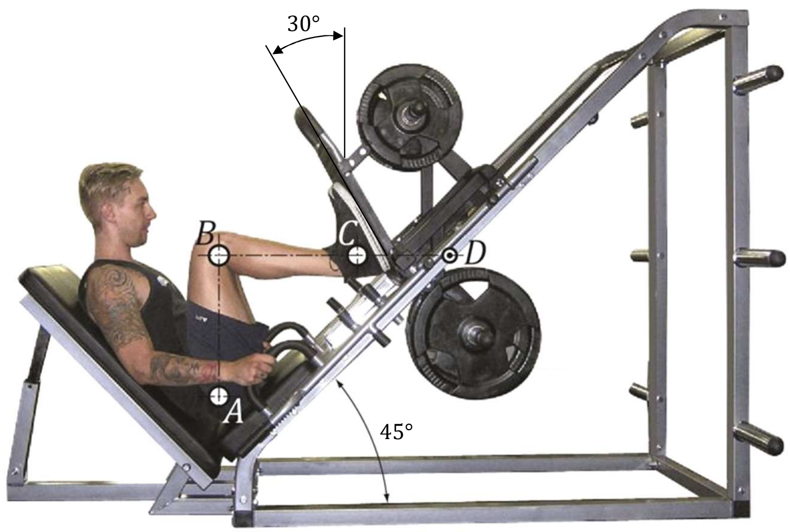
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

8 novembre 2023

Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola



Esercizio 1

L'atleta in figura si sta esercitando su una leg press a 45°. Nella configurazione da analizzare, rappresentata sopra, sono indicati i centri articolari A (anca), B (ginocchio) e C (caviglia). Il punto D è invece il centro di massa del sistema slitta + dischi (solidali tra loro). Il segmento AB è verticale e lungo $2n_s$ cm, BC è orizzontale e anch'esso lungo $2n_s$ cm, CD è orizzontale e lungo n_s cm.

1) Ottenere il semplice meccanismo equivalente a quello costituito da arti inferiori dell'atleta, slitta e telaio.
2) Determinare tutti i centri delle velocità assoluti.
3) Determinare le velocità angolari di cosce e gambe[1] in estensione necessarie per ottenere una velocità della slitta pari a n_s cm/s.
4) Determinare le accelerazioni angolari di cosce e gambe in estensione necessarie per ottenere un'accelerazione nulla della slitta.

Esercizio 2

La pedana della slitta è sensorizzata e rileva che, nella configurazione in esame, la risultante delle azioni di *contatto* scambiate *tra scarpe e pedana* ha come retta di applicazione (asse centrale) quella passante per il punto C e inclinata di 45° rispetto all'orizzontale. Il sistema slitta + dischi ha una massa complessiva m pari a $10n_s$ kg; si assuma che le masse degli arti inferiori dell'atleta siano trascurabili rispetto a m. La slitta è vincolata al telaio mediante una coppia prismatica liscia. Considerando le cerniere A, B e C come cerniere *attive* (tutte le corrispondenti articolazioni sono attraversate da muscoli):

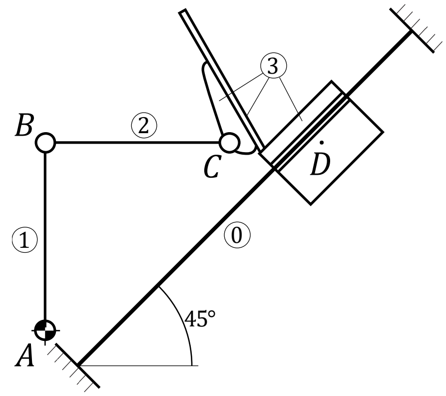
1) determinare il minimo valore del coefficiente d'attrito tra scarpe e pedana necessario per l'equilibrio;
2) determinare le coppie articolari (interne) e tutte le altre reazioni vincolari;
3) ottenere i diagrammi di corpo libero risolti numericamente;
4) commentare le conseguenze di aver adottato sistemi equivalenti (forza + coppia) ridotti ai centri articolari A, B e C sull'entità delle reazioni articolari ottenute: in particolare, tali forze reattive sono una buona approssimazione di quelle derivanti dal contatto articolare?

[1] Coscia: segmento corporeo tra anca e ginocchio; gamba: segmento corporeo tra ginocchio e caviglia.

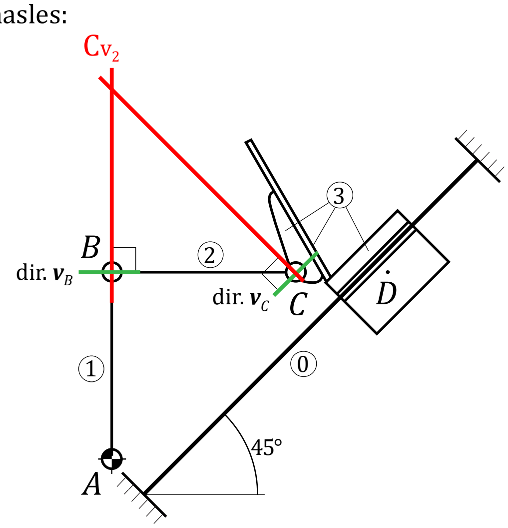
SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Si tratta di un semplice manovellismo di spinta (corpo mobile 1: cosce; corpo mobile 2: gambe; corpo mobile 3: piedi + slitta + dischi; corpo fisso 0: telaio macchina + resto dell'atleta):



2) Il centro delle velocità C_{v1} coincide con il centro A della cerniera fissa, il centro delle velocità C_{v3} non esiste (il corpo 3 compie moto traslatorio rettilineo), il centro delle velocità C_{v2} si ottiene mediante la seguente applicazione del teorema di Chasles:



3) Chiudendo sul punto notevole C:

$$\boldsymbol{v}_{C\in 2} = \boldsymbol{v}_{C\in 3}$$

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC = \dot{s}\boldsymbol{\tau},$$

dove si sono assunte le solite convenzioni sugli angoli (θ_1, θ_2) ed il versore $\boldsymbol{\tau}$ ha componenti $\left(\sqrt{2}/2\,, \sqrt{2}/2\right)$. Risolvendo con i dati a disposizione si ottiene immediatamente:

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

4) Con ragionamento identico si ottiene l'equazione di chiusura per le accelerazioni:

$$\boldsymbol{a}_{C\in 2} = \boldsymbol{a}_{C\in 3}$$

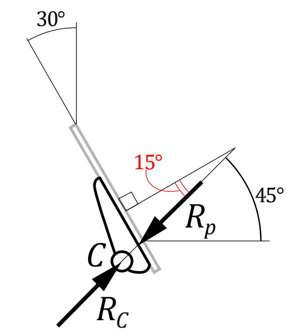
$$\ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB - \dot{\theta}_1^2 AB + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC - \dot{\theta}_2^2 BC = \ddot{s}\boldsymbol{\tau},$$

che risolta con i dati a disposizione (tra cui $\ddot{s} = 0$) fornisce:

$$\ddot{\theta}_1 = -0.125\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}; \quad \ddot{\theta}_2 = 0.125\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Esercizio 2

1) Consideriamo il DCL *dei piedi*, sfruttando la conoscenza della RDA della reazione di contatto $\boldsymbol{R}_p$ che la pedana esercita su di essi:

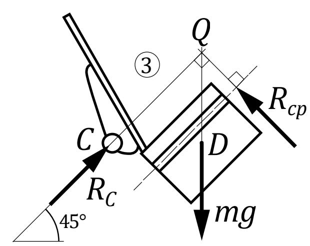


Dal DCL si evince subito che il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra scarpe e pedana necessario per l'equilibrio è:

$$f_{s_{\min}} = \tan(\varphi_{s_{\min}}) = \tan(15°) \cong 0.268$$

Si osserva inoltre immediatamente che, per avere equilibrio statico dei piedi, la reazione $\boldsymbol{R}_C$ alle caviglie deve essere uguale e opposta a $\boldsymbol{R}_p$: dato che $\boldsymbol{R}_C$ e $\boldsymbol{R}_p$ vanno a costituire una coppia a braccio nullo, la coppia articolare $\boldsymbol{C}_C$ alle caviglie (non indicata nel DCL sopra) *deve essere nulla*.

2) Sfruttando quanto ottenuto al punto precedente, conviene iniziare dall'equilibrio statico del corpo 3:



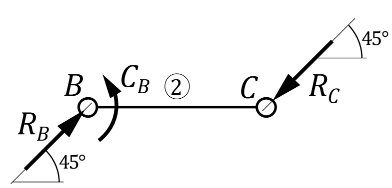
Le rette di applicazione delle tre forze (non parallele) agenti sul corpo 3 devono essere concorrenti nel punto Q, quindi l'asse centrale delle reazioni della coppia prismatica (retta di applicazione della $\boldsymbol{R}_{cp}$) è individuato. Adesso non resta che richiedere il rispetto della prima cardinale, proiettandola ad esempio lungo $\boldsymbol{\tau}$:

$$R_C = mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(= 5\sqrt{2}g n_s\ \text{N}\right)$$

e lungo la direzione ortogonale:

$$R_{cp} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} = R_C$$

Conviene passare adesso al corpo 2:



Prima cardinale:

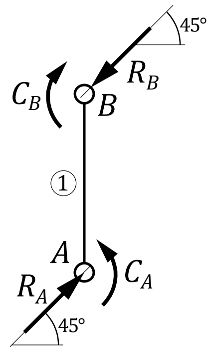
$$R_B = R_C = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$$

Seconda cardinale rispetto al polo B:

$$C_B = R_C \sqrt{2} n_s = mgn_s \; (= 0.1 g n_s^2 \text{ Nm})$$

Vale la pena osservare che la coppia C_B è una coppia di estensione delle ginocchia esercitata essenzialmente dai quadricipiti femorali.

Concludiamo con l'equilibrio del corpo 1:



Prima cardinale:

$$R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$$

Seconda cardinale rispetto al polo A:

$$C_A = C_B - R_B \sqrt{2} n_s = mgn_s - mgn_s = 0$$

(Si osservi che la nullità di C_A poteva essere ottenuta rapidamente considerando l'equilibrio del sottosistema 1 + 2.)

3) [I DCL risolti sono ottenibili direttamente dai risultati del punto 2): tutte le azioni/reazioni ottenute sono positive.]

4) Le forze reattive ottenute *non* sono una buona approssimazione di quelle derivanti dal contatto articolare. Ciascuno dei sistemi equivalenti adottati (ridotti ai vari centri articolari) è costituito da risultante e momento risultante di tutte quelle azioni/reazioni locali che vengono esposte effettuando i "tagli" necessari per isolare i vari corpi, e che quindi contengono anche le forze muscolari: sarebbe necessario modellare la presenza dei muscoli per poter separare i loro contributi dalle reazioni articolari e ottenere una stima più realistica di queste ultime.