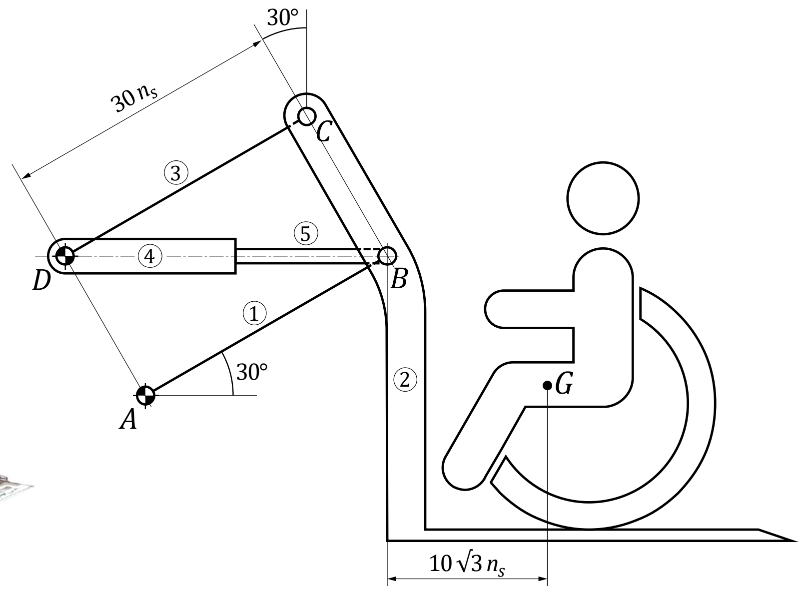
UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

27 giugno 2023

Esame di *Meccanica I*[(a)] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[(b)]

[(a)] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[(b)] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare: n_s = somma delle cifre del numero di matricola



Esercizio 1

Il meccanismo in figura è un sollevatore automatico per pazienti disabili su sedia a rotelle. La piattaforma 2 è la biella di un *parallelogramma articolato* (realizzato assieme alle aste 1 e 3). L'attuatore elettroidraulico (corpi 4 e 5) agisce sui perni delle cerniere B e D. Nella configurazione rappresentata, in cui sono note le quantità riportate in figura (con n_s espresso in mm), si vuole ottenere una velocità di salita della piattaforma 2 pari, in modulo, a n_s mm/s, mentre la sua accelerazione (tangenziale) deve essere nulla.

1) Determinare (motivando) il centro delle velocità assoluto C_{v2} e quelli relativi C_{v13} e C_{v45}.
2) Per ottenere il moto della piattaforma richiesto è necessario comandare opportunamente l'attuatore: determinare numericamente velocità e accelerazione relative che il pistone 5 deve avere rispetto al cilindro 4.

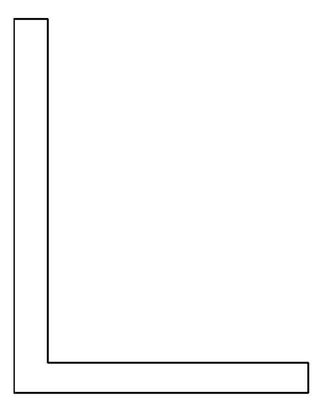
Esercizio 2

Il punto G rappresentato in figura è il centro di massa globale della piattaforma 2, della sedia a rotelle e del disabile; la loro massa totale è pari a 100 kg. Gli altri corpi hanno masse trascurabili, e trascurabili sono anche gli effetti dinamici. In questa configurazione, e sotto l'azione della forza peso:

1) Determinare la forza che deve essere esercitata dall'attuatore e tutte le reazioni vincolari agenti sugli altri corpi mobili.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.

Esercizio 3

Semplificando la forma del corpo 2 come mostrato nella figura a lato, e assumendo che tale corpo sia omogeneo, determinare accuratamente la posizione del suo centro di massa per via grafica.



SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Il centro delle velocità assoluto C_{v2} non esiste, perché la piattaforma 2 compie un moto *traslatorio* circolare (essendo la biella di un parallelogramma articolato). Il centro delle velocità relativo C_{v13} non esiste, perché le aste 1 e 3 ruotano con la stessa velocità angolare (la loro velocità angolare relativa è nulla). Il centro delle velocità relativo C_{v45} non esiste, perché i corpi 4 e 5 sono collegati tra loro da un coppia prismatica (la loro velocità angolare relativa è nulla).

2) Dato il moto traslatorio circolare della piattaforma 2, tutti i suoi punti compiono traiettorie *circolari* identiche; in particolare, concentrandosi sul punto notevole B in questa configurazione, dovranno valere le seguenti relazioni cinematiche (in cui s è l'ascissa curvilinea con cui si parametrizza la traiettoria circolare di B, di centro A):

$$\boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 1} = \boldsymbol{v}_2 = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \text{con } \boldsymbol{\tau} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ \text{e anche:}$$

$$\boldsymbol{a}_{B\in 2} = \boldsymbol{a}_{B\in 1} = \boldsymbol{a}_2 = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\|AB\|}\mathbf{n}, \quad \text{con } \mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Della velocità $\boldsymbol{v}_2$ conosciamo tutto, perché ci è stato assegnato il modulo $|\dot{s}|$ (che deve essere pari a n_s mm/s) e in più sappiamo che deve trattarsi di una velocità di *salita* per la piattaforma, ovvero $\dot{s} > 0$.

Coinvolgiamo l'attuatore (corpi 4 e 5) chiudendo sul punto notevole B:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 5},$$

in cui $\boldsymbol{v}_{B\in 5}$ si esprime facilmente mettendosi solidali al corpo 4:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 5} = \boldsymbol{v}_{B\in 5}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{B\in 5}^{(\mathrm{tr})} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{\theta}_4\mathbf{k} \times DB,$$

dove x è una coordinata relativa con cui parametrizziamo la traiettoria relativa di $B \in 5$ (rettilinea): $\dot{x}\mathbf{i}$ sarà quindi la velocità relativa che il pistone 5 dovrà avere rispetto al cilindro 4. $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono i soliti versori. L'angolo θ_4 è un angolo assoluto, positivo se antiorario. L'equazione di chiusura è quindi:

$$\dot{s}\boldsymbol{\tau} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{\theta}_4\mathbf{k} \times DB$$

Ricavando le componenti $DB = \left(20\sqrt{3}\,n_s, 0\right)$ e risolvendo:

$$\dot{x} = -\frac{n_s}{2}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}; \qquad \dot{\theta}_4 = \frac{1}{40}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Per le accelerazioni si ragiona in maniera del tutto analoga, considerando che l'accelerazione $\ddot{s}$ (tangenziale) della piattaforma 2 deve essere nulla (si osservi che la sua accelerazione *normale*, o centripeta, non può annullarsi, a meno di non annullare anche $\dot{s}$):

$$\boldsymbol{a}_{B\in 2} = \boldsymbol{a}_{B\in 1} = \boldsymbol{a}_2 = \frac{\dot{s}^2}{\|AB\|}\mathbf{n}$$

Chiudendo sul punto notevole B, come fatto per le velocità:

$$\boldsymbol{a}_{B\in 2} = \boldsymbol{a}_{B\in 5},$$

in cui $\boldsymbol{a}_{B\in 5}$ si esprime facilmente mettendosi solidali al corpo 4:

$$\boldsymbol{a}_{B\in 5} = \boldsymbol{a}_{B\in 5}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{a}_{B\in 5}^{(\mathrm{tr})} + \boldsymbol{a}_{B\in 5}^{(\mathrm{Co})} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{\theta}_4\mathbf{k} \times DB - \dot{\theta}_4^2 DB + 2\dot{\theta}_4\mathbf{k} \times \dot{s}\mathbf{i}$$

L'equazione di chiusura è quindi:

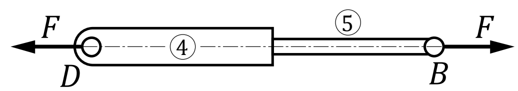
$$\frac{\dot{s}^2}{\|AB\|}\mathbf{n} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{\theta}_4\mathbf{k} \times DB - \dot{\theta}_4^2 DB + 2\dot{\theta}_4\mathbf{k} \times \dot{s}\mathbf{i}$$

Per ridurre i calcoli al minimo, dato che è richiesta solo l'accelerazione relativa $\ddot{x}\mathbf{i}$ e non l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}_4\mathbf{k}$, conviene moltiplicare scalarmente per $\mathbf{i}$ l'equazione di chiusura, ottenendo rapidamente:

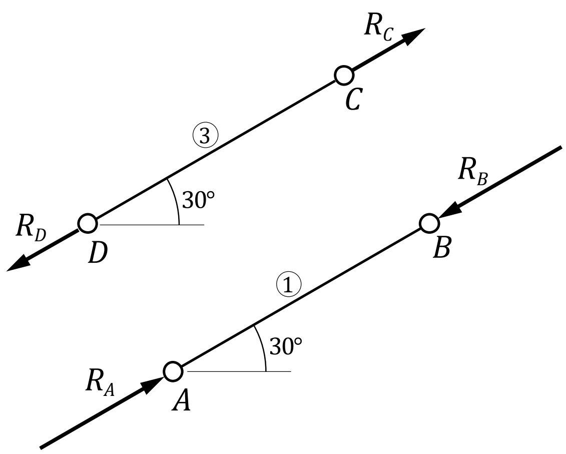
$$-\frac{\dot{s}^2}{\|AB\|}\frac{\sqrt{3}}{2} = \ddot{x} - \dot{\theta}_4^2\|DB\| \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{n_s}{80\sqrt{3}}\frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Esercizio 2

1) Diagramma di corpo libero dell'attuatore (la forza F è incognita):



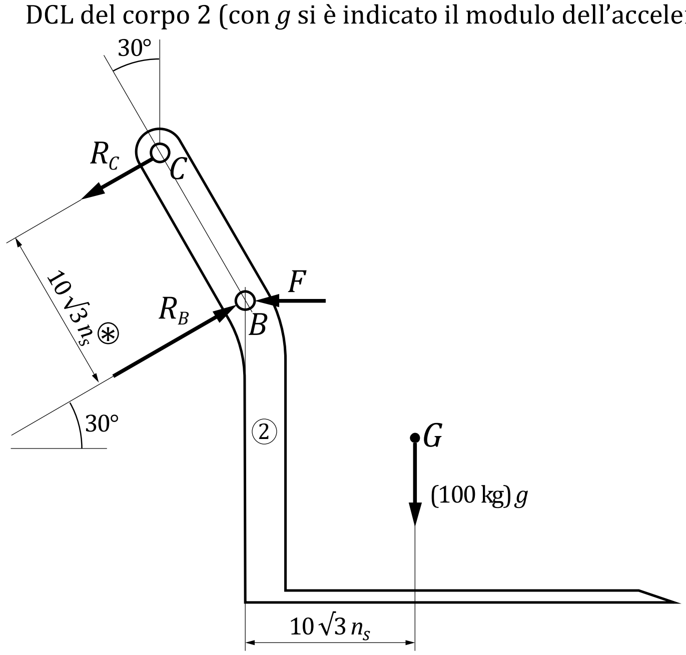
Le aste 1 e 3 sono entrambe scariche:



$$R_C = R_D$$

$$R_A = R_B$$

DCL del corpo 2 (con g si è indicato il modulo dell'accelerazione di gravità, pari a 9.81 m/s^2):



Scrivendo la seconda cardinale rispetto al polo B si ottiene immediatamente R_C:

$$R_C = (100\text{ kg})g = 981\text{ N} = R_D$$

La prima cardinale in verticale fornisce subito la reazione R_B:

$$\frac{R_B}{2} = (100\text{ kg})g + \frac{R_C}{2} \quad \rightarrow \quad R_B = 2943\text{ N} = R_A$$

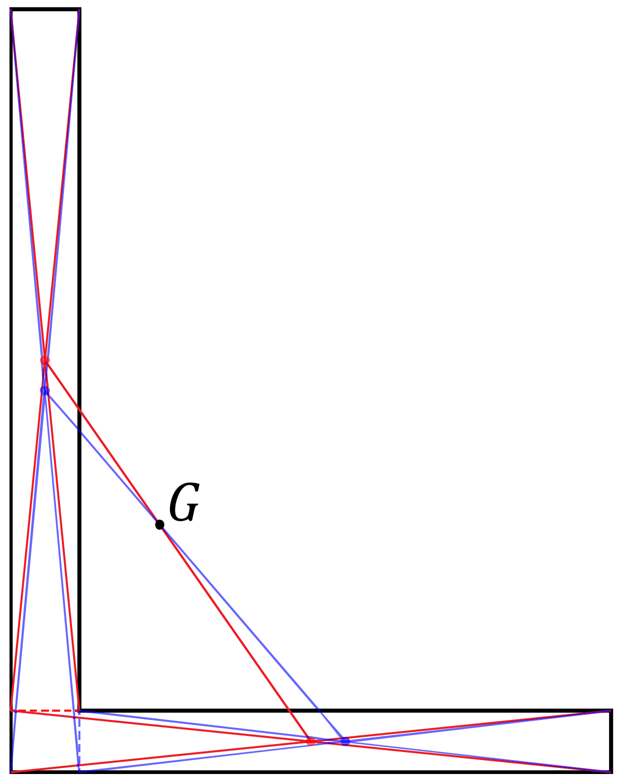
Infine, la prima cardinale in orizzontale fornisce la forza F esercitata dall'attuatore:

$$F = (R_B - R_C)\frac{\sqrt{3}}{2} = (100\text{ kg})g\,\sqrt{3} = 1699\text{ N}$$

⊛ La lunghezza $\overline{CB}$ si ottiene facilmente osservando il triangolo rettangolo CBD: $\overline{CB} = \overline{DC}\tan(30°) = \frac{30n_s}{\sqrt{3}}$ mm.

2) (I DCL risolti sono direttamente ottenibili da sopra: a valle dei calcoli, tutte le forze/coppie incognite sono risultate positive.)

Esercizio 3



Oss.: in alternativa alle diagonali si potevano usare gli assi di simmetria ortogonale dei vari sotto-rettangoli.