UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

10 gennaio 2023

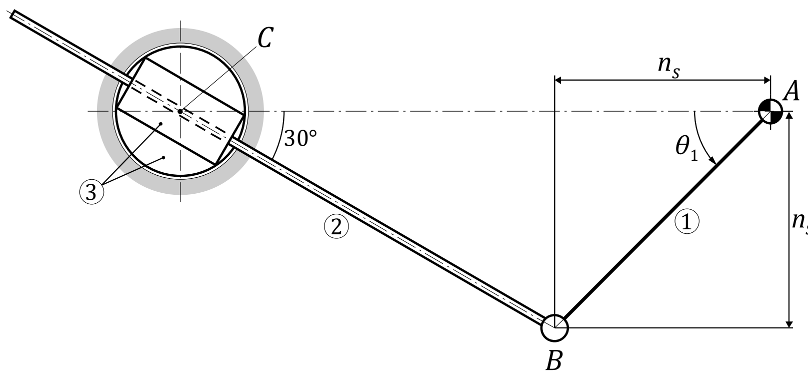
Esame di *Meccanica I*[a] e *Meccanica Teorica ed Applicata*[b]

[a] primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria*, cod. 842II, CdL in Ing. Biomedica
[b] cod. 1124I, CdLM in Ing. Robotica e dell'Automazione

I valori numerici negli esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:
n_s = somma delle cifre del numero di matricola

Esercizio 1

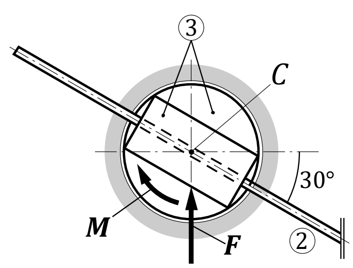
Il meccanismo in figura è parte del sistema di attuazione dell'articolazione dell'anca in un robot biomimetico. Il corpo 2 è collegato al corpo 3 mediante una coppia prismatica mobile, e il corpo 3 è collegato al telaio mediante una cerniera fissa di centro C (la base cilindrica di 3 può ruotare attorno ad un asse fisso ortogonale al piano del foglio, di traccia C). Nella configurazione rappresentata sono note le quantità riportate in figura (n_s è in millimetri); inoltre, $\dot{\theta}_1 = 2$ rad/s e si mantiene costante (quindi $\ddot{\theta}_1 = 0$).



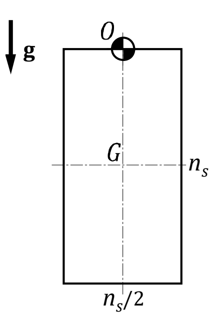
1) Determinare numericamente la velocità angolare del corpo 2 e la velocità di strisciamento tra i corpi 2 e 3. Adottare il triangolo delle velocità per confermare la correttezza dei segni delle velocità ottenute.
2) Determinare graficamente il punto del piano mobile del corpo 2 che nella configurazione considerata ha velocità assoluta nulla.
3) Ottenere l'equazione di chiusura delle accelerazioni (necessaria per determinare l'accelerazione angolare del corpo 2 e l'accelerazione di strisciamento tra i corpi 2 e 3).

Esercizio 2

Si consideri lo stesso meccanismo dell'esercizio 1. Nella configurazione in esame, il corpo 3 è sollecitato da azioni esterne il cui sistema equivalente rispetto al polo C è rappresentato nel dettaglio a lato: in particolare, la risultante nota $\boldsymbol{F}$ ha modulo pari a n_s N e la coppia nota $\boldsymbol{M}$ ha modulo pari a $200\sqrt{3}\, n_s$ N mm. In corrispondenza della cerniera A è calettato un motore elettrico in grado di esercitare una coppia $\boldsymbol{C}$ sul corpo 1.



1) Determinare la coppia $\boldsymbol{C}$ necessaria per ottenere condizioni di equilibrio statico e tutte le altre forze/coppie reattive.
2) Riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.



Esercizio 3

Il rettangolo in figura, omogeneo e di massa m, compie piccole oscillazioni attorno alla cerniera fissa O in un piano verticale (la configurazione in figura è quella di equilibrio statico). Lo smorzamento del sistema è trascurabile.

1) Ottenere l'equazione del moto in forma simbolica.
2) Ottenere il valore numerico della pulsazione naturale (n_s è in mm, attenzione all'unità di misura di g).

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

SOLUZIONE

Esercizio 1

1) Si risolve il problema delle velocità chiudendo (ad esempio) sul punto notevole B:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 1} = \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB$$

Tale espressione può essere uguagliata alla seguente, ottenuta mettendosi solidali al corpo 3:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 2} = \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{r})} + \boldsymbol{v}_{B\in 2}^{(\mathrm{tr})} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB,$$

dove, in un sist. di riferimento S con i soliti versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, il versore $\boldsymbol{\tau}$ scelto ha componenti $\left(\sqrt{3}/2, -1/2\right)$.

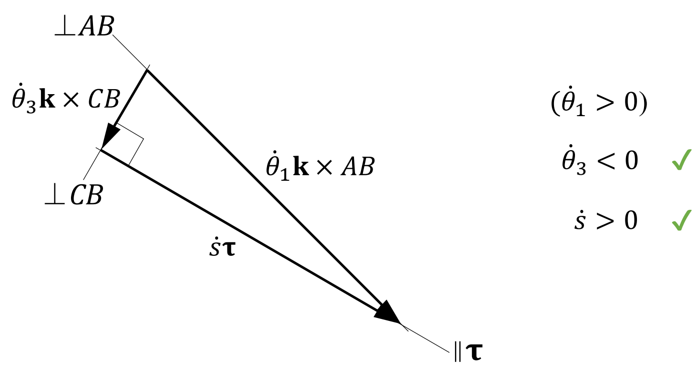
Equazione di chiusura:

$$\boldsymbol{v}_{B\in 1} = \boldsymbol{v}_{B\in 2} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB$$

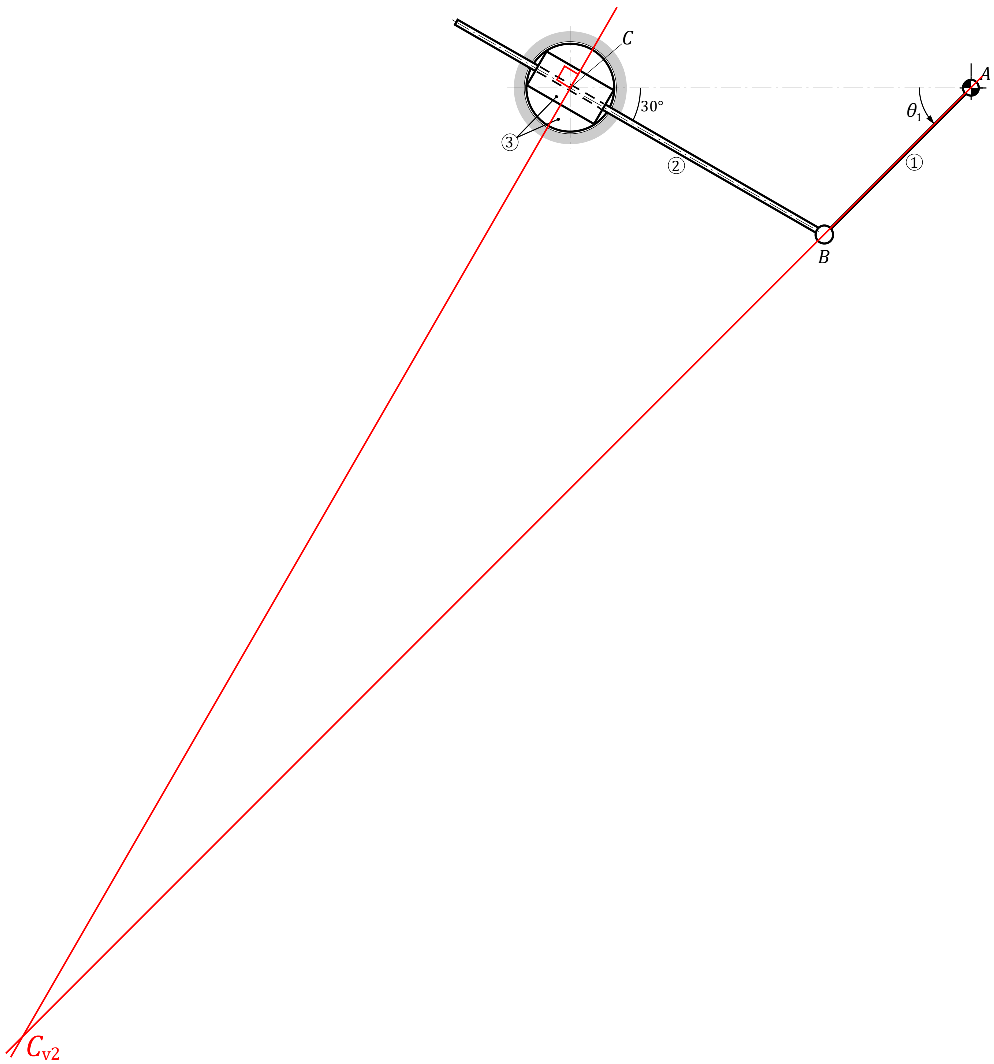
In S, $AB = (-n_s, -n_s)$ e $CB = \left(\sqrt{3}n_s, -n_s\right)$. Risolvendo con $\dot{\theta}_1 = 2$ rad/s si ottiene:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \dot{\theta}_2; \qquad \dot{s} = (1+\sqrt{3})n_s\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

Triangolo delle velocità:



2) Si tratta di determinare il C_{v2}: applicando il teorema di Chasles lo si determina graficamente come mostrato nella prossima pagina.



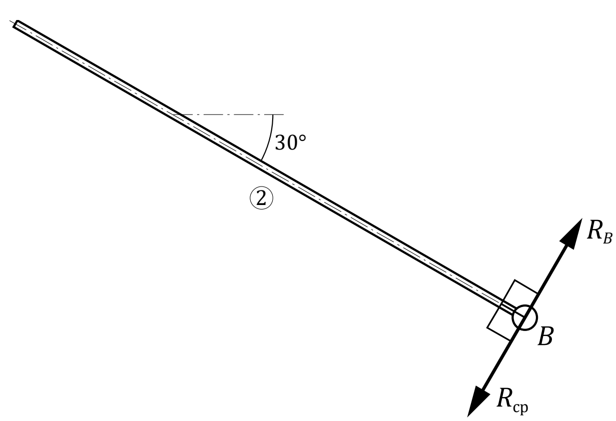
3) Analogamente a quanto fatto per le velocità, chiudiamo sul punto B. Considerando anche che $\ddot{\theta}_1 = 0$, l'equazione di chiusura per le accelerazioni risulterà:

$$-\dot{\theta}_1^2 AB = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \ddot{\theta}_3 \mathbf{k} \times CB - \dot{\theta}_3^2 CB + 2\dot{\theta}_3 \mathbf{k} \times \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

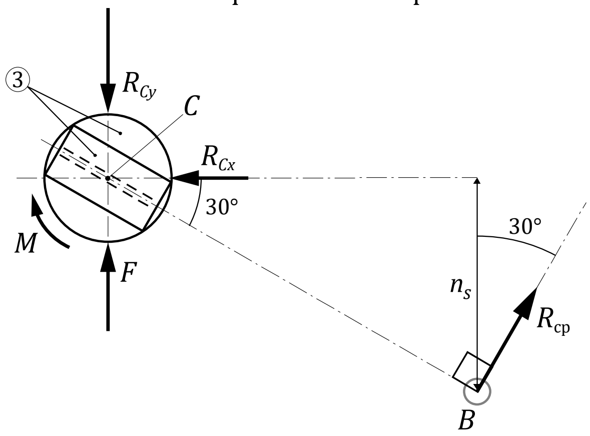
Esercizio 2

1) Conviene iniziare dal corpo 2, un'asta scarica:

$$R_B = R_{\text{cp}}$$



Procediamo con l'equilibrio del corpo 3.



Seconda cardinale rispetto al polo C:

$$R_{\mathrm{cp}} 2n_s = M \;\rightarrow\; R_{\mathrm{cp}} = 100\sqrt{3}\ \mathrm{N} = R_B$$

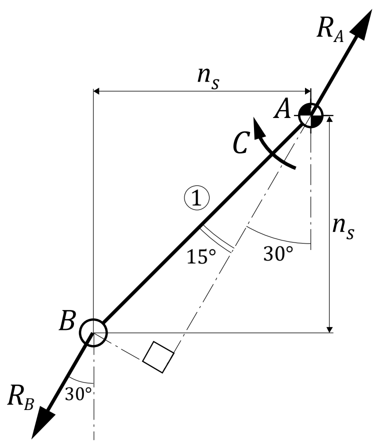
Prima cardinale lungo **i**:

$$R_{Cx} = \frac{R_{\mathrm{cp}}}{2} = 50\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$

Prima cardinale lungo **j**:

$$R_{Cy} = F + R_{\mathrm{cp}}\frac{\sqrt{3}}{2} = (n_s + 150)\ \mathrm{N}$$

Concludiamo con l'equilibrio del corpo 1.



Prima cardinale lungo la direzione comune di R_A e R_B:

$$R_A = R_B = 100\sqrt{3}\ \mathrm{N}$$

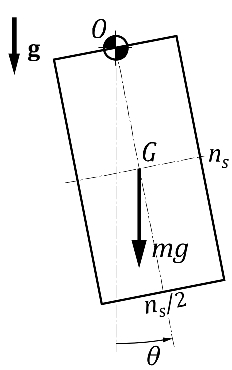
Seconda cardinale rispetto al polo A[1]:

$$C = R_B\overline{AB}\sin(15°) = R_B\sqrt{2}n_s\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = 50\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)n_s\ \ \mathrm{N\,mm}$$

2) (I DCL risolti sono direttamente ottenibili da sopra: a valle dei calcoli, tutte le forze/coppie incognite sono risultate positive.)

Esercizio 3

1) Si consideri il DCL del rettangolo qui sotto, posto in una configurazione variata di un piccolo angolo θ (coordinata lagrangiana) rispetto alla configurazione di equilibrio statico. Per ottenere l'equazione del moto senza far comparire la reazione $\boldsymbol{R}_O$, conviene scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo fisso O (la cui accelerazione $\boldsymbol{a}_o$ è nulla) nella forma:



$$\boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})} = J_o\dot{\boldsymbol{\omega}} + OG \times m\boldsymbol{a}_o \;\xrightarrow{\cdot\mathbf{k}}\; -mg\overline{OG}\sin\theta = J_o\ddot{\theta}$$

Considerando piccole oscillazioni ($\sin\theta \approx \theta$) e che $\overline{OG} = n_s/2$ (con n_s espresso in mm), l'equazione del moto risulta essere:

$$J_o\ddot{\theta} + mg\frac{n_s}{2}\theta = 0,$$

dove, utilizzando il teorema degli assi paralleli:

$$J_o = J_G + m\overline{OG}^2 = \frac{1}{12}m\left(\frac{n_s^2}{4} + n_s^2\right) + m\frac{n_s^2}{4} = \frac{17}{48}mn_s^2$$

[1] anziché lavorare con R_B si poteva lavorare comodamente anche con le sue componenti lungo **i** e **j**.

2) Dividendo l'equazione del moto per J_o:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgn_s}{2J_o}\theta = 0 \quad \xleftrightarrow{\text{cfr.}} \quad \ddot{\theta} + 2\,\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0,$$

da cui si ottiene subito:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgn_s}{2J_o}} = \sqrt{\frac{mgn_s}{2\frac{17}{48}mn_s^2}} = \sqrt{\frac{24g}{17n_s}} = \sqrt{\frac{24\cdot(9810\ \mathrm{mm/s^2})}{17n_s}}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Per inciso, vale la pena ricordare che sussistono le seguenti relazioni tra pulsazione ω_n, frequenza f e periodo T:

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi}\ \text{(in Hz)}; \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{\omega_n}{2\pi}\ \text{(in s)}.$$