UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 settembre 2024

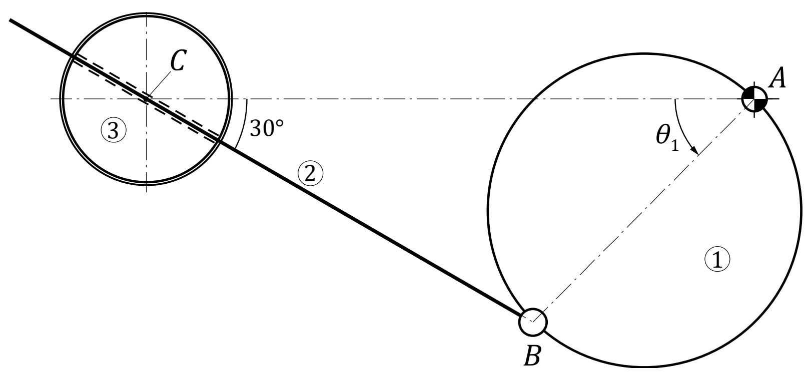
Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola

Esercizio 1

Nel meccanismo in figura, l'asta 2 è collegata al corpo 3 mediante una coppia prismatica mobile, e il corpo 3 è collegato al telaio mediante una cerniera fissa di centro C (il corpo 3 è un cilindro che può ruotare attorno ad un asse fisso, ortogonale al piano del foglio, di traccia C). Nella configurazione rappresentata, $AB = \sqrt{2}n_s$ è il diametro del disco 1 (con n_s in millimetri); sono note inoltre $\theta_1 = 45°$, $\dot{\theta}_1 = 2$ rad/s e $\ddot{\theta}_1 = 0$.



1) Determinare il centro delle velocità del corpo 2 mediante il teorema di Chasles.
2) Determinare numericamente la velocità angolare del corpo 2 e la velocità di strisciamento tra i corpi 2 e 3.
3) Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni.

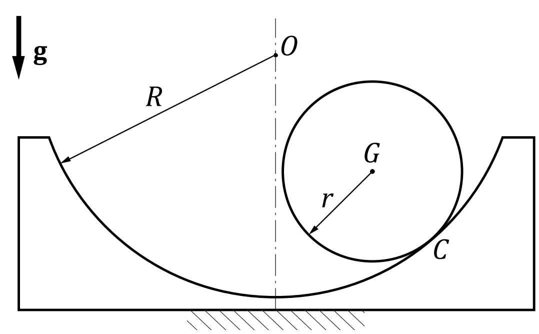
Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Nella configurazione in esame, il corpo 3 è sollecitato da una coppia esterna nota, $\boldsymbol{M}$, avente verso orario e modulo pari a $100\sqrt{3}\, n_s$ N mm.

1) Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ da esercitare sul disco 1 per ottenere condizioni di equilibrio statico e tutte le altre forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.

Esercizio 3

In un piano verticale (= è presente la forza peso), un disco di raggio r rotola senza strisciare su una sede circolare di raggio R, come mostrato in figura. Tale disco, omogeneo e di massa m, compie oscillazioni attorno alla sua configurazione di equilibrio statico. Non è presente alcun fenomeno dissipativo.



1) Assumendo valida l'ipotesi di piccole oscillazioni, ottenere l'equazione differenziale del moto in forma simbolica.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE

Esercizio 1

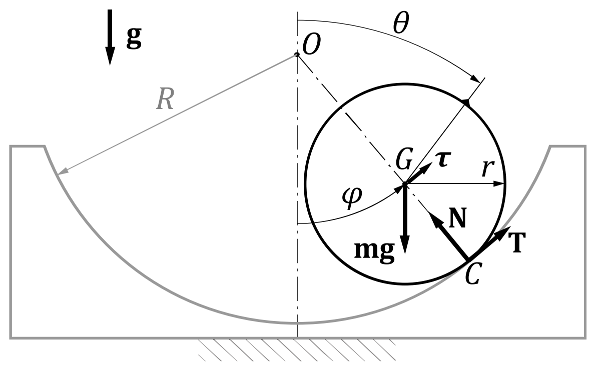
La soluzione dell'Esercizio 1 è perfettamente analoga a quella dell'Esercizio 1 del compito d'esame del 10 gennaio 2023.

Esercizio 2

La soluzione dell'Esercizio 2 è perfettamente analoga a quella dell'Esercizio 2 del compito d'esame del 10 gennaio 2023.

Esercizio 3

Si consideri il disco in una sua generica configurazione, come mostrato in figura:



Il disco ha un solo grado di libertà, quindi il problema dinamico è descritto da una sola equazione differenziale del moto. Per evitare di dover determinare le componenti N e T della reazione di contatto in C, conviene adottare la seguente forma della seconda equazione cardinale della dinamica, scritta rispetto al polo C:

$$\boldsymbol{M}_C^{(e)} = J_C\dot{\boldsymbol{\omega}} + CG \times m\boldsymbol{a}_C$$

Attenzione al fatto che questa equazione prevede che *C sia un punto appartenente al corpo rigido* (o al suo piano mobile), dunque si deve considerare come punto C il punto di contatto che, istante per istante, appartiene al disco (e coincidente con il suo centro delle velocità, data la presenza di RSS).

Come coordinata lagrangiana scegliamo l'angolo assoluto θ indicato in figura (qui definito, per comodità, positivo se orario). Esso esprime la rotazione assoluta del disco. L'angolo φ è invece una coordinata ausiliaria, utile per parametrizzare la traiettoria del centro di massa G del disco.

Consideriamo i vari termini nella seconda cardinale dopo aver moltiplicato tutto scalarmente per un versore $\boldsymbol{k}$ entrante nel piano del foglio (concorde con θ):

$$\boldsymbol{M}_C^{(e)} \cdot \boldsymbol{k} = J_C\ddot{\theta} + (CG \times m\boldsymbol{a}_C) \cdot \boldsymbol{k}$$

Analizziamo il momento risultante fatto dalle forze esterne rispetto a C:

$$\boldsymbol{M}_C^{(e)} \cdot \boldsymbol{k} = -mgr\sin\varphi \approx -mgr\varphi \quad \text{(si è usata l'ipotesi di piccole oscillazioni)}$$

Nel termine inerziale compare il momento d'inerzia

$$J_C = J_G + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 \quad \text{(teorema degli assi paralleli)},$$

mentre il termine $CG \times m\boldsymbol{a}_C$ è nullo perché l'accelerazione $\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C_v} = -D\omega^2\boldsymbol{n}$ è un vettore parallelo a CG.

La seconda cardinale è quindi:

$$-mgr\varphi = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta},$$

ma notiamo subito che oltre alla coordinata lagrangiana θ compare la coordinata ausiliaria φ. Si deve risolvere la dipendenza di φ da θ. Per farlo possiamo intanto scrivere la velocità di G, considerando che tale punto percorre una traiettoria *circolare* di centro O e raggio $(R-r)$:

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{\varphi}(R-r)\boldsymbol{\tau}$$

Possiamo scrivere un'altra espressione della stessa velocità sfruttando la formula fondamentale della cinematica rispetto al centro delle velocità C:

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{\theta}\boldsymbol{k} \times CG = \dot{\theta}r\boldsymbol{\tau}$$

Uguagliando le due espressioni di $\boldsymbol{v}_G$ (e moltiplicando scalarmente per il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$):

$$\dot{\varphi}(R-r) = \dot{\theta}r,$$

che integrata rispetto al tempo fornisce la semplice relazione:

$$\varphi(R-r) = \theta r \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta r}{R-r} \quad \text{(legame indotto dal RSS).}$$

Sostituendo nella seconda cardinale e semplificando:

$$-g\frac{\theta}{R-r} = \frac{3}{2}\ddot{\theta}$$

Riarrangiando i termini otteniamo l'equazione differenziale del moto in forma canonica:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\theta = 0}$$

Si osservi che, sotto l'ipotesi di piccole oscillazioni, la pulsazione naturale del disco è:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}$$