UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

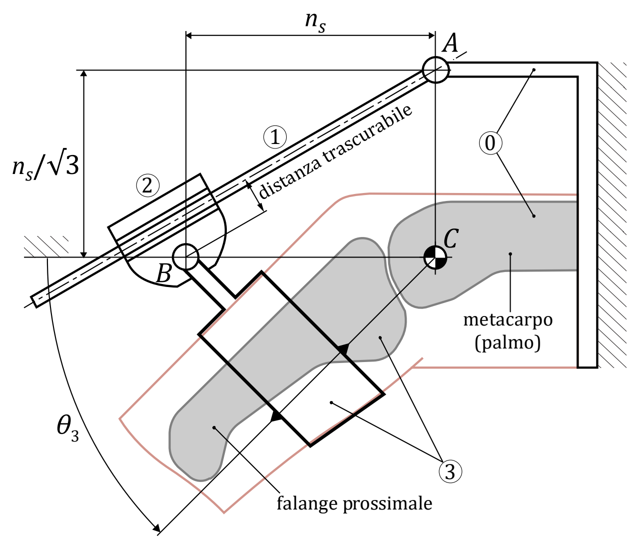
31 gennaio 2023

Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola

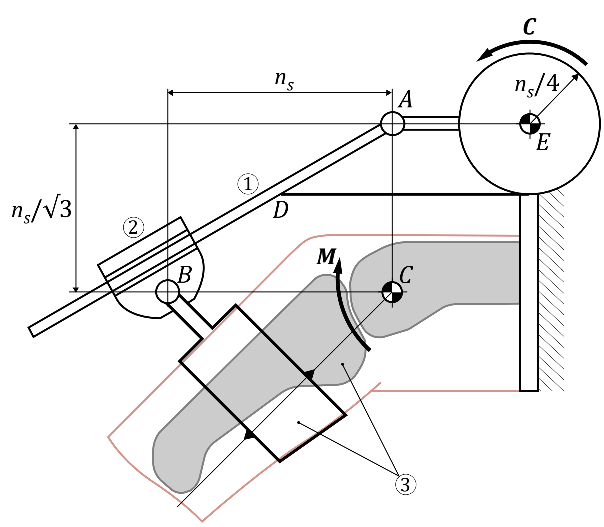
Esercizio 1



In figura è rappresentato il meccanismo di un esoscheletro per la riabilitazione del dito indice della mano. Il corpo 0 del dispositivo è saldamente collegato al palmo della mano, ed insieme costituiscono il telaio. La falange prossimale del dito indice ed il manicotto del dispositivo, inserito saldamente su di essa, sono assimilabili ad un unico corpo rigido, il corpo 3. La cerniera fissa di centro C rappresenta il centro dell'articolazione metacarpo-falangea (MCF) tra metacarpo e falange prossimale: quest'ultima ruota attorno a C. Nella configurazione rappresentata a lato, in cui sono note le quantità riportate in figura (con n_s espresso in millimetri), l'esoscheletro deve flettere la falange imprimendole una velocità angolare $\dot{\theta}_3 = (n_s/50)$ rad/s e mantenere quest'ultima costante (dunque $\ddot{\theta}_3 = 0$).

1) Determinare graficamente il centro delle velocità del corsoio 2.
2) Determinare numericamente la velocità angolare che deve essere impressa al corpo 1. Adottare il triangolo delle velocità per confermare la correttezza dei *segni* delle velocità ottenute.
3) Determinare numericamente l'accelerazione angolare che deve essere impressa al corpo 1.

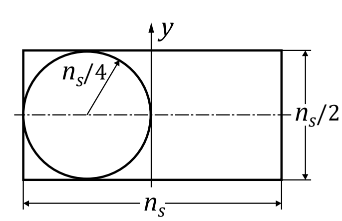
Esercizio 2



Per indurre una flessione della falange prossimale, l'esoscheletro viene attuato mediante una coppia $\boldsymbol{C}$ agente su una puleggia che mette in tensione un cavo (elemento flessibile) avvolto su di essa; tale cavo si inserisce sul corpo 1 in corrispondenza del punto d'attacco D. A causa di un irrigidimento a carico dell'articolazione MCF, sul corpo 3 agisce una coppia resistente $\boldsymbol{M}$ (nota, v. figura), avente modulo pari a $20\sqrt{3}\, n_s$ N mm.

1) Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ necessaria per ottenere condizioni di equilibrio statico (gli effetti inerziali sono trascurabili) e tutte le altre forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.

Esercizio 3

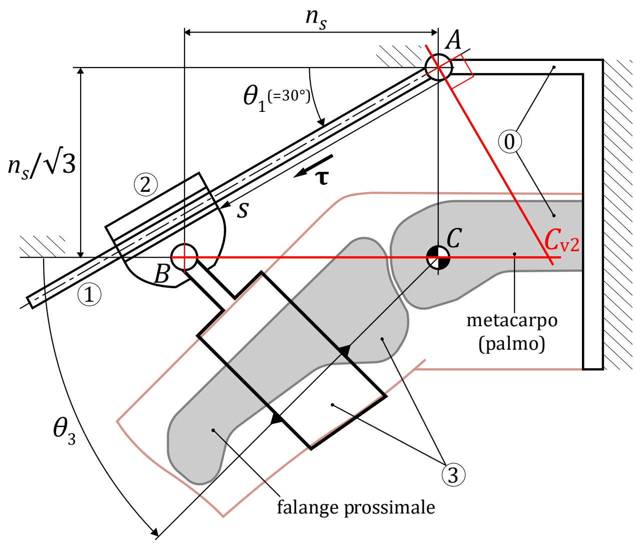


Il rettangolo forato nella figura a lato è omogeneo e ha densità superficiale ρ nota. Determinare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y in forma simbolica (in funzione di ρ e n_s).

SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Applicando il teorema di Chasles:



2) Si risolve il problema delle velocità chiudendo (ad esempio) sul punto notevole B:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 3} = \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB$$

Tale espressione può essere uguagliata alla seguente, ottenuta mettendosi solidali al corpo 1:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB,$$

dove l'angolo assoluto θ_1 è positivo se antiorario e, in un sist. di riferimento S con i soliti versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, il versore $\boldsymbol{\tau}$ scelto ha componenti $\left(-\sqrt{3}/2, -1/2\right)$ [v. definizioni su figura sopra].

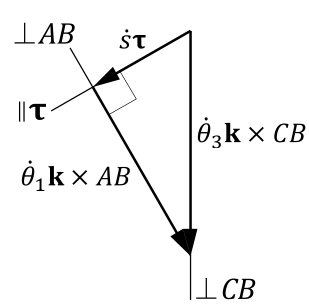
Equazione di chiusura:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 3} = \boldsymbol{v}_{B\in 2} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB$$

In S, $AB = \left(-n_s, -n_s/\sqrt{3}\right)$ e $CB = (-n_s, 0)$. Risolvendo con $\dot{\theta}_3 = (n_s/50)$ rad/s si ottiene:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{3n_s}{200}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \dot{\theta}_2; \qquad \dot{s} = \frac{n_s^2}{100}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

Triangolo delle velocità (per conferma dei segni delle velocità ottenute):



$(\dot{\theta}_3 > 0)$

$\dot{\theta}_1 > 0$ ✓

$\dot{s} > 0$ ✓

3) Analogamente a quanto fatto per le velocità, chiudiamo sul punto B. L'equazione di chiusura per le accelerazioni risulterà:

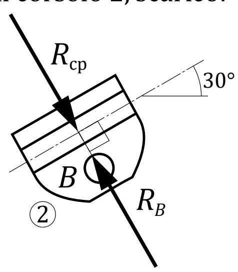
$$\ddot{\theta}_3\mathbf{k} \times CB - \dot{\theta}_3^2 CB = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \ddot{\theta}_1\mathbf{k} \times AB - \dot{\theta}_1^2 AB + 2\dot{\theta}_1\mathbf{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

Risolvendo con $\ddot{\theta}_3 = 0$ (e con le velocità ottenute al punto precedente) si ottiene:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{\sqrt{3}n_s^2}{20000}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = \ddot{\theta}_2; \qquad \ddot{s} = -\frac{\sqrt{3}n_s^3}{20000}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}$$

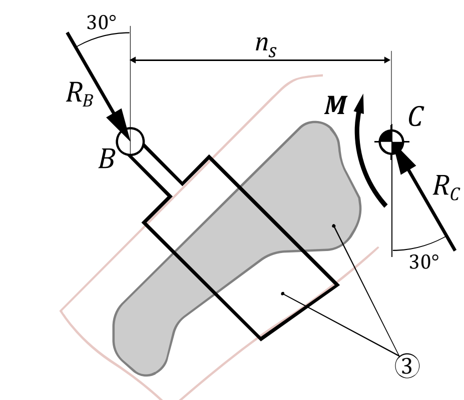
Esercizio 2

1) Conviene iniziare dal corsoio 2, scarico:



$$R_B = R_{\mathrm{cp}}$$

Procediamo con il corpo 3 e sfruttiamo la conoscenza della coppia M.



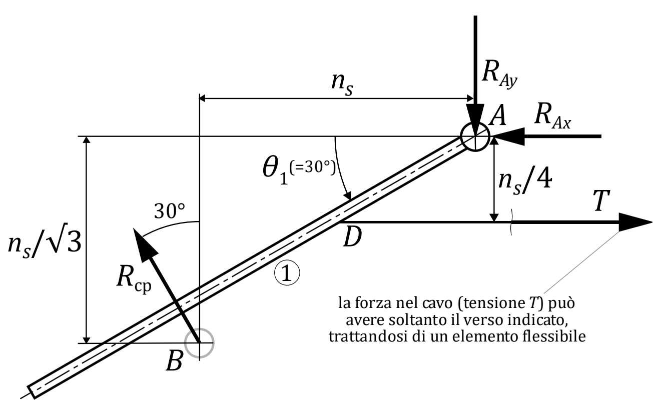
Seconda cardinale rispetto al polo C:

$$R_B\frac{\sqrt{3}}{2}n_s = M \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{2M}{\sqrt{3}n_s} = 40\ \mathrm{N} = R_{\mathrm{cp}}$$

Prima cardinale:

$$R_C = R_B = 40\ \mathrm{N}$$

Proseguiamo con l'equilibrio del corpo 1.



La seconda cardinale rispetto al polo A fornisce subito la tensione T del cavo (che dovrà essere positiva):

$$T\frac{n_s}{4} - \frac{R_{\mathrm{cp}}}{2}\frac{n_s}{\sqrt{3}} - R_{\mathrm{cp}}\frac{\sqrt{3}}{2}n_s = 0, \quad \text{da cui:}$$

$$T = \frac{8}{\sqrt{3}}R_{\mathrm{cp}} = \frac{320}{\sqrt{3}}\ \mathrm{N} \cong 184.8\ \mathrm{N}$$

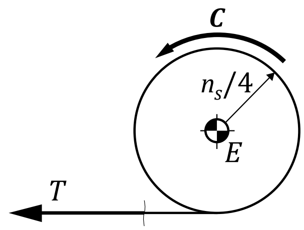
Prima cardinale in orizzontale:

$$R_{Ax} = T - \frac{R_{\mathrm{cp}}}{2} = \left(\frac{320}{\sqrt{3}} - 20\right)\ \mathrm{N} \cong 164.8\ \mathrm{N}$$

e in verticale:

$$R_{Ay} = R_{\mathrm{cp}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}\ \mathrm{N} \cong 34.6\ \mathrm{N}$$

Concludiamo con il banale equilibrio della puleggia (possiamo limitarci all'equilibrio a momento per determinare la coppia incognita $\boldsymbol{C}$, dato che la reazione $\boldsymbol{R}_E$ della cerniera fissa dovrà essere uguale e opposta a $\boldsymbol{T}$).



$$C = T\frac{n_s}{4} \quad \rightarrow \quad C = \frac{80}{\sqrt{3}} n_s \text{ N}$$

2) (I DCL risolti sono direttamente ottenibili da sopra: a valle dei calcoli, tutte le forze/coppie incognite sono risultate positive.)

Esercizio 3

Il momento d'inerzia della figura rispetto all'asse y sarà il risultato della somma di due contributi: quello del rettangolo pieno, $J_y^{(\mathrm{r})}$, e quello (negativo) del foro circolare, $J_y^{(\mathrm{f})}$. Il contributo $J_y^{(\mathrm{r})}$ sarà dato da:

$$J_y^{(\mathrm{r})} = \frac{1}{12} m^{(\mathrm{r})} n_s^2 = \frac{1}{12}\left(\rho \frac{n_s^2}{2}\right) n_s^2 = \frac{1}{24}\rho n_s^4$$

Il contributo $J_y^{(\mathrm{f})}$ sarà invece (usando anche il teorema degli assi paralleli):

$$J_y^{(\mathrm{f})} = \frac{1}{4} m^{(\mathrm{f})}\left(\frac{n_s}{4}\right)^2 + m^{(\mathrm{f})}\left(\frac{n_s}{4}\right)^2 = \frac{5}{64} m^{(\mathrm{f})} n_s^2 = \frac{5}{64}\left(-\rho\pi\left(\frac{n_s}{4}\right)^2\right) n_s^2 = -\frac{5}{1024}\pi\rho n_s^4$$

Pertanto:

$$J_y = J_y^{(\mathrm{r})} + J_y^{(\mathrm{f})} = \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{1024}\pi\right)\rho n_s^4 \quad (\cong 0.0263 \rho n_s^4)$$