UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

9 gennaio 2024

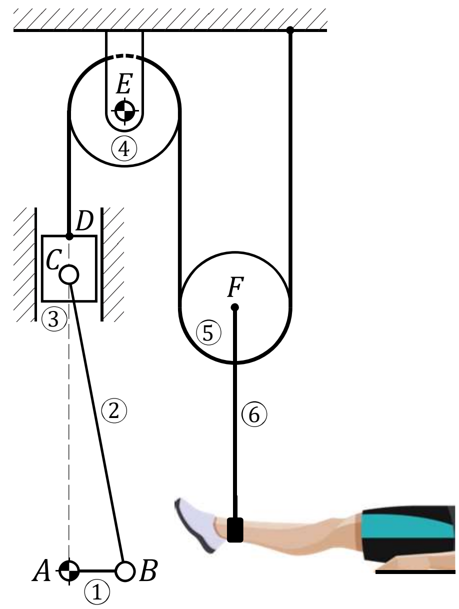
Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola

Esercizio 1

Il meccanismo rappresentato in figura (non in scala) viene utilizzato per effettuare una particolare manovra riabilitativa che consiste nell'applicare *piccoli* sollevamenti periodici agli arti inferiori del paziente. Il sistema include una fune *inestensibile* e perfettamente flessibile: una sua estremità è agganciata al punto D del corsoio 3, l'altra sua estremità è fissata al telaio in alto. Tale fune si avvolge sulla puleggia 4, fissa, e sulla puleggia 5, mobile: tra la fune e ciascuna puleggia non c'è strisciamento (la velocità relativa locale tra fune e puleggia è nulla). Un dispositivo del genere è noto come paranco semplice.



Sono note le lunghezze $\overline{AB} = n_s$ mm e $\overline{AC} = (18/\pi)n_s$ mm. Nella configurazione in esame, la manovella 1 è orizzontale e sta ruotando in senso *orario* con velocità angolare costante e pari, in modulo, a $(200/n_s)$ rad/s.

1) Determinare i centri delle velocità assoluti dei corpi 1, 2, 3, e 5.
2) Determinare la velocità del punto D.
3) Determinare la velocità del punto F (centro della puleggia mobile).
4) Ottenere (senza risolverla) l'equazione di chiusura per il problema delle accelerazioni del manovellismo di spinta.
5) Determinare il legame, in grande (cioè valido per qualsiasi configurazione del sistema), tra le velocità assolute dei punti D e F. [*Suggerimento*: sfruttare il fatto che la lunghezza totale della fune è costante.]

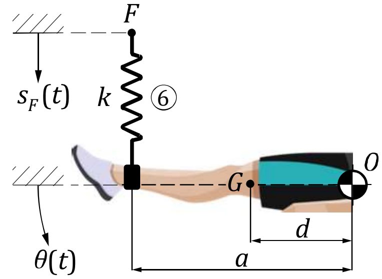
Esercizio 2

Nella configurazione in esame, gli arti inferiori del paziente, tramite il corpo 6, esercitano sulla puleggia 5 una forza $\boldsymbol{P}$ d'intensità $10n_s$ N diretta verso il basso. Nell'ipotesi di poter trascurare gli effetti dinamici e le forze peso dei componenti del dispositivo rispetto a P e alle varie forze reattive:

1) Determinare la coppia motrice che un motore installato nella cerniera A deve esercitare sulla manovella 1 per avere equilibrio (statico); determinare tutte le reazioni vincolari agenti sul manovellismo e sulla puleggia 5.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero *dei corpi 1, 2, 3 e 5* risolti numericamente.
3) Se la puleggia 5 non fosse presente, e quindi se la forza $\boldsymbol{P}$ agisse direttamente sul ramo della fune in uscita dalla puleggia 4, come cambierebbe la coppia motrice necessaria?

Esercizio 3

Il dispositivo già descritto in precedenza è in grado di imporre uno spostamento $s_F(t) = s_0\cos(\Omega t)$, completamente noto, al punto F (v. figura). Qui il corpo 6 è assunto elastico ed è rappresentato da una molla ideale con costante elastica k nota. Gli arti inferiori sono assimilabili ad un corpo rigido che compie *piccole rotazioni* $\theta(t)$ attorno alla cerniera O (centro articolare anche). In corrispondenza di $s_F = 0$ e $\theta = 0$ si ha una configurazione di *equilibrio statico*. Assumendo note a e d, la massa m degli arti inferiori ed il loro momento d'inerzia baricentrico J_G:



1) Ottenere l'equazione differenziale del moto in funzione delle quantità note.
2) Determinare la pulsazione $\widetilde{\Omega}$ al di sotto della quale è opportuno lavorare per evitare di rendere inservibile il dispositivo.

SOLUZIONE

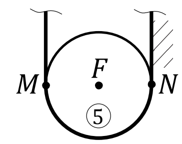
Esercizio 1

1) $C_{v_1} \equiv A$ (cerniera fissa);

   C_{v_2}: i punti B e C hanno entrambi velocità verticale → C_{v_2} non esiste (rette di Chasles parallele);

   C_{v_3} non esiste (il corsoio 3 compie un moto traslatorio);

   C_{v_5}: in corrispondenza di ogni punto di contatto tra fune e puleggia 5, la loro velocità relativa è nulla; la velocità assoluta del punto $N \in 5$ (figura a lato) sarà dunque nulla, quindi $C_{v_5} \equiv N$ (in effetti la puleggia 5 rotola senza strisciare sul ramo destro della fune).



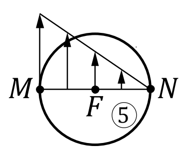
2) Ovviamente, $\boldsymbol{v}_{D\in 3} = \boldsymbol{v}_{C\in 3} = \boldsymbol{v}_{C\in 2}$. Il fatto che C_{v_2}non esiste implica che, in questo istante, $\dot{\theta}_2 = 0$, quindi:

$$\boldsymbol{v}_{C\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 1} = \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB \ \ \text{(completamente nota)}$$

   Con i dati a disposizione, in particolare $\dot{\theta}_1 = -(200/n_s)$ rad/s e $\overline{AB} = n_s$ mm:

$$\boldsymbol{v}_{D\in 3} = \left(-200 \ \frac{\text{mm}}{\text{s}}\right) \mathbf{j}$$

3) Si osservi di nuovo la figura della puleggia 5 qui sopra: date l'inestensibilità della fune e l'assenza di strisciamento tra fune e pulegge, per tramite della puleggia 4 si avrà $\boldsymbol{v}_{M\in 5} = -\boldsymbol{v}_{D\in 3} = (200 \text{ mm/s})\mathbf{j}$. Tenendo anche presente che $C_{v_5} \equiv N$, le velocità dei punti del segmento MN dovranno essere distribuite nel modo seguente:

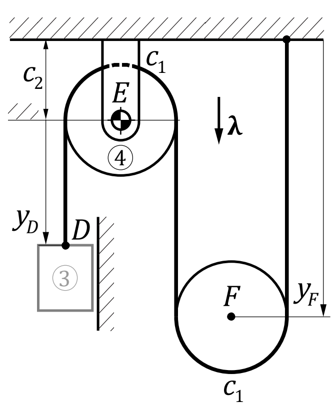


$$\boldsymbol{v}_{F\in 5} = \frac{\boldsymbol{v}_{M\in 5}}{2} = \left(100 \ \frac{\text{mm}}{\text{s}}\right) \mathbf{j}$$

4) Chiusura delle accelerazioni sul punto notevole C di un classico manovellismo di spinta centrato, semplificata dal fatto che $\dot{\theta}_1$ è costante e, in questo istante, $\dot{\theta}_2 = 0$:

$$\boldsymbol{a}_{C\in 2} = \boldsymbol{a}_{C\in 3} \ \ \rightarrow \ \ -\dot{\theta}_1^2 AB + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC = \ddot{s}\mathbf{j} \quad \text{(incognite: } \ddot{\theta}_2 \text{ e } \ddot{s}\text{)}$$

5) Per determinare rigorosamente il legame in grande tra $\boldsymbol{v}_D$ e $\boldsymbol{v}_F$ si può ragionare come segue, facendo riferimento alla figura sotto.



Indichiamo con L la lunghezza totale della fune, costante; indichiamo inoltre con c_1 la lunghezza del tratto di fune che si avvolge su ciascuna puleggia (anch'essa costante, assieme alla distanza c_2). Con le coordinate assolute y_D e y_F parametrizziamo gli spostamenti (verticali) dei punti D ed F. Dovrà valere:

$$y_F + c_1 + (y_F - c_2) + c_1 + y_D = L,$$

che derivata rispetto al tempo fornisce:

$$\dot{y}_F + \dot{y}_F + \dot{y}_D = 0 \ \rightarrow \ \dot{y}_F = -\frac{\dot{y}_D}{2}$$

In termini vettoriali, $\boldsymbol{v}_D = \dot{y}_D \boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{v}_F = \dot{y}_F \boldsymbol{\lambda}$. Il loro legame è dunque:

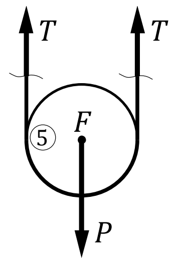
$$\boldsymbol{v}_F = \dot{y}_F \boldsymbol{\lambda} = -\frac{\dot{y}_D}{2} \boldsymbol{\lambda} = -\frac{\boldsymbol{v}_D}{2},$$

risultato che conferma (e generalizza) quanto già ottenuto al punto 3.

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

Esercizio 2

1) Consideriamo l'equilibrio statico della puleggia 5.



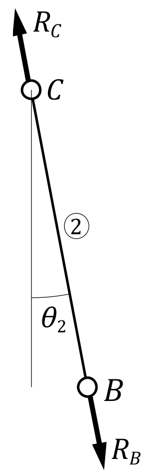
Le due forze T, che devono necessariamente essere di *trazione* per la fune, sono uguali nei due rami per il rispetto della seconda cardinale (basti pensarla scritta rispetto al polo F).

La prima cardinale in verticale fornisce:

$$T = \frac{P}{2} = 5n_s\ \mathrm{N}$$

Considerazioni perfettamente analoghe sulla puleggia 4 portano a concludere che sul corsoio 3, in corrispondenza del punto D, la fune eserciterà la stessa forza T, ovviamente diretta verso l'alto.

Prima di analizzare il corsoio 3 è opportuno osservare che la biella 2 è un'asta scarica:

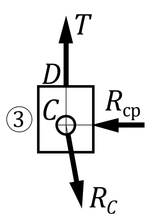


$$R_B = R_C$$

Si osservi che l'angolo θ_2 in figura vale:

$$\tan\theta_2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\pi}{18} \rightarrow \theta_2 \cong 9.9°$$

Analizziamo il corsoio 3.

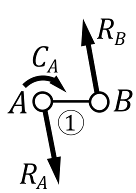


La retta di applicazione della R_{cp} deve passare per C (caso di tre forze non parallele). La prima cardinale in orizzontale e in verticale ci fornisce immediatamente R_C e R_{cp}:

$$R_C = \frac{T}{\cos\theta_2} = 5.08\ n_s\ \mathrm{N} = R_B$$

$$R_{cp} = R_C \sin\theta_2 = 0.87\ n_s\ \mathrm{N}$$

Resta da analizzare soltanto la manovella 1:



per le due reazioni R_A e R_B, inclinate dell'angolo θ_2 rispetto alla verticale, vale:

$$R_A = R_B = 5.08\ n_s\ \mathrm{N}$$

La coppia C_A si determina subito scrivendo la seconda cardinale rispetto, ad esempio, al polo A:

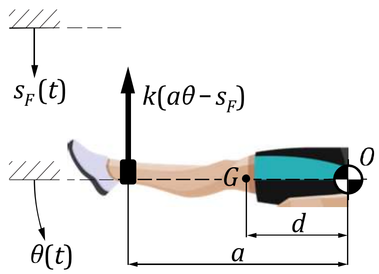
$$C_A = R_B \cos\theta_2\,\overline{AB} = T\,\overline{AB} = \frac{P}{2}\overline{AB} = 5{n_s}^2\ \mathrm{N\,mm}$$

2) [I DCL risolti sono ottenibili direttamente dai risultati del punto 1): tutte le azioni/reazioni ottenute sono positive.]

3) In tal caso, la forza $\boldsymbol{T}$ che la fune applicherebbe al corsoio 3 (in corrispondenza del punto D) sarebbe uguale e opposta a $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{T}$ avrebbe quindi intensità doppia rispetto a quella agente al punto 1). Data la relazione di linearità tra forze attive e reattive, la coppia motrice $\boldsymbol{C}_A$ avrebbe anch'essa intensità doppia (e stesso verso). Il paranco semplice consente quindi di dimezzare la coppia motrice richiesta (e le varie reazioni vincolari).

Esercizio 3

1) Consideriamo il DCL degli arti inferiori, nel quale, data la scelta degli zeri delle coordinate θ e s_F:
   (a) non includiamo esplicitamente la forza peso;
   (b) la variazione di lunghezza della molla Δl che deve comparire nell'espressione della forza elastica è quella calcolata rispetto alla sua configurazione di equilibrio statico ($s_F = 0$ e $\theta = 0$).



Scrivendo direttamente la seconda cardinale rispetto al polo O (per non esporre la reazione vincolare $\boldsymbol{R}_O$):

$$M_O^{(e)} = J_O\ddot{\theta} = (J_G + md^2)\ddot{\theta}$$

L'unico contributo al momento risultante $M_O^{(e)}$ è quello dato dalla forza elastica $k\Delta l = k(a\theta - s_F)$, per cui:

$$-k(a\theta - s_0\cos(\Omega t))a = (J_G + md^2)\ddot{\theta}$$

L'equazione differenziale del moto è quindi:

$$(J_G + md^2)\ddot{\theta} + ka^2\theta = kas_0\cos(\Omega t)$$

Vale la pena osservare che il termine alla destra dell'uguale è un momento periodico $M(t)$, risultato dello spostamento imposto $s_F(t)$, che eccita il sistema con pulsazione Ω: siamo dunque nel caso di vibrazioni forzate (di un sistema a un grado di libertà).

2) È opportuno far lavorare il sistema in un range di pulsazioni Ω inferiori alla pulsazione naturale del sistema per scongiurare il pericolo della *risonanza*, quindi $\widetilde{\Omega} = \omega_n$.
Dividendo per $(J_G + md^2)$ l'equazione differenziale omogenea associata all'equazione del moto e confrontandola con la sua forma canonica:

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{J_G + md^2}\theta = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0,$$

si ottiene subito:

$$\widetilde{\Omega} = \omega_n = a\sqrt{\frac{k}{J_G + md^2}}$$