UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

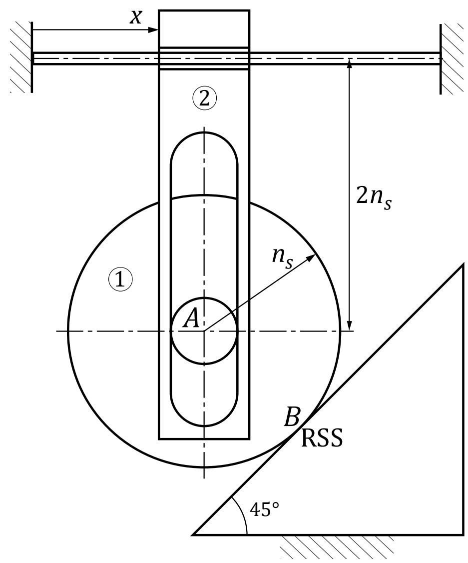
14 febbraio 2023

Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

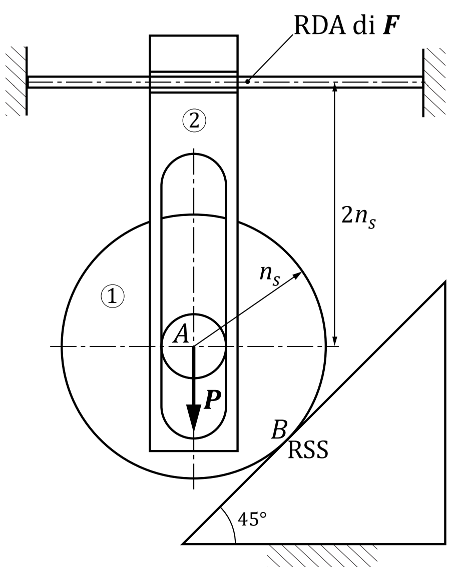
I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola

Esercizio 1



Il meccanismo in figura è costituito da due soli corpi mobili, collegati tra loro mediante un vincolo perno in asola: il perno, di centro A, è solidale al disco 1, mentre l'asola è ricavata nel corpo 2. Nel punto di contatto B tra corpo 1 e telaio sono presenti condizioni di rotolamento senza strisciamento. Nella configurazione rappresentata a lato, in cui sono note le quantità riportate in figura (n_s è espresso in millimetri), il corpo 2 è dotato di una velocità lineare *costante* $\dot{x} = n_s$ mm/s.

1) Determinare graficamente il centro delle velocità relativo C_{v12}.
2) Determinare numericamente la velocità angolare del corpo 1.
3) Determinare numericamente l'accelerazione angolare del corpo 1.

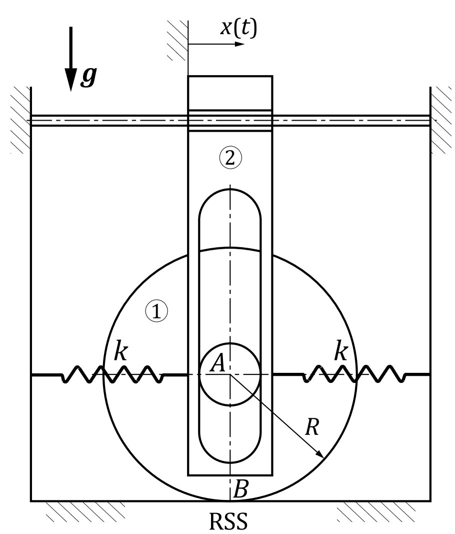


Esercizio 2

Nel punto A, centro del perno (liscio) del disco 1, viene applicata una forza esterna $\boldsymbol{P}$ (nota, v. figura), avente modulo pari a n_s N. Per ottenere condizioni di equilibrio statico, si applica al corpo 2 una forza incognita $\boldsymbol{F}$ lungo la retta di applicazione indicata in figura.

1) Determinare la forza $\boldsymbol{F}$ necessaria per ottenere condizioni di equilibrio statico e tutte le altre forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.
3) Determinare il minimo valore del coefficiente di attrito statico in B necessario per l'equilibrio.

Esercizio 3



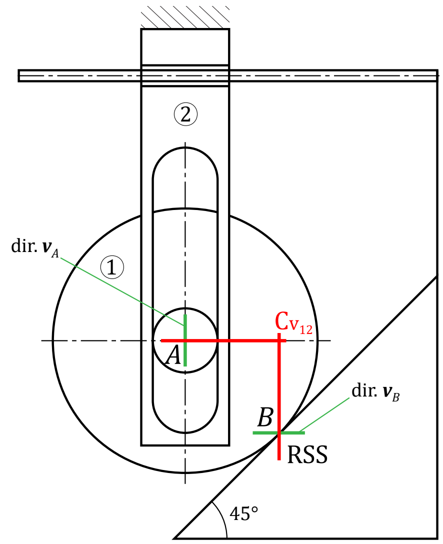
Si consideri una variante (semplificativa) del meccanismo sopra: si vogliono studiare le sue vibrazioni libere. Il corpo 2 è collegato al telaio (oltre che attraverso la coppia prismatica in alto) mediante le due molle in figura, entrambe di rigidezza k. Nella configurazione rappresentata a lato, in cui $x = 0$, le molle sono a riposo. I due corpi hanno masse m_1 e m_2, sono omogenei, e su di essi agiscono le rispettive forze peso. Il rotolamento senza strisciamento del disco 1 sul piano orizzontale è garantito. Ottenere, in forma simbolica:

1) l'equazione differenziale del moto;
2) la pulsazione naturale del sistema.

SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Mettendosi solidali al corpo 2, la determinazione grafica del C_{v12} risulta semplice considerando la seguente "versione relativa" del meccanismo:



2) È comodo chiudere sul punto A del corpo 1, della cui velocità possono essere scritte agevolmente due diverse espressioni:

$$\boldsymbol{v}_{A\in 1} = \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times BA,$$

e, mettendosi solidali al corpo 2:

$$\boldsymbol{v}_{A\in 1} = \boldsymbol{v}_{A\in 1}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{A\in 1}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\mathbf{j} + \dot{x}\mathbf{i},$$

dove s è una coordinata relativa (con cui si parametrizza la traiettoria relativa di $A \in 1$, rettilinea) e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono i soliti versori. Uguagliando le due espressioni si ottiene l'equazione di chiusura:

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times BA = \dot{s}\mathbf{j} + \dot{x}\mathbf{i}$$

Sapendo che $BA = \left(-n_s/\sqrt{2}, n_s/\sqrt{2}\right)$ e che $\dot{x} = n_s$ mm/s, si risolve molto facilmente ottenendo:

$$\dot{\theta}_1 = -\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}; \quad \dot{s} = n_s\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

3) Si procede in modo analogo a quanto fatto per le velocità.

$$\boldsymbol{a}_{A\in 1} = \boldsymbol{a}_{B\in 1} + \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times BA - \dot{\theta}_1^2 BA, \quad \text{dove } \boldsymbol{a}_{B\in 1} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{Cv}1} = \dot{\theta}_1^2 \|BA\| \boldsymbol{n}$$

In quest'ultima espressione, $\|BA\| = n_s$ e $\boldsymbol{n} = BA/\|BA\|$.

Mettendosi solidali al corpo 2:

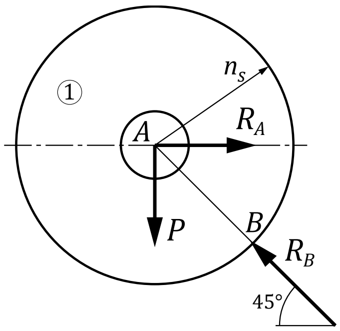
$$\boldsymbol{a}_{A\in 1} = \boldsymbol{a}_{A\in 1}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{a}_{A\in 1}^{(\mathrm{tr})} + \boldsymbol{a}_{A\in 1}^{(\mathrm{Co})} = \ddot{s}\mathbf{j} + \ddot{x}\mathbf{i} + \mathbf{0}$$

Uguagliando le due espressioni di $\boldsymbol{a}_{A\in 1}$, e tenendo presente che $\ddot{x} = 0$, si ottiene un'equazione di chiusura di immediata soluzione:

$$\dot{\theta}_1^2 \|BA\| \boldsymbol{n} + \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times BA - \dot{\theta}_1^2 BA = \ddot{s}\mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}_1 \mathbf{k} \times BA = \ddot{s}\mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \left(\ddot{\theta}_1, \ddot{s}\right) = (0,0)$$

Esercizio 2

1) Sul corpo 1 agiscono meno reazioni incognite rispetto al corpo 2. Impostiamo il DCL di 1:



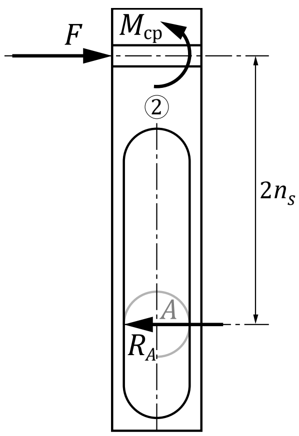
prima cardinale in verticale:

$$R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = P \quad \rightarrow \quad R_B = \sqrt{2}P = \sqrt{2}n_s \text{ N}$$

prima cardinale in orizzontale (R_A è la reazione che il corpo 2, tramite l'asola, trasmette al perno liscio):

$$R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = R_A \quad \rightarrow \quad R_A = P = n_s \text{ N}$$

Passiamo al corpo 2.



Prima cardinale in orizzontale:

$$F = R_A = P = n_s \text{ N}$$

seconda cardinale rispetto (ad esempio) al polo A:

$$M_{\mathrm{cp}} = 2n_s F = 2n_s^2 \text{ N mm}$$

2) (I DCL risolti sono direttamente ottenibili da sopra: a valle dei calcoli, tutte le forze/coppie incognite sono risultate positive.)

3) La reazione $\boldsymbol{R}_B$ è di supporto per il corpo 1. L'equilibrio statico richiede che essa formi un angolo nullo con la direzione normale al piano di contatto (in altri termini, la componente di $\boldsymbol{R}_B$ tangente al piano di contatto è nulla): pertanto, il minimo valore del coefficiente di attrito statico richiesto in B è zero.

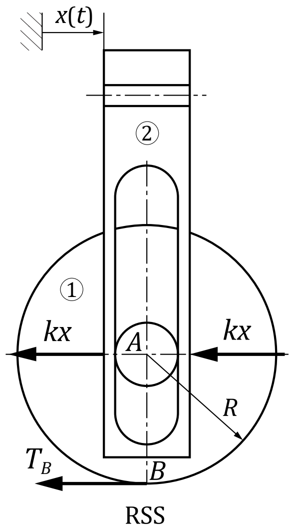
Esercizio 3

1) Per ottenere l'equazione differenziale del moto del meccanismo in esame possono essere seguiti più approcci. Ne presentiamo ben tre diversi (ne esistono altri). Ovviamente conducono tutti allo stesso risultato.

APPROCCIO 1

Un approccio rapido e semplice per il caso in esame è quello di considerare prima l'equilibrio dinamico dell'intero sistema, poi quello del disco 1. Vediamo in dettaglio, iniziando con il considerare il DCL dell'intero meccanismo (isolato dal telaio) posto in una configurazione variata positivamente in x.

Per procedere "avidamente" verso l'equazione differenziale del moto (una sola perché il meccanismo ha un solo grado di libertà) conviene esporre solo le forze esterne agenti orizzontalmente e scrivere la prima cardinale della dinamica in orizzontale (lungo **i**):

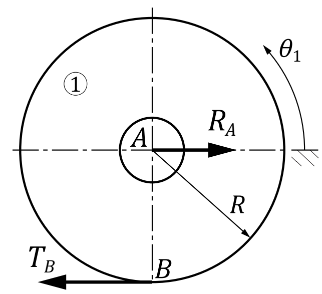


$$R_x^{(e)} = (m_1 + m_2)a_{Gx} \quad \rightarrow \quad -2kx - T_B = (m_1 + m_2)\ddot{x}$$

Oltre alle legge di moto $x(t)$, un'altra (funzione) incognita dell'equazione sopra è la componente orizzontale $T_B(t)$ della reazione di contatto scambiata con il suolo. Per determinarla è necessario aprire il sistema. La cosa più conveniente da fare è isolare il corpo 1 e considerare il suo DCL dinamico (anche qui si espongono solo le forze orizzontali).
Dato che abbiamo bisogno di una sola equazione per la determinazione di T_B, e non siamo interessati a R_A, basta scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo A, coincidente con il centro di massa del corpo 1:

$$M_A^{(e)} = J_A\ddot{\theta}_1$$

$$-T_B R = \frac{1}{2}m_1 R^2 \ddot{\theta}_1$$



(La reazione normale N_B, non inclusa nel DCL, ha braccio nullo rispetto ad A.)
Attenzione! θ_1 e x non sono coordinate indipendenti; esse sono legate dalla relazione (dipendente dalle scelte fatte nella definizione di tali coordinate):

$$x = -R\theta_1 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -R\ddot{\theta}_1$$

La reazione T_B risulta quindi essere:

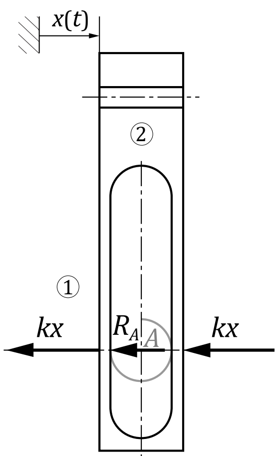
$$T_B = \frac{1}{2}m_1\ddot{x},$$

che sostituita nella prima cardinale iniziale fornisce direttamente l'equazione del moto:

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + 2kx = 0}$$

È evidente che si tratta di un problema di oscillazioni libere di un sistema privo di smorzamento.

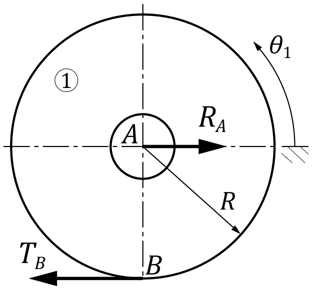
APPROCCIO 2



Stavolta iniziamo isolando soltanto il corpo 2 (esponendo di nuovo solo le forze orizzontali). Prima cardinale lungo **i**:

$$R_x^{(e)} = m_2 a_{G2x} \quad \rightarrow \quad -2kx - R_A = m_2\ddot{x}$$

Per determinare la reazione $R_A(t)$ scambiata con il disco 1 attraverso il perno (liscio) è necessario isolare 1 e scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto ad un polo conveniente.



Per evitare di dover determinare la reazione T_B conviene scrivere la seconda cardinale rispetto al polo B (nella sua accezione di centro d'istantanea rotazione del corpo 1), facendo attenzione al fatto che il polo considerato è mobile. Possiamo scrivere la seconda cardinale in questo modo (non è l'unico, come sappiamo):

$$\boldsymbol{M}_B^{(\mathrm{e})} = J_B\ddot{\theta}_1\mathbf{k} + BG_1 \times m_1\boldsymbol{a}_B \quad \xrightarrow{\cdot\mathbf{k}} \quad -R_A R = J_B\ddot{\theta}_1 + (BA \times m_1\boldsymbol{a}_B)\cdot\mathbf{k}$$

(Si tenga presente che la forza peso del corpo 1 ha braccio nullo rispetto a B.)

Nella relazione sopra possiamo subito notare che il contributo di $BA \times m_1\boldsymbol{a}_B$ è nullo: i due vettori sono infatti sempre paralleli. Ricaviamo allora velocemente la R_A nel modo seguente:

$$-R_A R = J_B\ddot{\theta}_1 = \frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\theta}_1 \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{3}{2}m_1\ddot{x}$$

Sostituendola nella prima cardinale iniziale si ottiene subito l'equazione del moto:

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + 2kx = 0}$$

APPROCCIO 3

Non dimentichiamo la Fisica: il sistema in esame è conservativo, quindi l'energia meccanica totale (somma di energia cinetica e energia potenziale) si conserva.
Scriviamo l'energia cinetica dei due corpi. Si ricordi il teorema di König per l'energia cinetica K di un corpo rigido (caso 2D):

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2$$

Per i due corpi in esame abbiamo allora (ad un generico istante di tempo):

$$K_{\mathrm{tot}} = K_1 + K_2 = \left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2\right)$$

Passiamo all'energia potenziale. L'energia potenziale *gravitazionale* non varia nel tempo perché i due centri di massa G_1 e G_2 si mantengono ad altezze costanti durante il moto: non la includiamo nel termine dell'energia potenziale perché, in un passaggio successivo, deriveremo tutto rispetto al tempo, dunque il suo contributo sarebbe nullo. Invece è necessario considerare l'energia potenziale *elastica* immagazzinata dalle due molle. Sappiamo che una molla lineare avente costante elastica k ed un allungamento/compressione δ (rispetto alla sua lunghezza di riposo) immagazzina un'energia potenziale elastica pari a:

$$U = \frac{1}{2}k\delta^2$$

Quella relativa alle nostre due molle sarà quindi, complessivamente:

$$U_{\mathrm{tot}} = kx^2$$

L'energia meccanica del sistema, esclusa la quota relativa all'energia potenziale gravitazionale, sarà allora:

$$E_m = K_{\mathrm{tot}} + U_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\dot{\theta}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2\dot{x}^2\right) + kx^2 = \text{ cost.}$$

Tenendo presente che $\dot{\theta} = -\dot{x}/R$, riscriviamo E_m e semplifichiamo:

$$E_m = \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + 2kx^2 = \text{ cost.}$$

Adesso deriviamo tutto rispetto al tempo. Otteniamo l'espressione:

$$\dot{E}_m = \left[\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + 2kx\right]\dot{x} = 0,$$

che, dovendo valere per qualsiasi velocità $\dot{x}$, fornisce direttamente l'equazione del moto:

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + 2kx = 0}$$

2) Per ottenere la pulsazione naturale dividiamo intanto l'equazione del moto per il coefficiente che moltiplica l'accelerazione $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{\frac{3}{2}m_1 + m_2}x = 0,$$

poi confrontiamo quest'ultima con l'equazione in forma canonica (priva del termine di smorzamento):

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Si ottiene immediatamente la pulsazione naturale ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{\frac{3}{2}m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{4k}{3m_1 + 2m_2}}$$