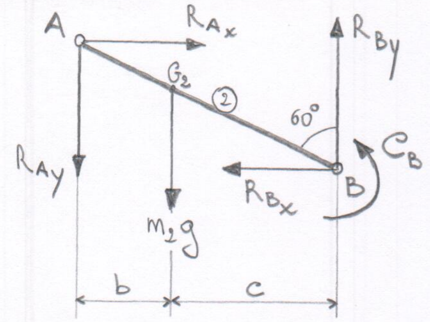
$\underline{i}$) $R_{Ax} = R_{cp}$ (1)

$\underline{J}$) $R_{Ay} = m_1 g$ (2)

A) $M_{cp} = m_1 g a$ (3)

(sono cerchiate le incognite)

Corpo ② :

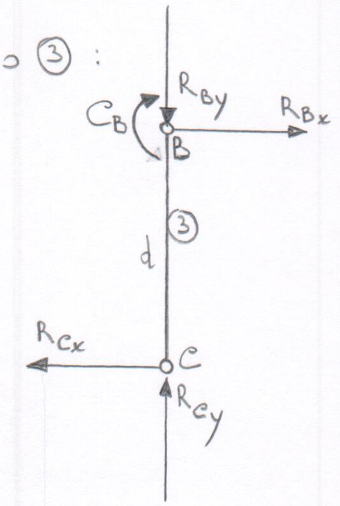


$$\text{i)}\quad R_{Bx} = R_{Ax} \qquad (4)$$

$$\text{j)}\quad R_{By} = R_{Ay} + m_2 g = (m_1 + m_2) g \qquad (5)$$

$$\text{B)}\quad C_B - R_{Ax}\frac{b+c}{\sqrt{3}} + R_{Ay}(b+c) + m_2 g c = 0 \qquad (6)$$

Corpo ③ :



$$\text{i)}\quad R_{Cx} = R_{Bx} \qquad (7)$$

$$\text{j)}\quad R_{Cy} = R_{By} = (m_1 + m_2) g \qquad (8)$$

$$\text{C)}\quad - C_B - R_{Bx} d = 0 \qquad (9)$$

Come prevedibile, abbiamo ottenuto un sistema di 9 eq.ni in 9 incognite. Trattandosi di eq.ni molto semplici, è facile risolvere. Usiamo l'eq. (9) e poi la (6) per ottenere C_B e R_{Ax} ($= R_{Bx}$) :

$$(9) \; : \quad C_B = -R_{Bx} d = -R_{Ax} d \quad (\text{dalla } (4))$$

Sostituendo in (6) :

$$-R_{Ax} d - R_{Ax}\frac{b+c}{\sqrt{3}} + m_1 g (b+c) + m_2 g c = 0$$

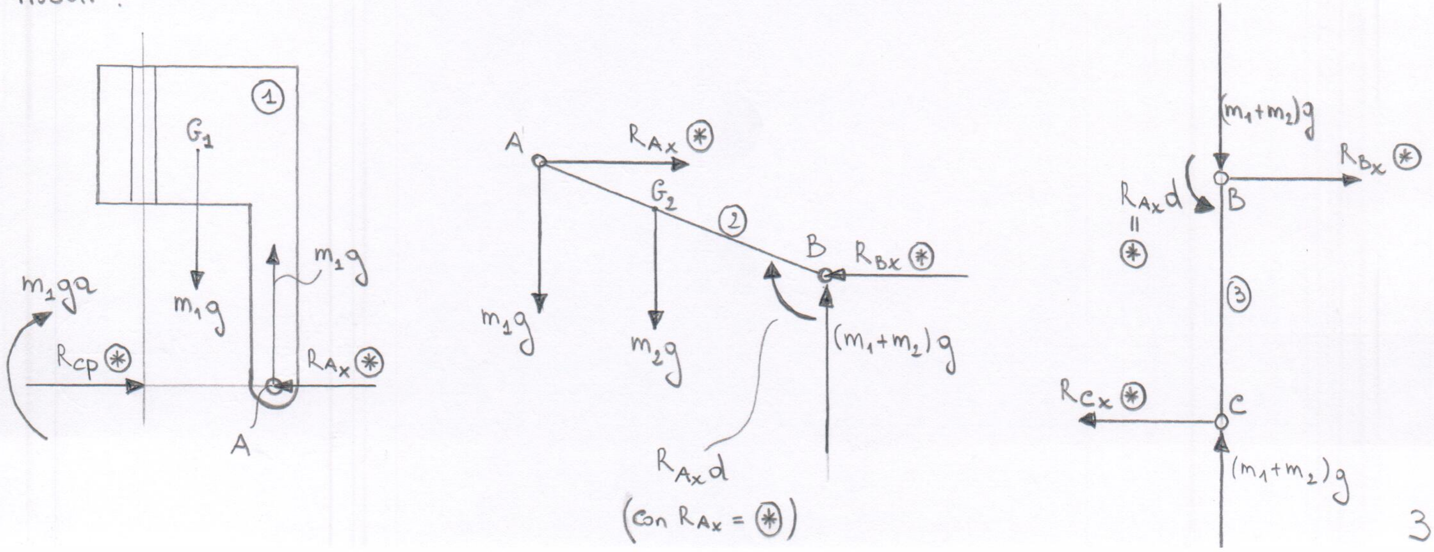
$$R_{Ax}\left(\frac{b+c+\sqrt{3}d}{\sqrt{3}}\right) = m_1 g (b+c) + m_2 g c$$

• $$R_{Ax} = \sqrt{3}g\,\frac{m_1(b+c) + m_2 c}{b+c+\sqrt{3}d} = R_{cp} = R_{Bx} = R_{Cx} \qquad \circledast$$

Dalla (9) quindi :

• $$C_B = -R_{Ax} d = -\sqrt{3}dg\,\frac{m_1(b+c) + m_2 c}{b+c+\sqrt{3}d}$$

DCL risolti :



2) DCL risolti con i dati numerici :