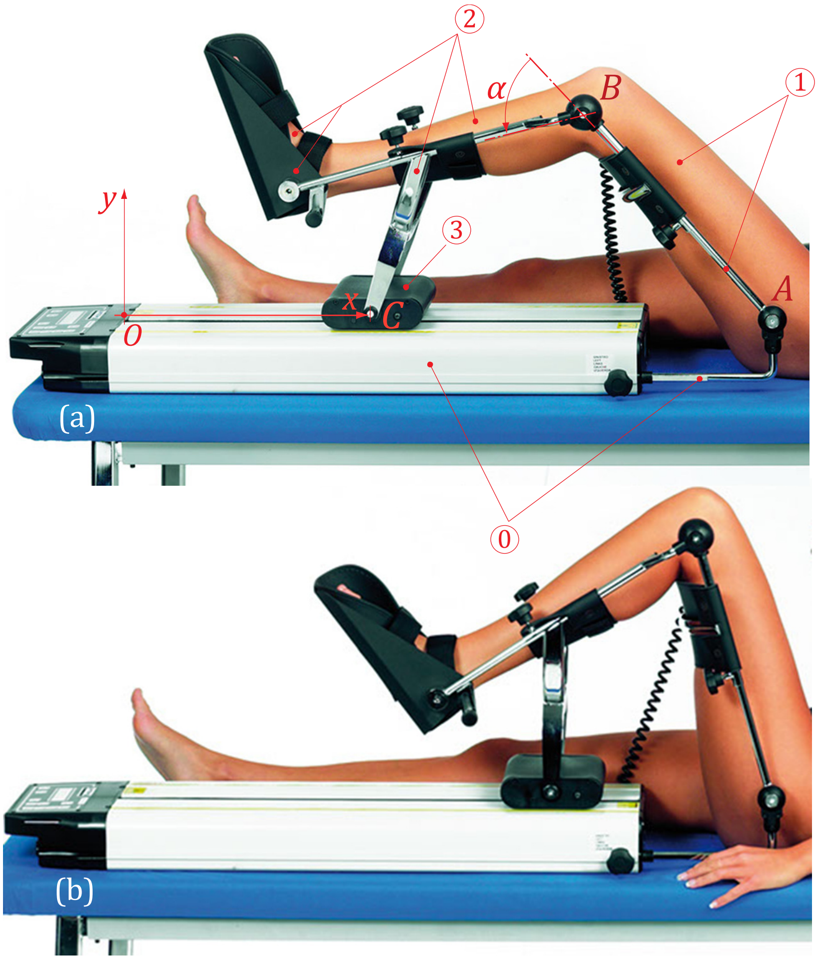
**Università di Pisa**
Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

2 Luglio 2018

# ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE

*Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica*

## *Esercizio 1*




In figura è rappresentato un dispositivo per la riabilitazione passiva dell'arto inferiore (in particolare per la flesso-estensione di ginocchio e anca). Le immagini (a) e (b) mostrano due fasi distinte del movimento indotto sull'arto del paziente. Il corpo 0 è fisso. È semplice osservare che il meccanismo (piano in prima approssimazione) ha un solo grado di libertà. Si prenda in esame la configurazione (a): sono note le coordinate dei punti $A$, $B$ e $C$ nel sistema di riferimento ($O$; $x$, $y$) indicato; $x$ funge anche da coordinata lagrangiana del sistema.

1. Tenendo conto delle indicazioni in figura sui vari corpi, modellare il sistema reale in esame come un opportuno meccanismo cinematicamente equivalente.
2. Determinare graficamente le posizioni di tutti i centri delle velocità, sia assoluti che relativi.
3. Si assuma nota la velocità $\dot{x} > 0$ della slitta 3. Per la determinazione delle velocità angolari dei corpi 1 e 2, si ottenga l'equazione di chiusura e si risolva per via grafica (triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite) e per via analitica in funzione dei dati del problema.
4. Assumendo $\dot{x} = 20\ \text{mm/s}$, $A = (1.11, 0)\ \text{m}$, $B = (0.79, 0.35)\ \text{m}$, $C = (0.42, 0)\ \text{m}$, determinare numericamente la velocità angolare di flessione del ginocchio, ovvero la derivata temporale dell'angolo (relativo) di flessione $\alpha$ (indicato in figura).
5. Ottenere l'equazione di chiusura per la determinazione delle accelerazioni angolari dei corpi 1 e 2.

## *Esercizio 2*

Si consideri ancora la configurazione (a) del sistema dell'esercizio 1. Per i corpi 1 e 2 si assumano rispettivamente le masse $m_1 = 8$ kg e $m_2 = 4$ kg.

1. Considerando che le masse ($m_1$, $m_2$) sono ascrivibili prevalentemente all'arto del paziente, si faccia una stima ragionevole (è sufficiente un'ispezione visiva di prima approssimazione) delle posizioni dei baricentri $G_1$ e $G_2$, esprimendone le coordinate nel sistema di riferimento ($O$; $x$, $y$).
2. Sui corpi 1 e 2 agiscono le rispettive forze peso: determinare la forza $\boldsymbol{F}$ richiesta all'attuatore lineare della slitta 3 per mantenere il sistema in condizioni di equilibrio statico (come retta di applicazione di $\boldsymbol{F}$ si assuma per semplicità una retta orizzontale passante per $C$) e tutte le reazioni vincolari, riportando infine i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.

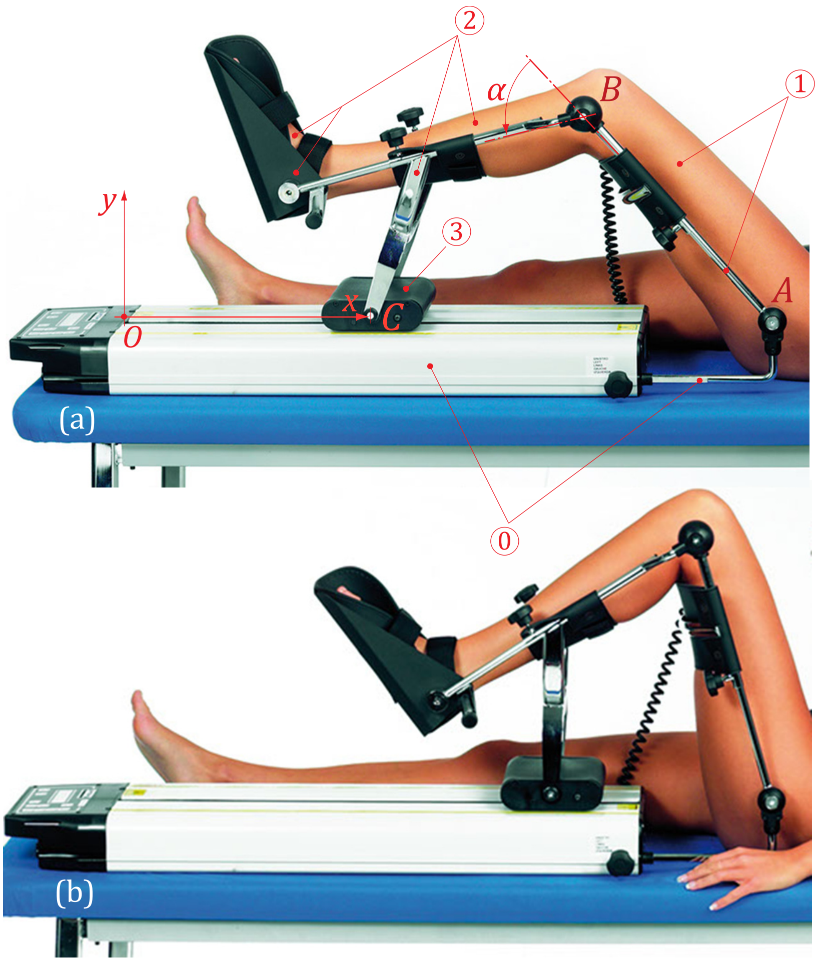
**UNIVERSITÀ DI PISA**
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

2 Luglio 2018

# ESAME DI MECCANICA – PRIMA PARTE DI INTERO

*Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica*

## *Esercizio 1*




In figura è rappresentato un dispositivo per la riabilitazione passiva dell'arto inferiore (in particolare per la flesso-estensione di ginocchio e anca). Le immagini (a) e (b) mostrano due fasi distinte del movimento indotto sull'arto del paziente. Il corpo 0 è fisso. È semplice osservare che il meccanismo (piano in prima approssimazione) ha un solo grado di libertà. Si prenda in esame la configurazione (a): sono note le coordinate dei punti $A$, $B$ e $C$ nel sistema di riferimento ($O$; $x$, $y$) indicato; $x$ funge anche da coordinata lagrangiana del sistema.

1. Tenendo conto delle indicazioni in figura sui vari corpi, modellare il sistema reale in esame come un opportuno meccanismo cinematicamente equivalente.
2. Determinare graficamente le posizioni dei centri delle velocità assoluti.
3. Si assuma nota la velocità $\dot{x} > 0$ della slitta 3. Per la determinazione delle velocità angolari dei corpi 1 e 2, si ottenga l'equazione di chiusura e si risolva per via grafica (triangolo delle velocità, segni delle velocità incognite) e per via analitica in funzione dei dati del problema.
4. Ottenere l'equazione di chiusura per la determinazione delle accelerazioni angolari dei corpi 1 e 2.

## *Esercizio 2*

Si consideri ancora la configurazione (a) del sistema dell'esercizio 1, in cui:

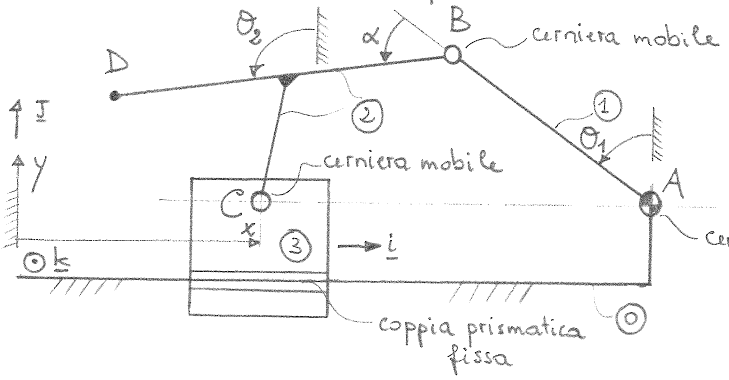
$A = (1.11, 0)$ m, $B = (0.79, 0.35)$ m, $C = (0.42, 0)$ m; per i corpi 1 e 2 si assumano rispettivamente le masse $m_1$ = 8 kg e $m_2$ = 4 kg.

1. Considerando che le masse ($m_1$, $m_2$) sono ascrivibili prevalentemente all'arto del paziente, si faccia una stima ragionevole (è sufficiente un'ispezione visiva di prima approssimazione) delle posizioni dei baricentri $G_1$ e $G_2$, esprimendone le coordinate nel sistema di riferimento ($O$; $x$, $y$).
2. Sui corpi 1 e 2 agiscono le rispettive forze peso: determinare la forza $\boldsymbol{F}$ richiesta all'attuatore lineare della slitta 3 per mantenere il sistema in condizioni di equilibrio statico (come retta di applicazione di $\boldsymbol{F}$ si assuma per semplicità una retta orizzontale passante per $C$) e tutte le reazioni vincolari, riportando infine i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.

# – SOLUZIONE –

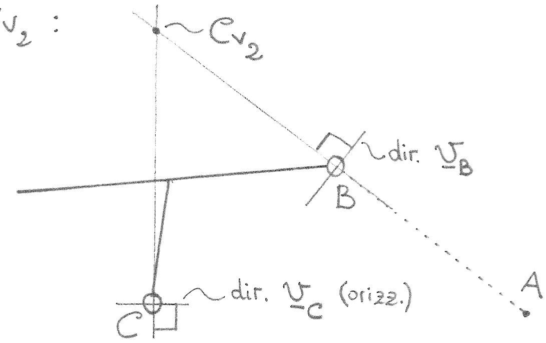
## • ESERCIZIO 1 •

1) Possibile modellazione di meccanismo equivalente:

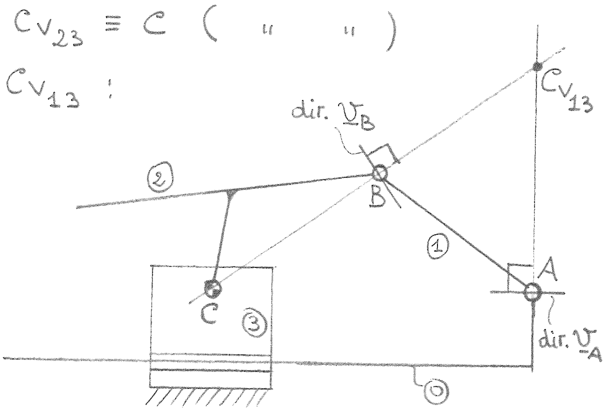



(manovellismo di spinta centrato)

2) $Cv_1 \equiv A$ (cerniera fissa)
$Cv_3$ non esiste (moto traslatorio)
$Cv_2$ :




$Cv_{12} \equiv B$ (cerniera mobile)
$Cv_{23} \equiv C$ ( " " )
$Cv_{13}$ :




3) Si può ottenere l'eq.$^{ne}$ di chiusura scrivendo $\underline{v}_B$ in due modi diversi:

$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{C\in 2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{x}\underline{i} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB}$$

$$\underline{v}_{C\in 2} = \underline{v}_{C\in 3}$$

(v. fig. punto 1 per definizione coordinate angolari)

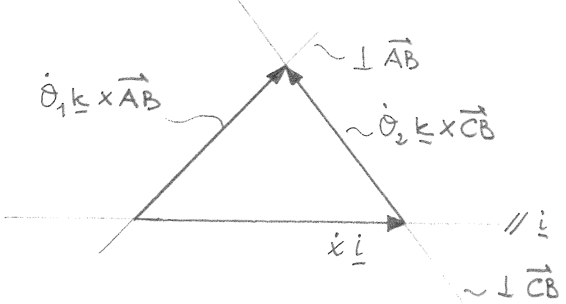
$$\underline{v}_{B\in 2} = \underline{v}_{B\in 1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\boxed{\dot{x}\underline{i} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB}}$$

(incognite: $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$)

Soluzione grafica:




$\dot{x} > 0$ (dato del pb.)
↓
$\dot{\theta}_2 > 0$
$\dot{\theta}_1 < 0$

Soluzione analitica (essendo note le coordinate di A, B, C sono ovviamente note anche le componenti dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ nel sistema carteriano fornito), ottenuta sviluppando i prodotti vettoriali nell'eq.^ne di chiusura:

$$\underline{i}):\ \dot{x} - \dot{\theta}_2 CB_y = -\dot{\theta}_1 AB_y$$

$$\underline{J}):\ \dot{\theta}_2 CB_x = \dot{\theta}_1 AB_x$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \dot{\theta}_1 = \dfrac{CB_x}{AB_x CB_y - AB_y CB_x}\dot{x} \\ \bullet\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{AB_x}{AB_x CB_y - AB_y CB_x}\dot{x} \end{cases}$$

(oppure si poteva lavorare direttamente con le coordinate dei punti anziché con le componenti dei vettori)

4) L'angolo (relativo) di flessione del ginocchio è dato da (cfr. figura al punto 1):

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 \quad , \quad \text{pertanto: } \dot{\alpha} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \text{ è la velocità angolare di flessione}$$

Con i valori numerici a disposizione:

$$\overrightarrow{AB} = (B-A) = (0.79, 0.35) - (1.11, 0) = (-0.32, 0.35)\ m$$

$$\overrightarrow{CB} = (B-C) = (0.79, 0.35) - (0.42, 0) = (0.37, 0.35)\ m$$

$$\longrightarrow \quad \bullet\ \dot{\theta}_1 = -0.0306\ \frac{rad}{s} \qquad \bullet\ \dot{\theta}_2 = 0.0265\ \frac{rad}{s}$$

(segni concordi con TDV)

Pertanto:

$$\bullet\ \dot{\alpha} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = 0.0571\ \frac{rad}{s}$$

5) Si procede esattamente secondo quanto fatto nel pb. delle velocità.

$$\underline{a}_{BE2} = \underset{\underset{\underline{a}_{CE3}}{\parallel}}{\underline{a}_{CE2}} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB}$$

$$\underline{a}_{BE2} = \underline{a}_{BE1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB}$$

Uguagliando:

$$\boxed{\ddot{x}\underline{i} + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \times \overrightarrow{CB} - \dot{\theta}_2^2 \overrightarrow{CB} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \times \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}_1^2 \overrightarrow{AB}}$$ (incognite: $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$)

## • ESERCIZIO 2 •

1) In prima approssimazione, come baricentri $G_1$ e $G_2$ si possono scegliere, rispettivamente, il punto medio del segmento $\overline{AB}$ e quello del segmento $\overline{BD}$, dove D è indicato nella figura del punto 1 dell'Es. 1.
Le coordinate del punto D possono essere stimate dall'immagine (a) sul testo del compito (proporzionamento in scala); si ottiene:

$$D \simeq (0.28, 0.22)\ m$$

Pertanto:

$$\bullet\ G_1 \simeq \frac{A+B}{2} \equiv (0.95, 0.18)\ m$$

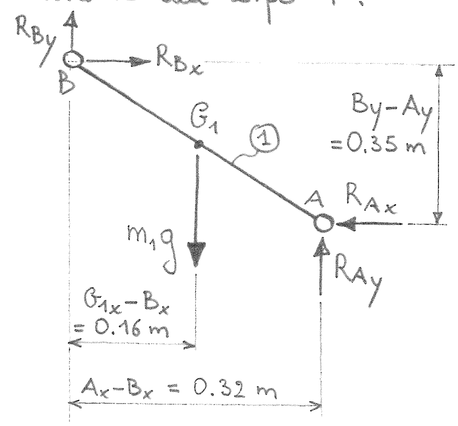
$$\bullet\ G_2 \simeq \frac{B+D}{2} \equiv (0.54, 0.29)\ m$$

(Ovviamente altre scelte di prima approssimazione sono possibili.)

2) Per la determinazione di $\underline{F}$ e delle reazioni vincolari si può procedere adottando il PSE (facendo quindi agire separatamente le forze peso $m_1 \underline{g}$ e $m_2 \underline{g}$), oppure risolvendo l'equilibrio statico direttamente in compresenza delle due forze peso. Si sceglie qui la seconda alternativa, dato che il sistema di eq.$^{ni}$ che ne deriva è costituito da equazioni semplici da risolvere (tutte numeriche).

Non sono presenti corpi scarichi, ma il sottosistema costituito dai corpi 1 e 2 è isostatico (6 eq.$^{ni}$ in 6 inc.).

Iniziamo dal corpo 1:

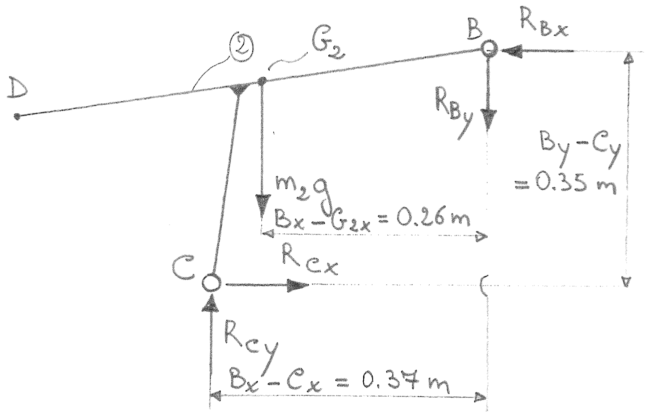



$\underline{i})$ $R_{Ax} = R_{Bx}$

$\underline{J})$ $R_{Ay} + R_{By} = m_1 g$

$\overset{\curvearrowleft}{B})$ $R_{Ay} \cdot 0.32 - R_{Ax} \cdot 0.35 - m_1 g \cdot 0.16 = 0$

Si passa al corpo 2:




$\underline{i})$ $R_{Cx} = R_{Bx}$

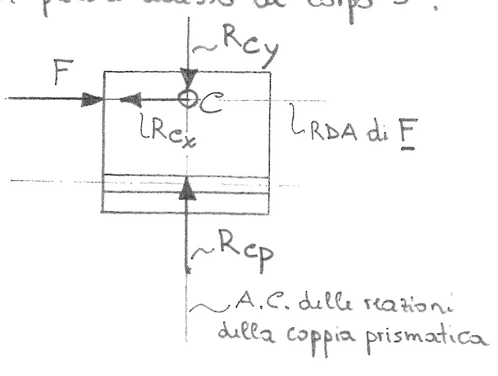
$\underline{J})$ $R_{Cy} = R_{By} + m_2 g$

$\overset{\curvearrowleft}{B})$ $m_2 g \cdot 0.26 + R_{Cx} \cdot 0.35 - R_{Cy} \, 0.37 = 0$

Risolvendo per sostituzione le 6 eq.$^{ni}$ sopra nelle 6 incognite ($R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Cx}, R_{Cy}$) si ottiene facilmente:

$R_{Ax} = 25.0$ N ; $R_{Ay} = 66.5$ N ; $R_{Bx} = 25.0$ N ; $R_{By} = 12.0$ N ; $R_{Cx} = 25.0$ N ; $R_{Cy} = 51.2$ N

Si passa adesso al corpo 3:



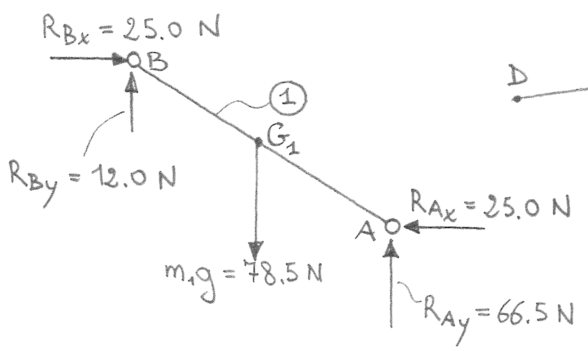

$\underline{i})$ $F = R_{Cx} = 25.0$ N

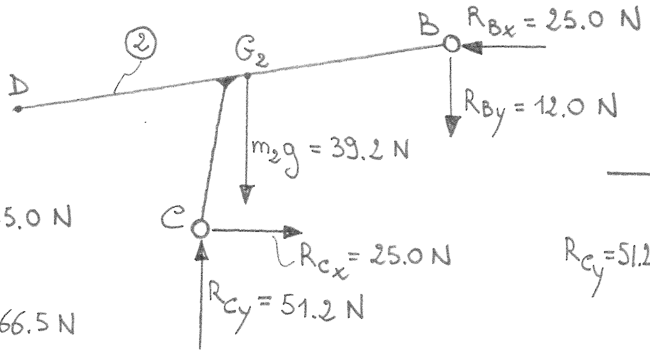
$\underline{J})$ $R_{Cp} = R_{Cy} = 51.2$ N

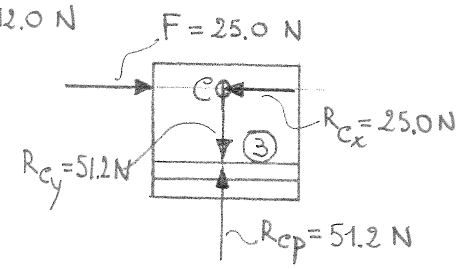
(rispetto a C la II cardinale è soddisfatta)

Adesso è possibile riportare i DCL risolti.

DCL risolti :


$R_{Bx} = 25.0$ N
B
①
$G_1$
$R_{By} = 12.0$ N
$R_{Ax} = 25.0$ N
A
$m_1 g = 78.5$ N
$R_{Ay} = 66.5$ N


B
$R_{Bx} = 25.0$ N
②
$G_2$
D
$R_{By} = 12.0$ N
$m_2 g = 39.2$ N
C
$R_{Cx} = 25.0$ N
$R_{Cy} = 51.2$ N


F = 25.0 N
C
$R_{Cx} = 25.0$N
$R_{Cy} = 51.2$N
③
$R_{cp} = 51.2$ N