UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

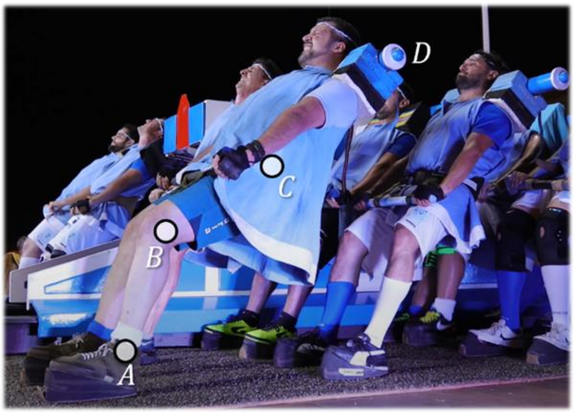
28 giugno 2022

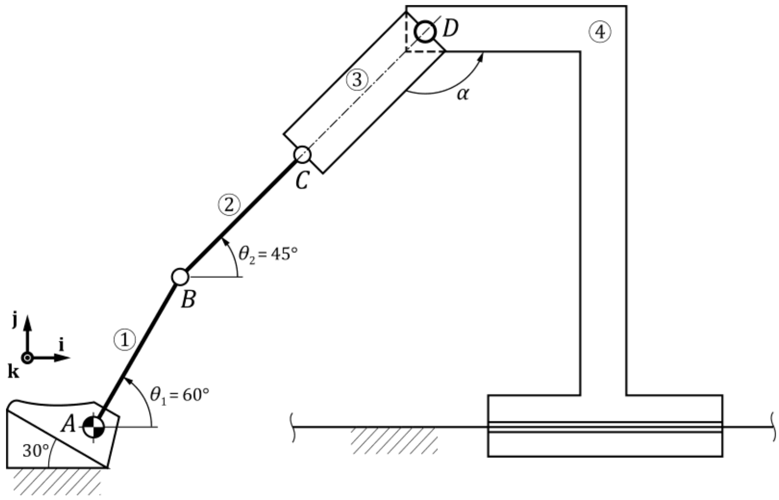
# ESAME DI MECCANICA I

— Primo modulo di *Fondamenti di Meccanica per la Bioingegneria* (cod. 842II), CdS in Ing. Biomedica —

*I valori numerici nei tre esercizi sotto si basano sul numero di matricola dello studente. In particolare:*
$n$ = numero di matricola; $n_s$ = somma delle cifre del numero di matricola

## *Esercizio 1*




La foto a sinistra coglie un istante del Gioco del Ponte di Pisa, l'immagine a destra è il meccanismo a cui può essere ricondotto il corpo di un combattente che spinge il carrello (4). Il corpo 3 include tutto ciò che è compreso tra le anche dell'atleta e il palo solidale al carrello (che materializza il perno della cerniera $D$). In questa fase di spinta, piedi e scarpe dell'atleta (con le loro suole speciali) sono fissi e l'angolo relativo $\alpha$ è mantenuto *costante*. Si assuma inoltre $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = n/1000$ mm. In questa configurazione:

1) ottenere graficamente i centri delle velocità assoluti dei corpi mobili;
2) ottenere numericamente velocità e accelerazione del carrello assumendo che il combattente riesca ad estendere le gambe con $\dot{\theta}_1 = -1$ rad/s e $\ddot{\theta}_1 = 0$.

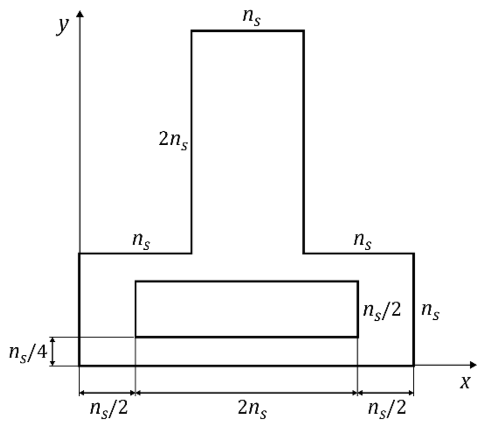
## *Esercizio 2*

Il palo del carrello (di centro $D$) esercita una forza nota $\boldsymbol{F}$ sul corpo 3, diretta da $D$ verso $C$ e avente modulo pari a $n/500$ N. Per studiare l'equilibrio statico del sistema, si considerino le cerniere $A$, $B$ e $C$ attuate (sono tutte attraversate dai muscoli dall'atleta). Per semplicità, *si trascurino le forze peso dei singoli corpi* rispetto alle altre forze in gioco.

1) Determinare tutte le forze/coppie reattive agenti sui corpi 1, 2 e 3 e riportare i diagrammi di corpo libero risolti numericamente.
2) Determinare il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra suole delle scarpe e terreno affinché possa instaurarsi equilibrio statico.

## *Esercizio 3*

La figura a T forata rappresentata a lato è omogenea. Con le lunghezze dei lati espresse in funzione di $n_s$ (in mm) come indicato, si determinino numericamente le coordinate $(x_G, y_G)$ del suo centro di massa nel sistema di riferimento assegnato.



**UNIVERSITÀ DI PISA**
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE

## SOLUZIONE

### *Esercizio 1*

Il fatto che, in questa fase di spinta, l'angolo relativo $\alpha$ venga mantenuto costante si traduce nell'assenza di moto relativo tra i corpi 3 e 4: questi si muovono insieme, come se fossero un unico corpo rigido, ed il loro moto è traslatorio. Pertanto, $\boldsymbol{v}_{C\in 3} = \boldsymbol{v}_{D\in 3} = \boldsymbol{v}_{D\in 4} = \dot{x}\mathbf{i}$, dove $x$ è una coordinata assoluta che parametrizza lo spostamento del carrello 4 (il cui moto è traslatorio rettilineo). Adesso, determinare i $C_\mathrm{v}$ assoluti e risolvere velocità e accelerazioni è molto semplice.

1) $C_{\mathrm{v}1} \equiv A$; $C_{\mathrm{v}3}$ e $C_{\mathrm{v}4}$ non esistono (moto traslatorio); $C_{\mathrm{v}2}$ è ottenibile come punto d'intersezione di due rette di Chasles: una è la retta passante per $A$ e $B$, l'altra è la retta verticale passante per $C$.

2) Usando la formula fondamentale della cinematica del corpo rigido per chiudere sul punto notevole $C$, si ottiene la seguente equazione di chiusura per le velocità:

$$\dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times AB + \dot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC = \dot{x}\mathbf{i}$$

Definendo $n_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{1000}$ mm, $AB = \left(n_m/2, n_m\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $BC = \left(n_m/\sqrt{2}, n_m/\sqrt{2}\right)$ nel sistema di riferimento assegnato. Risolvendo con $\dot{\theta}_1 = -1$ rad/s:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7071\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}; \qquad \dot{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} n_m \cong 0.3660\, n_m\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

pertanto $\dot{x}\mathbf{i} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} n_m\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}\right)\mathbf{i}$ è la velocità (di ogni punto) del carrello 4.

Usando il teorema di Rivals per chiudere su $C$ (e tenendo presente che $\ddot{\theta}_1 = 0$), si ottiene la seguente equazione di chiusura per le accelerazioni:

$$-\dot{\theta}_1^2 AB + \ddot{\theta}_2 \mathbf{k} \times BC - \dot{\theta}_2^2 BC = \ddot{x}\mathbf{i}$$

che risolta fornisce:

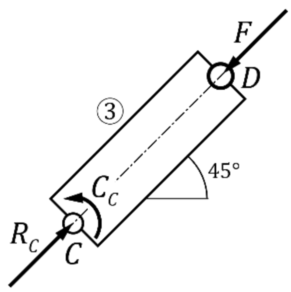
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{2} \cong 1.3497\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}; \qquad \ddot{x} = -\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} n_m \cong -2.0731\, n_m \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}$$

pertanto $\ddot{x}\mathbf{i} = \left(-\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} n_m\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}\right)\mathbf{i}$ è l'accelerazione (di ogni punto) del carrello 4.

### *Esercizio 2*

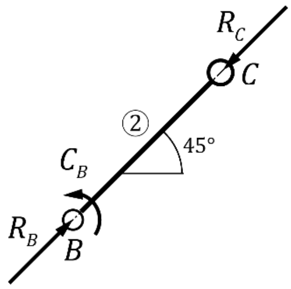
1) Iniziamo con il corpo 3:

$$R_C = F \ (= n/500 \text{ N qui e sotto})$$
$$C_C = 0$$




Adesso l'equilibrio del corpo 2 è altrettanto immediato:

$$R_B = R_C = F$$
$$C_B = 0$$

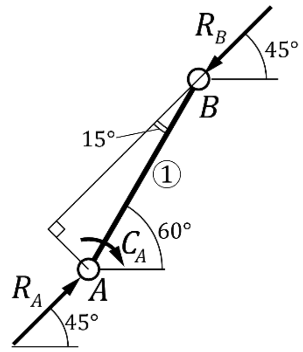


Passiamo infine al corpo 1:

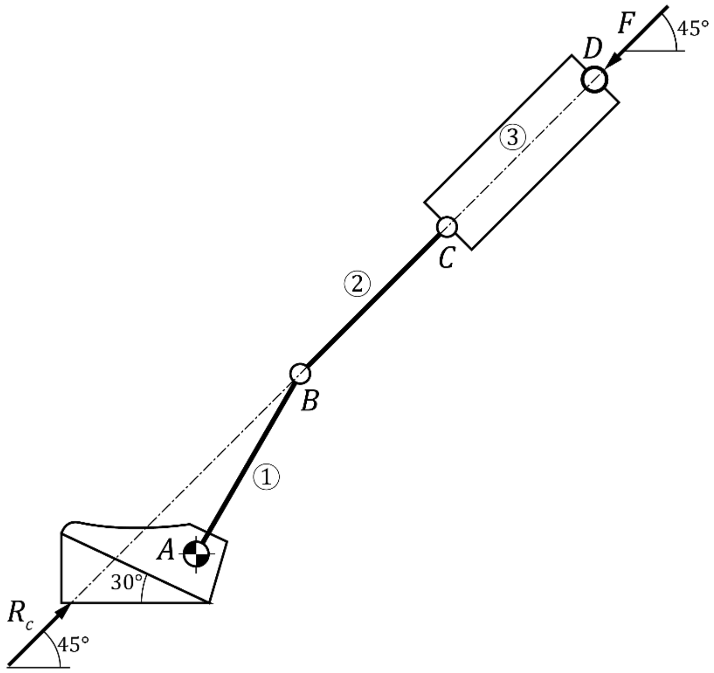
$$R_A = R_B = F$$

$$C_A = R_B\,\overline{AB}\,\sin 15° = Fn_m \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cong 0.2588\,Fn_m$$

(Tutte le quantità ottenute sono positive, i DCL risolti si ottengono banalmente.)




2) Per determinare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico necessario per l'equilibrio basta isolare il sistema costituito dalle scarpe e dai corpi 1, 2 e 3: la forza $\boldsymbol{F}$ e la reazione totale di contatto $\boldsymbol{R}_c$ devono costituire una coppia a braccio nullo.




Assumendo *che la retta di applicazione della forza* ***F*** *intersechi la base della suola*, il minimo valore del coefficiente d'attrito statico vale:

$$f_{\min} = \tan 45° = 1$$

dove 45° è l'angolo di attrito statico che la reazione di contatto $\boldsymbol{R}_c$ forma con la direzione verticale (normale al piano di contatto).

## *Esercizio 3*

Lo svolgimento è identico a quello dell'Esercizio 3 del testo d'esame di Meccanica I del 25 gennaio 2022: basta invertire gli assi $x$ e $y$ e sostituire $a$ con $n_s$. Pertanto:

$$x_G = \frac{3}{2} n_s \ \text{mm}$$

$$y_G = \frac{5}{4} n_s \ \text{mm}$$